1 連立方程式

1.1 一元方程式

方程式

$$ax = b$$

を解くと、もしも $a \neq 0$ ならば、両辺を a で割って

$$x = \frac{b}{a}$$

となる。

1.2 連立方程式

連立方程式

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 ...(1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2 ...(2) \\ ... \\ ... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i ...(i) \\ ... \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m ...(m) \end{array}\right. \quad .....(1.1)$$

は、行列とベクトルの記号を用いて次のように簡単に書ける

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad ...(1.2)$$

但し、行列 A とベクトル $\vec{x}$ および $\vec{b}$ は以下のように決める。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1j}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2j}...a_{2n} \\ ... \\ ... \\ a_{i1}a_{i2}...a_{ij}...a_{in} \\ ... \\ ... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mj}...a_{mn} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_j \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_j \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

$m \neq n$ であってもよいが暫くは $m = n$ としておく。

前と同じようにしてもしも行列 A の逆 A^{-1} があればそれを (1.2) の両辺に左から掛けて

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}(\textbf{クラーメル} \text{ の公式})...(1.3)$$

となり方程式は解ける。

（注意）逆行列に関しては一般に次の事実が成立する。

行列 A に対して逆行列が存在するのは、A の行列式の値 $|A|$ が零でない時に（この時に行列 A は**正則**であるという）逆があってその形は以下のようである。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}A_{21}...A_{j1}...A_{n1} \\ A_{12}A_{22}...A_{j2}...A_{n2} \\ ... \\ ... \\ A_{1i}A_{2i}...A_{ji}...A_{ni} \\ ... \\ ... \\ A_{1n}A_{2n}...A_{jn}...A_{nn} \end{pmatrix}$$

但し、ここで A_{ij} はもとの行列 A の (i,j) 余因子とよばれるもので以下のように与えられる

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}, D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}.........a_{1(j-1)}a_{1(j+1)}..........a_{1n} \\ a_{21}a_{22}.........a_{2(j-1)}a_{2(j+1)}..........a_{2n} \\ ... \\ ... \\ a_{(i-1)1}a_{(i-1)2}....a_{(i-1)(j-1)}a_{(i-1)(j+1)}....a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1}a_{(i+1)2}....a_{(i+1)(j-1)}a_{(i+1)(j+1)}....a_{(i+1)n} \\ ... \\ ... \\ a_{n1}a_{n2}...........a_{n(j-1)}a_{n(j+1)}........a_{nn} \end{vmatrix}$$

◀

以下では行列 A の逆が無い場合を考える。また、話を簡単にするために右辺の各 b_i は全て 0 であるとする。このように仮定すれば行列 A が逆を持つときには連立方程式の解は $x_i = 0$ が解でそれ以外の解を持たないことがわかる。

幾つかの例題　例題$1-2-1$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3x+4y-2z=0 \\ 4x-2y+3z=0 \end{cases}$$

このときには$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$で$A$は正則だから逆を持っている。従って，

$$x=y=z=0$$

が解。◀

例題$1-2-2$

$$\begin{cases} x+y+z=0.........(1) \\ x+2y+3z=0.....(2) \\ 2x+3y+4z=0...(3) \end{cases}$$

このときにAの行列式の値は0になっていて、しかも明らかに

$$(1)+(2)=(3)$$

だからこの時には方程式は実質的には２個しかないので例えば

$$\begin{cases} x+y+z=0.........(1) \\ x+2y+3z=0....(2) \end{cases}$$

を解く。詳しく言えばzを右辺に移項して、

$$\begin{cases} x+y=-z.........(1)' \\ x+2y=-3z...(2)' \end{cases}$$

この連立方程式をx,yについて解くと

$$y=-2z, x=z$$

を得る。この時にzは任意に取れる。従って解は

$$x=z, y=-2z, z\text{ は任意}$$

となる。

この例では、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$であるが$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$であることに注意しておく。◀

例題$1-2-3$

$$\begin{cases} x+y+z=0..........(1) \\ 2x+2y+2z=0.....(2) \\ 3x+3y+3z=0.....(3) \end{cases}$$

このときにAの行列式の値は明らかに0になっていて、しかも明らかに

$$2\times(1)=(2)、3\times(1)=(3)$$

だからこの時には方程式は実質的には１個しかないので例えば

$$x+y+z=0$$

だけを解けば$z=-x-y$を得る。このときにxとyは任意に取れる。従って解は

$$z=-x-y、x,y \text{は任意}$$

となる。この例では、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$でしかも$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$など全ての二次の行列式の値も$0$であることに注意しておく。◀

