

平成25年度専攻科入学者選抜学力検査問題

(数学)

(試験時間 90分)

注意

1. 問題用紙は指示があるまで開かないこと。
2. 問題用紙4枚です。
3. 解答用紙4枚です。
4. 問題(1)～(4)全問解答して下さい。問題(1)の1)と問題(2)の4)以外は計算過程も採点対象です。
5. 解答用紙の総合得点欄および得点欄には記入しないこと。

鈴鹿工業高等専門学校

(1) 次の問に答えよ.

1) 次の各命題に対し, 正しいものには○を, 正しくないものには×を解答欄に記せ (○×のみが採点対象).

a) $f(x) = 4x^3 - 3x$, $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ の合成関数 $f(g(x))$ は奇関数である.

b) $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$ を展開すると次のようになるという. このとき, 定数項に対応する a の値は $4 \times {}_6C_2$ になる.

$$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6 = x^{12} - 12x^9 + 60x^6 - 160x^3 + a - \frac{192}{x^3} + \frac{64}{x^6}$$

c) 数列 $\log 6, \log 12, \log 24, \dots, \log(3 \cdot 2^n)$ は公比 $\log 2$ の等比数列である.

2) 媒介変数 $\begin{cases} x = \cos t - \cos 2t \\ y = \sin t - \sin 2t \end{cases}$ ($0 \leq t < 2\pi$) で与えられる曲線 C について次の問に答えよ.

a) 曲線 C と y 軸の交点をすべて求めよ.

b) $u = \cos t$ とする. 曲線 C 上の点 P と原点の距離 d を u の式で表せ.

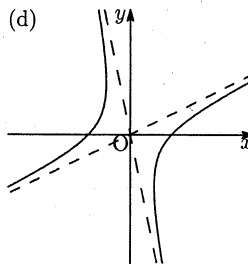
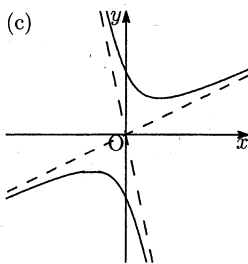
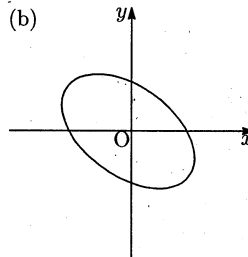
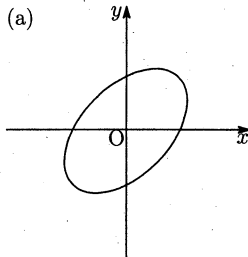
(2) 次の問に答えよ.

1) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値を求め, それらに対する単位固有ベクトルを一つずつ求めよ.

2) 1) の対称行列 A を適切な直交行列を用いて対角化せよ.

3) 2次形式 $2x^2 - 4xy - y^2$ を, 2) の対角化を用いて x, y を適切な変数 u, v に変換することにより, 標準形 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$ の形に直せ.

4) $2x^2 - 4xy - y^2 = 1$ が表す2次曲線のグラフを次の (a) ~ (d) から選び記号で答えよ (記号のみが採点対象).



(3) 空気中を運動する物体は運動方向と反対向きに速さに比例した力を受ける. 質量 1 [kg] の球体が地上から真上に投げ出されて, 球体の中心の高さを上向きに $y \text{ [m]}$ とすると, y の運動方程式は $\frac{d^2y}{dt^2} = -g - k \frac{dy}{dt}$ (g, k は正の定数) になる. 次の問いに答えよ.

1) その定数係数の 2 階常微分方程式の一般解を求めよ.

2) 時刻 $t = 0$ のとき上向きに速度 1 [m/s] で地上から投げ出され, $t = 0$ での球体の中心の位置を y 座標の原点とした場合の $y = y(t)$ を求めよ.

3) 2) で求めた y が最大となる時刻 $t_1 \text{ [s]}$ を求めよ.

4) 3) で求めた式を g, k の関数とみて $t_1(g, k)$ と書くとする. k を限りなく 0 に近づけた場合の極限值 $\lim_{k \rightarrow +0} t_1(g, k)$ を求めよ.

(4) 次の問に答えよ.

1) $f(x, y) = ye^{x^2+y+1}$ として次の問に答えよ.

a) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ を求めよ.

b) $f(x, y)$ の極値を調べよ.

c) $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (1, -2)$ に対する点での接平面を $ax + by + cz = d$ の形で表せ. (接平面は $z = f(x, y)$ のテイラー展開の一次近似からも得られる.)

2) 次の積分を求めよ.

a) 定積分 $\int_0^a \frac{x^2}{x^3 + a} dx$ を計算せよ. ただし, a は正の定数とする.

b) 積分順序を変えることで, 重積分 $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{x^3 + 2} dx dy$ を計算せよ.