非同次境界条件の放物型偏微分方程式の解法

$$\frac{d}{dt}n[x,t]=D_0\frac{d^2}{dx^2}n[x,t] \qquad (0<x<L,\quad 0<t<\infty) \quad \cdots\cdots\cdots \quad 式（１）$$
$$n[0,t]=N_0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad 式（２）$$
$$\frac{d}{dx}n[L,t]+S_2n[L,t]=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad 式（３）$$
$$n[x,0]=f(x) \quad \cdots\cdots\cdots \quad 式（４）$$

ここで　$L=\sqrt{D_0\tau}$とおくと、　$\tau=\frac{L^2}{D_0}$　となる。

規格化を行うと，　$\mathrm{T}=\frac{t}{\tau}=\frac{D_0t}{L^2}$，　$X=\frac{x}{L}$，　$N=\frac{n}{N_0}$　となる。

すると，　$\frac{d}{dt}=\frac{d}{dT}\frac{dT}{dt}=\frac{1}{\tau}\frac{d}{dT}=\frac{D_0}{L^2}\frac{d}{dT}$，　$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dX}\frac{dX}{dx}=\frac{1}{L}\frac{d}{dX}$，　$\frac{d^2}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right)=\frac{1}{L^2}\frac{d}{d^2X}$　となる。

したがって，式（１）は次のように置き換えられる。

$$\frac{D_0}{L^2}\frac{d}{dT}N[X,T]=\frac{D_0}{L^2}\frac{d^2}{dX^2}N[X,T]$$

$$\frac{d}{dT}N[X,T]=\frac{d^2}{dX^2}N[X,T] \qquad (0<X<1,\quad 0<T<\infty) \quad \cdots\cdots\cdots \quad 式（５）$$

同様に式（２），（３），（４）は次のように置き換えられる。

$$N[0,\mathrm{T}]=N_0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad 式（６）$$

$$\frac{d}{dX}N[1,T]+LS_2N[1,T]=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad 式（７）$$

$$N[X,0]=F(X) \quad \cdots\cdots\cdots \quad 式（８）$$

$$\frac{d}{dT}N[X,T]=\frac{d^2}{dX^2}N[X,T] \qquad (0<X<1,\quad 0<T<\infty)$$
$$N[0,\mathrm{T}]=N_0$$
$$\frac{d}{dX}N[1,T]+LS_2N[1,T]=0$$
$$N[X,0]=F(X)$$

ここで，非同時境界条件を同時境界条件に変形するために、定常応答成分$\overline{N1}[X,T]$と過渡応答成分$\overline{N2}[X,T]$を次のようにおく。

$$N[X,T]=\overline{N1}[X,T]+\overline{N2}[X,T]=(B-A)X+A+\overline{N2}[X,T] \quad \cdots\cdots\cdots \quad 式（９）$$

式（６），（７）において係数 A,B が次の条件を満たすと仮定する。

$$\overline{N1}[0,T]=N_0$$

$$\frac{d}{dX}\overline{N1}[1,T]+LS_2\overline{N1}[1,T]=0$$

このとき，AとBは，

$$A = N_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 式（１０）$$

$$B - A + LS_2 B = 0$$

$$B = \frac{A}{1+LS_2} = \frac{N_0}{1+LS_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 式（１１）$$

これを式（９）へ代入すると，

$$N[X,T] = N_0\left(1 - \frac{LS_2}{1+LS_2}X\right) + \overline{N2}[X,T] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 式（１２）$$

式（１２）を式（５）へ代入すると，

$$\frac{d}{dT}\overline{N2}[X,T] = \frac{d^2}{dX^2}\overline{N2}[X,T] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 式（１３）$$

式（６），（１２）から，

$$\overline{N2}[0,T] = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 式（１４）$$

式（７），（１２）から，

$$-N_0\frac{LS_2}{1+LS_2} + \frac{d}{dX}\overline{N2}[1,T] + LS_2\left\{N_0\frac{1}{1+LS_2} + \overline{N2}[1,T]\right\} = 0$$

$$\frac{d}{dX}\overline{N2}[1,T] + LS_2\overline{N2}[1,T] = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 式（１５）$$

式（８），（１２）から，

$$N[X,0] = F[X] = N_0\left(1 - \frac{LS_2}{1+LS_2}X\right) + \overline{N2}[X,0]$$

$$\overline{N2}[X,0] = F[X] + N_0\left(\frac{LS_2}{1+LS_2}X - 1\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 式（１６）$$