例題$1-2-4$

$$\begin{cases} 0x+0y+0z=0.....(1) \\ 0x+0y+0z=0.....(2) \\ 0x+0y+0z=0.....(3) \end{cases}$$

この方程式は明らかにx,y,zの全てが任意に取れる。◀

問題１．１次の連立方程式は上のどの type に属するか理由を付けて答えよ。

$$\begin{cases} 15x + 11y + 5z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \\ 21x + 21y + 13z = 0 \end{cases}$$

1.2.1 連立方程式の係数行列のランク（$rank$）と連立方程式の解

先ず、

「行列 A（mn 行列）の**ランク（階数）**が k である」

とは

"行列 A から作られる全ての（$k+1$）次以上の正方行列の行列式の値が 0 で、
k 次の正方行列の中に行列式の値が 0 でないものがある"

こととする。この時に、次が成立する。連立方程式

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

については、

「自由に選べる解の個数（＝解の自由度）」＋「係数行列 A のランク」＝未知数の個数...$(*)$

更に、連立方程式

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

については、

"連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$が解をもつのは、
「$rank(A) = rank\,(A\vec{b})$」が成り立つ場合に限る"

このときに、矢張り上の関係 $(*)$ が成立する。行列 $B = (A\vec{b})$ を連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の**拡大係数行列**と呼ぶ。

以下、$A\vec{x}=\vec{0}$ の場合に $(*)$ の理由を示す。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \text{--------} + a_{1k}x_k + a_{1(k+1)}x_{k+1} + \text{-------} + a_{1n}x_n = 0\text{---------}(1) \\ \text{---} \\ \text{---} \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \text{--------} + a_{kk}x_k + a_{k(k+1)}x_{k+1} + \text{------} + a_{kn}x_n = 0\text{---------}(k) \\ a_{(k+1)1}x_1 + a_{(k+1)2}x_2 + \text{---} + a_{(k+1)k}x_k + a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1} + \text{---} + a_{(k+1)n}x_n = 0\text{---}(k+1) \\ \text{---} \\ \text{---} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \text{--------} + a_{nk}x_k + a_{n(k+1)}x_{k+1} + \text{--------} + a_{nn}x_n = 0\text{-------}(n) \end{cases}$$

いま、

$$A_{kk} = \begin{vmatrix} a_{11} & \text{---} & \text{---} & a_{1k} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{k1} & \text{---} & \text{---} & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

とし、$(k+1)$ 以上の全ての行列式の値は 0 とする。

$k+1 \leq i \leq n$ となる i を固定し、任意の $1 \leq j \leq n$ に対して、仮定から

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{---} & a_{1k} & a_{1j} \\ & & \text{---} & & \\ & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \text{---} & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & a_{i1} & \text{---} & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

が全ての i,j について成り立つ。この行列式を一番右の列で展開すると、

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \text{---} + a_{kj}A_{kj} + a_{ij}A_{ij} = 0$$

となるが、A_{mj} は上の行列の (m,j) 余因子で j の選び方によらないことに注意しておく。また仮定から $A_{kk} \neq 0$ なので

$$a_{ij} = \frac{A_{1j}}{A_{kk}}a_{1j} + \text{---} + \frac{A_{kj}}{A_{kk}}a_{kj} = \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \text{---} + \alpha_k a_{kj}$$

と書けて上の注意から各 α_m は j に関係しない。ここで j として、$1,2,\text{---}k$ は勿論 $(k+1),(k+2),\text{---},n$ と取れるので、式 i が式全体として

$$i = \alpha_1 \times (1) + \alpha_2 \times (2) + ... + \alpha_k \times (k)$$

となっていることがわかる。

次に、$i = k+1, k+2, ..., n$ とすれば、$(1) \sim (k)$ から $(k+1) \sim (n)$ が出ることがわかる。よって $(1) \sim (k)$ だけを解けば良いことがわかった。つまり、

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \text{.........} + a_{1k}x_k = -(a_{1(k+1)}x_{k+1} + \text{.......} + a_{1n}x_n)\text{........}(1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad --- \\ \qquad\qquad\qquad\qquad --- \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \text{.........} + a_{kk}x_k = -(a_{k(k+1)}x_{k+1} + \text{......} + a_{kn}x_n)\text{.........}(k) \end{cases}$$

