# 平成29年度専攻科入学者選抜学力検査問題

# （数学）

# (試験時間　９０分)

注 意

1. 問題用紙は指示があるまで開かないこと．
2. 問題用紙４枚です．
3. 解答用紙は４枚ですが，予備の解答用紙を１枚用意してあります．
4. 問題 (1) ～ (4) 全問解答して下さい．(3), (4) の空所補充問題を除き計算過程も採点対象です．
5. 解答用紙の総合得点欄および得点欄には記入しないこと．解答欄が不足する場合には裏面ではなく指定の予備解答用紙に記入すること．

鈴 鹿 工 業 高 等 専 門 学 校

（１） 次の問に答えよ．

**1)** 正の定数 $A$ に対し関数 $y(x)=\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$ を考える．導関数 $y'(x)$ を求めよ．

**2)** 部分積分と前問の結果を利用し不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ を求めよ．

**3)** 曲線 $y^2=x^2+1$，その上にある点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{2},\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$ $(t>0)$ と原点 O を結んだ線分 OP，そして $y$ 軸により囲まれている領域の面積を $S$ とする．$S$ を $t$ の式として簡単な数式で表せ．

**4)** 関数 $y=\sqrt{x^2+1}$ の $x=0$ での近似 4 次多項式をマクローリンの定理を用い求めよ．

（2） 次の問に答えよ.

1) 行列式 $\begin{vmatrix} a & c+b & a^2 \\ b & a+c & b^2 \\ c & b+a & c^2 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を持つとき, $a$ の値と対応する固有値を求めよ.

3) 2つの複素数 $z_1 = -1+3i$, $z_2 = 1+2i$ の（複素数平面における）正の最小の偏角をそれぞれ $\theta_1$, $\theta_2$ とする（$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位を表す）.

(i) $\theta_1 - \theta_2$ を求めよ.

(ii) $\dfrac{z_1^n}{z_2^n}$ が正の実数となるような最小の自然数 $n$ とその正の実数を求めよ.

（3） 次の問に答えよ．

**1)** 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$ の一般解を求めよ．

**2)** $x$ の関数 $y = y(x)$ についての微分方程式

$$y'' - 2a\,y' + 25y = 0$$

について考える（$a$ は実定数）．解答用紙の指定欄に適切な式を記入せよ (答のみでよい)．

その一般解は，

$a = 0$ のとき，$y =$ （ア），

$a = 3$ のとき，$y =$ （イ），

$a = 5$ のとき，$y =$ （ウ） である．

**3)** 前問 2) の微分方程式

$$y'' - 2a\,y' + 25y = 0$$

について（$a$ は実定数），$y$ が常に正（全ての $x$ に対し $y(x) > 0$）でかつ $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ となるような特殊解 $y(x)$ が存在するための，定数 $a$ についての必要十分条件は （エ） である (答のみでよい）．

(4) 次の問に答えよ.

1) 扇形の半径を $r$ として中心角を $\theta$ とすれば, 扇形の面積 $S$ は $r, \theta$ の 2 変数関数として $S = \dfrac{1}{2}r^2\theta$ と表せる. $S$ の第 1 次偏導関数すべてと全微分 $dS$ を求めよ.

2) 前問 1) の扇形の半径同士を接着して, 底面を持たない円錐面の容器を作り, 開口部を上にして容器に水をためることを考える. 元の扇形の面積 $S$ が正の一定値の場合, 容器の容積 $V$ を最大とするためには, 中心角 $\theta$ をどのようにしたらよいか求めよ. ただし, 水の表面張力は考えないとし最大値は求めなくてよい.

3) $xyz$ 空間内で $z = 1 - |y|$ のグラフと円錐面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ のグラフで挟まれた部分の立体を考える. その体積 $V$ を $xy$ 平面内の適当な領域 $D$ の上の 2 重積分とみて, 累次積分により 2 通りの方法で表せ. ただし, 立体の対称性を活かして

$$V = 4\int_0^{\boxed{(ア)}}\int_0^{\boxed{(イ)}}\boxed{(ウ)}\,dydx = 4\int_0^{\boxed{(エ)}}\int_0^{\boxed{(オ)}}\boxed{(ウ)}\,dxdy$$

の順で解答用紙の指定欄に適切な式を記入せよ (答のみでよい, 積分値も求めなくて良い).