平成26年度専攻科入学者選抜学力検査問題

（数学）

(試験時間　９０分)

注 意

1. 問題用紙は指示があるまで開かないこと.
2. 問題用紙４枚です.
3. 本来の解答用紙は４枚ですが，予備の解答用紙を１枚用意してあります.
4. 問題 (1) ～ (4) 全問解答して下さい. 問題 (2) の １） 以外は計算過程も採点対象です.
5. 解答用紙の総合得点欄および得点欄には記入しないこと.
解答欄が不足する場合には裏面ではなく指定の予備解答用紙に記入すること.

鈴鹿工業高等専門学校

(1) 次の問に答えよ.

1) xy 平面上の領域 $D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2\}$ における重積分

$$\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$$

を計算せよ.

2) $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ と媒介変数表示された曲線の長さを求めよ.

3) 関数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の $x = 8$ のまわりでの 2 次の近似多項式（テイラー多項式）を求めよ.

4) 前問 3) で求めた近似式によって, $f(9) = \sqrt[3]{9}$ の近似値を求めるとすると, 誤差が $\dfrac{1}{1000}$ 未満になることを示せ.

（2） 次の問に答えよ.

1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ に逆行列があるならば求めよ.（逆行列がある場合も, 解答用紙には答のみ書けばよい.）

2) 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 上のベクトルで, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の両方と垂直で, 長さが1になるようなものを全て求めよ.

3) $a + b = c + d$ を満たすような実数 a, b, c, d に対して, 行列

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を考える. このとき, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が B の固有ベクトルとなることを示せ. また, 対応する固有値を求めよ.

4) 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

のように表される一次変換 f によって直線 $y = x + 1$ が変換される図形を x, y についての方程式で表せ.

（3） 水槽内にバクテリアが多数生息していて, 時刻 t におけるバクテリア全体の個体数を $N(t)$ とする. $N(t)$ の変化を調べるため, 水槽内のバクテリア 1000 匹について初めの 1 秒間の増加数 a 匹を測定した (増加数とは分裂したり死滅したりした結果の数で $a > 0$ とする). そしてバクテリア 1 匹あたりの 1 秒間増加率 $\alpha = \dfrac{a}{1000}$ を求めたとして, 下の問に答えよ.

1) $0 \leqq t \leqq T$ で水槽内の環境が一定に保たれ, 1 匹あたりの 1 秒間増加率 α に変化がなく $\dfrac{d}{dt}N(t) = \alpha N(t)$ が成立すると仮定して, 初期値条件 $N(0) = N_0$ の下で $N(T)$ を求めよ.

2) $N(0) = N_0$ であった全バクテリア数が, $N(t)$ の増加に従い 1 匹あたりの 1 秒間増加率が減少し $\alpha(1 - kN(t))$ $\quad (\alpha,\ k$: 正定数, $k < \dfrac{1}{N_0})$ になり $\dfrac{d}{dt}N(t) = \alpha(1 - kN(t))N(t)$ が $0 \leqq t \leqq T$ で成立すると仮定した場合の $N(T)$ を与える式を求めよ.

3) 2) の条件下で求めた $N(T)$ の極限 $\displaystyle\lim_{T\to\infty} N(T)$ を求めよ.

（4） 次の問に答えよ.

1) 鋭角 θ に対し $\tan\theta = k$ として $\tan\dfrac{\theta}{2}$ を表す k の式を求めよ.

2) 正の定数 a, b に対し xy 平面内に $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(0, b)$, $\mathrm{O}(0, 0)$ の三点を考え直角三角形 ABO の内心 (三辺から等距離にある三角形内の点) を I とする. 前問を用いるなどして点 I を求めよ.

3) xyz 空間内で $\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 3)$, $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ の 4 点を考え四面体 ABCO の各面から等距離にある四面体内の点を J とする. 点 J を求めよ.