として未知数 $x_1, ..., x_k$ に関する連立方程式とみて解く。この時に、係数行列の行列式の値は仮定によって 0 ではないので、type（１）の方程式として一意に解ける。この時に、右辺に移項した変数 $x_{k+1}, x_{k+2}, ...x_n$ は自由に取れるので"「自由な解の個数」$= n-k$ "であることもわかる。以上の議論は右辺の各 b_i が 0 でないときにも殆んど同じように成り立つ。

例題$1-1.$ 連立方程式 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ ax+y=b \end{cases}$ $...(*)$ について以下の問に答えよ。

（１）$a=0, b=1$ の場合に解を求めよ。

（２）$a=-1, b=-1$ のときに、方程式の解を求めよ。

（３）方程式が解を持たないのは、どのような場合か。

（解法） $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$ とおく。

（１） $a=0, b=1$ の場合には、連立方程式は

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ y=1 \end{cases}$$

となり、係数行列 $A(0)$ 及び拡大係数行列 $B(0,1)$ はそれぞれ

$$A(0) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B(0,1) = B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

まず、行列 A の行列式の値 $|A|$ を計算すると、$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ だから、行列 A は正則で逆行列 A^{-1} が存在する。連立方程式 $(*)$ の両辺に左から A^{-1} をかけて、方程式の解

$$x = 2, y = 1, z = -2$$

を得る。

（2） $a = -1, b = -1$ の場合には、連立方程式は

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 ...(i) \\ 2x - y + z = 2 ...(ii) \quad ...(**) \\ -x + y = -1 ...(iii) \end{array} \right.$$

となり、係数行列 $A(-1)$ 及び拡大係数行列 $B(-1,-1)$ はそれぞれ

$$A(-1) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B(-1,-1) = B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

行列 A の階数を計算すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\to(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)\to(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2[1]+[2]\to[2]}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3(1)+(2)\to(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、$rankA = 2$ となる。またこの場合、行列 B は第１列と第４列が同じなので、行列 B の階数が行列 A の階数と同じになって、方程式 $(**)$ が解を持つ。この場合、$(i) = 3 \times (ii) + 5 \times (iii)$ が成り立ち本質的には方程式は２つである。また、自由に選べる解の個数（解の自由度）は、$(3-2=)1$ である。ここでは $(ii), (iii)$ を解く。(iii) より $y = x - 1$ であり、これを (ii) に代入して $z = 2 - 2x + y = 2 - 2x + x - 1 = 1 - x$ を得る。従って、方程式の解は、

$$x = free, y = x - 1, z = -x + 1$$

である。

　（3） $rankA=3$ の場合は、$rankB=3$ となり、方程式は解を持つ。従って、方程式が解を持たない為には、$rankA\neq 3$ が必要条件である。明らかに、$rankA\geq 2$ なので、方程式が解を持たない為には、

$$rankA=2$$

でなければならない。$A(a)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&1\\a&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)+(2)\to(2)}\begin{pmatrix}1&3&3\\2&1&1\\a&a+1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)\Leftrightarrow(2),(3)-(2)\to(3)}$
$\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&0\\0&0&a+1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2[1]+[2]\to[2]}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-5&0\\0&0&a+1\end{pmatrix}\xrightarrow{-3(1)+(2)\to(2)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&a+1\end{pmatrix}$

　だから、$rankA=2$ であるための条件は、

$$a=-1$$

である。

　このときに、$B=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&-1&1&2\\-1&1&0&b\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)+(2)\to(2)}\begin{pmatrix}1&3&3&1\\2&1&1&2\\-1&0&0&b\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)-(2)\to(3)}$
$\begin{pmatrix}1&3&0&1\\2&1&0&2\\-1&0&0&b\end{pmatrix}\xrightarrow[(b\neq-1)]{(b+1)\times[1]+[4]\to[1]}\begin{pmatrix}b+1&3&0&0\\2(b+1)&1&0&0\\0&0&0&b+1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2[1]+[2]\to[2]}$
$\begin{pmatrix}b+1&3&0&0\\0&-5&0&0\\0&0&0&b+1\end{pmatrix}\xrightarrow{[1]+\frac{3}{5}\times[2]\to[2]}\begin{pmatrix}b+1&0&0&0\\0&-5&0&0\\0&0&0&b+1\end{pmatrix}$ となる