以上の変形から，次の同次境界条件の放物型微分方程式に変換できる。

$$\boxed{\begin{array}{l}
\dfrac{d}{dT}\overline{N2}[X,T] = \dfrac{d^2}{dX^2}\overline{N2} \\
\overline{N2}[0,T] = 0 \\
\dfrac{d}{dX}\overline{N2}[1,T] + LS_2\overline{N2}[1,T] = 0 \\
\overline{N2}[X,0] = F[X] + N_0\left(\dfrac{LS_2}{1+LS_2}X - 1\right)
\end{array}}$$

変数分離で解く。

$$\overline{N2}[\mathrm{X},T] = \overline{X}[\mathrm{X}]\overline{T}[\mathrm{T}] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 式（１７）$$

式（１７）を式（１３）へ代入する。

$$\bar{X}\,\bar{T}' = \bar{X}''\,\bar{T}$$

$$\frac{\bar{T}'}{\bar{T}} = \frac{\bar{X}''}{\bar{X}} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} \bar{T}' + \lambda^2 \bar{T} = 0 \\ \bar{X}'' + \lambda^2 \bar{X} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{T} = A\exp\left[-\lambda^2 T\right] \\ \bar{X} = B\sin(\lambda X) + C\cos(\lambda X) \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{式（１８）}$$

式（１４）へ代入すると，

$$C = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{式（１９）}$$

式（１５）へ代入すると，

$$\lambda\cos(\lambda) + LS_2\sin(\lambda) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{式（２０）}$$

n 番目の成分である固有値λ_nは上の固有方程式である式（２０）を満たす値$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\cdots, \lambda_\infty$である。この$\bar{X}$は，次の関係を満たす。

$$\begin{cases} \bar{X}'' + \lambda^2 \bar{X} = 0 \\ \bar{X}[0] = 0 \\ \bar{X}'[1] + LS_2\bar{X}[1] = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{式（２１）}$$

固有値λ_{n}に対する$\bar{X}$ は、$\bar{X}_n = a_n\sin(\lambda_n X)$のように表される。

この時，式（１７）は次のように表せる。

$$\overline{N2}[\mathrm{X},T] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n \mathrm{X})\exp\left(-\lambda_n{}^2 T\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{式（２２）}$$

式（１６）に代入すると，

$$\overline{N2}[\mathrm{X},0] = F[X] + N_0\left(\frac{LS_2}{1+LS_2}X - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin(\lambda_n X) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{式（２３）}$$

式（２３）の両辺に$\sin(\lambda_m X)$を掛けて$[0,1]$の範囲で積分し係数比較することで係数a_nを求める。

$$\int_0^1 \left\{F[\xi] + N_0\left(\frac{LS_2}{1+LS_2}\xi - 1\right)\right\}\sin(\lambda_m\xi)d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^1 \sin(\lambda_n\xi)\sin(\lambda_m\xi)d\xi$$

$$= a_m\int_0^1 \sin^2(\lambda_m\xi)d\xi = a_m\left(\frac{\lambda_m - \sin(\lambda_m)\cos(\lambda_m)}{2\lambda_m}\right)$$

$$a_n = \frac{2\lambda_n}{\lambda_n - \sin(\lambda_n)\cos(\lambda_n)}\int_0^1 \left\{F[\xi] + N_0\left(\frac{LS_2}{1+LS_2}\xi - 1\right)\right\}\sin(\lambda_n\xi)d\xi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{式（２４）}$$

以上をまとめると，

$$N[X,T] = N_0\left(1 - \frac{LS_2}{1+LS_2}X\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n X)\exp\left(-\lambda_n{}^2 t\right)$$

$$a_n = \frac{2\lambda_n}{\lambda_n - \sin(\lambda_n)\cos(\lambda_n)}\int_0^1 \left\{F[\xi] + N_0\left(\frac{LS_2}{1+LS_2}\xi - 1\right)\right\}\sin(\lambda_n \xi)d\xi$$

$$\lambda\cos(\lambda) + LS_2\sin(\lambda) = 0$$

$$\mathrm{T} = \frac{t}{\tau} = \frac{D_0 t}{L^2}$$

$$X = \frac{x}{L}$$