ので、$b\neq-1$ の場合は

$$rankB=3$$

となり、方程式は解を持たない。

　$b=-1$ の場合は、上の計算で、$B=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&-1&1&2\\-1&1&0&-1\end{pmatrix}\to\to\to$
$\begin{pmatrix}1&3&0&0\\2&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$ となり、

$$rankB=2$$

であり、方程式が解を持つ。
従って、

$$a=-1, b\neq -1$$

の場合に限って方程式は解を持たない。◀

例題$1-2$連立方程式$\begin{cases} x-3z=-3 \\ 2x+ay-z=-2 \\ x+2y+az=1 \end{cases}$について以下の問に答えよ。

（１）係数行列 A の行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

（２）方程式が次のようになる為の a の値の条件をいえ。

(a) ただ一組の解を持つ。

(b) ２つ以上の解を持つ。

(c) 解を持たない。

（解法）（１） $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2-10+3a=(a+5)(a-2)$

（２） *(a)* ただ一組の解を持つためには、係数行列 A の行列式の値 $|A|$ について

$$|A|\neq 0$$

が成り立てば良い。この場合（１）によって、$a\neq 2,-5$ となれば良い。

(b) このためには、(a) 以外で、しかも係数行列 A と拡大係数行列 B に対して、$rankA=rankB$ が成り立てば良い。

(i)$a=2$ の場合.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[3]\to[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-[2]\to[1]}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)+3(1)\to(3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)\to(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-[2]\to[3]} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ だから

$$rankA=2$$

である。次ぎに、

$$B=\begin{pmatrix}1&0&-3&-3\\2&2&-1&-2\\1&2&2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-3&-3\\2&1&-1&-2\\1&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{[2]-[3]\to[2]}\begin{pmatrix}1&0&-3&-3\\1&0&-3&-3\\1&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]-[2]\to[1]}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&-3&-3\\1&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{3(1)+(3)\to(3),3(1)+(4)\to(4)}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&5&4\end{pmatrix}\xrightarrow{5(2)-(3)\to(3),4(2)-(4)\to(4)}$$

$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$だから、

$$rankB=2$$

である。従って、この場合は$rankA=rankB$が成り立ち、方程式は解を持つ。

(ii)$a=-5$の場合。$A=\begin{pmatrix}1&0&-3\\2&-5&-1\\1&2&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{[2]+[3]\to[3]}\begin{pmatrix}1&0&-3\\2&-5&-6\\1&2&-3\end{pmatrix}\longrightarrow$

$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-5&2\\1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{[3]-[1]\to[3]}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-5&0\\1&2&0\end{pmatrix}$だから

$$rankA=2$$

である。次ぎに、

$$B=\begin{pmatrix}1&0&-3&-3\\2&-5&-1&-2\\1&2&-5&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-3&-3\\2&-5&-6&-2\\1&2&-3&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&-3\\2&-5&2&-2\\1&2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\2&-5&0&-2\\1&2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)+(2)\to(3)}\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\2&-5&0&-2\\3&-3&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&0\\2&-5&2&0\\3&-3&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)+(1)\to(3)}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\2&-5&4&0\\3&-3&4&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&-5&1&0\\3&-3&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)-(1)\to-(3)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-5&1&0\\3&-3&2&0\end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{2(2)-(3)\to(2)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-7&0&0\\3&-3&2&0\end{pmatrix}$だから、

$$rankB=3$$

である。従って、この場合は$rankA < rankB$が成り立ち、方程式は解を持たない。◀

問題 1－２．

１．以下の（1）～（3）に答えよ。

（1）行列Aの階数$(rank)$の定義について、以下の文章を完成せよ。

$(i)A$の0でない小行列の.....。

$(ii)A$の.....　な列ベクトルの最大個数。

$(iii)A$の.....　な行ベクトルの最大個数。

$(iv)A$で定まる線形変換の値域の....。

（2）行列$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$の階数を求めよ。

（3）連立方程式$\begin{cases} x+4z+2u=2 \\ 3x+y+2z+6u=3 \\ x-2y-z+2u=-1 \end{cases}$　を解け。

２．連立方程式$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+az=a-3 \end{cases}$　について以下の問に答えよ。

（1）係数行列の階数を答えよ。

（2）拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & a & a-3 \end{pmatrix}$$

の階数を答えよ。

（3）この方程式が解を持つかどうかを判定し、解を持つ場合に解を求めよ。

３．連立方程式$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+5y-z+3u=0 \\ x+3y-z+2u=0 \\ 2x+3y+z+u=0 \end{cases}$ ...$(*)$について以下の問に答えよ。

（1）$(*)$の係数行列$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$の列ベクトルのうちで、なる

べく少ない個数の列ベクトルを用いて、それらの一次結合によりその他の列ベクトルを表せ。

（3）$(*)$ の解 x, y, z, u の中で、関数 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(u-1)^2$ を最小にする組を求めよ。

4. 連立方程式 $\left\{\begin{array}{c} y-2z=1 \\ 2x+2y+az=b \\ 4x+3y=b \\ 2x+y+z=c \end{array}\right.$ ...$(*)$ について以下の問に答えよ。

（1）方程式 $(*)$ の解がただ一組存在するように a, b, c の関係式を求めよ。また、その場合、解を求めよ。

（2）方程式 $(*)$ の解が三次元空間の中で直線になるときに、a, b, c の関係式を求めよ。また、その場合、その直線を求めよ。

5. 定数 a に対して、方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1+a \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \\ a+1 \end{pmatrix}$

が、解を持つような a とそのときの解を求めよ。

6. 連立方程式 $\left\{\begin{array}{c} 3x+(2-k)y=0 \\ x+ky=0 \end{array}\right.$ が非自明な解 $(x=y=0$ 以外の解 $)$ を持つ為には k の値は幾つであるか。また、その時の解も求めよ。

2　一次変換と行列

写像（又は変換）f が**線形写像（線形変換）**であるとは、次の 2 つの関係式が全ての x, y について成り立つことである。

$$(i) f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$(ii) f(kx)=kf(x), \text{ ここで } k \text{ は任意の実数である}$$

我々の今までに学んだ関数のうちで上の２つの関係式を満たす例は一次関数 $f(x)=ax$ に限られることが容易にわかる。いま変数 x を n 次元ベ

クトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ とし、$f(\vec{x}) = A\vec{x}$,（A は実数を成分とする mn 行列）を考えるとこの関数（写像）は線形である。逆に、$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して $f(\vec{x})$ が m 次元のベクトルの時に写像 f が線形ならば $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表すことが出来る。何故なら、$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ 一般に $\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ の f による像を $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ 一般に $f(\vec{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ とおき、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & a_{mj} & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

となる。それは、

$$f(\vec{x}) = f(\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\vec{e}_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & a_{mj} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_j. \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

となるからである。

$m = n$ で行列 A が**直交行列**$({}^tA A = E_n)$ である時に、この行列による一次変換を**直交変換**と呼ぶ。

（注意）直交変換では、長さが不変である。詳しくいえば、$\vec{X} = A\vec{x}(A;$ 直交行列）の時に

$$|\vec{X}|^2 = |\vec{x}|^2$$

が成り立つ。理由は $|\vec{X}|^2 = (\vec{X}, \vec{X}) = (A\vec{x}, A\vec{x}) = (\vec{x}, {}^tAA\vec{x}) = (\vec{x}, E_n\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{x}) = |\vec{x}|^2$ となるからである。

問題２－１． n 次正方行列 A について、以下の命題の中で１つだけ他の命題と同値でないものがある。それを指摘せよ。（技術士一次試験 H13）

(1)A は直交行列である。

(2)A と A の転置行列 ${}^tA$ との積は単位行列である。

(3)A の転置行列と A の逆行列とは一致する。

(4)A の逆行列は A 自身である。

(5)A の列ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ は、n 次元実ベクトル空間 R^n の正規直交基底である。

例. 平面上で x 軸に関する対称移動を行列で書け。

これは、ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\vec{x'} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ に写すので、$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$。よって

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおけばよい。◀

例題２－１ 平面上で直線 $y = mx$ に関する対称移動を行列で書け。

（解法） 平面上の点を $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として、y=mx に関して対称移動した点を $P\prime = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおき、$x\prime, y\prime$ の満たす方程式を２つ考える。先ず、２つの点の中点が直線上にあることから、

$$y + y' = m(x + x')$$

が成り立つ。次に、線分 PP' はもとの直線に直交するから、

$$\frac{y - y'}{x - x'} = -\frac{1}{m}$$

が成り立つ。この 2 つの方程式を $x\prime, y\prime$ について解くと、

$$\begin{cases} y' - mx' = -y + mx \\ y' + \frac{1}{m}x' = y + \frac{1}{m}x \end{cases}$$

から

$$x' = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}x + \frac{2m}{1 + m^2}y, y' = \frac{2m}{1 + m^2}x - \frac{1 - m^2}{1 + m^2}y$$

を得る。従って、行列で表すと

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}$$

が得られる。◀

例題２－２． 空間で平面 $x + y + z = 0$ に関する対称移動を行列で書け。

（解法） 空間の点を $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とし、平面 $x + y + z = 0$ に関して対称移動して得られる点を $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とする。最初に PP' の中点が平面 $x + y + z = 0$ 上にあることから

$$\frac{x + x'}{2} + \frac{y + y'}{2} + \frac{z + z'}{2} = 0$$

次に線分 PP' が平面 $x+y+z=0$ に垂直であるから、ベクトル PP' が平面の垂線の方向と平行になるので、

$$x'-x=y'-y=z'-z$$

従って連立方程式

$$\begin{cases} \frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}=0 \\ x'-x=y'-y \\ y'-y=z'-z \end{cases}$$

を x',y',z' について解く。$x'-x=y'-y$ から $x'=y'-y+x, y'-y=z'-z$ から $z'=y'-y+z$ これらを $\frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}=0$ に代入して、

$$y'=\frac{-2x+y-2z}{3}$$

を得る。これから、

$$x'=\frac{x-2y-2z}{3}、z'=\frac{-2x-2y+z}{3}$$

が得られる。このことを行列で書けば、

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

である。◀

例． xy 平面上で点 $P(x,y)$ を原点 $O(0,0)$ の周りに θ 回転して得られる点を $P'(X,Y)$ とする時に、点 P を点 P' に写す変換 $T(\theta)$ は以下の行列で表される。

$$T(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

（証明） $P(x,y)$ が x 軸の正の方向となす角を α とし、$P'(X,Y)$ の X 軸の正の方向となす角を β とすれば、それぞれ

$$\begin{cases} x=r\cos\alpha \\ y=r\sin\alpha \end{cases},$$

$$\begin{cases} X=r\cos\beta \\ Y=r\sin\beta \end{cases}$$

が成り立つ。

ここで、r は原点 $O(0,0)$ と点 $P(x,y)$ 及び点 $P'(X,Y)$ との間の距離であり、$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{X^2+Y^2}$ となる。ところが、$\beta=\alpha+\theta$ だから、加法定理により

$$\begin{cases} \cos\beta=\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta \\ \sin\beta=\sin(\alpha+\theta)=\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta \end{cases}$$

なので、関係式

$$\begin{cases} X=r\cos\beta=r(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)=x\cos\theta-y\sin\theta \\ Y=r\sin\beta=r(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)=x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases}$$

が成立する。この関係をベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{X}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, 行列 $T(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を使って書けば

$$\vec{X}=T(\theta)\vec{x}$$

となる。◀

例題2-3. 次の 2 つの規則で点 (x,y) を (x'',y'') に写すとする。以下の問に答えよ。

(i)$x'=x+y, y'=3x+2y$

(ii)(x',y') を原点の周りに $\frac{\pi}{4}$ 左廻りに回転して (x'',y'') に写す

１．(x,y) を (x'',y'') に写す変換を行列で表せ。

２．直線 $y=ax+b$ 上の点が全て再びこの直線上に移される時に、a,b の条件をいえ。

（解法）１． 変換 (i) は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であり、変換 (ii) は

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

だから、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

２. この変換で直線 $y = ax + b$ 上は

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ax+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}a)x - \frac{\sqrt{2}}{2}b \\ (2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}a)x + \frac{3\sqrt{2}}{2}b \end{pmatrix}$$

に移る。この点が再び $y = ax + b$ 上にあるためには、

$$(2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}a)x + \frac{3\sqrt{2}}{2}b = a\left\{(-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}a)x - \frac{\sqrt{2}}{2}b\right\} + b$$

が成り立てば良い。この式は

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}a^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}a + 2\sqrt{2})x + (\frac{3\sqrt{2}}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}ab - b) = 0,$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(a^2 + 5a + 4)x + (\frac{3\sqrt{2}}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}ab - b) = 0$$

と変形され、この式が全ての $\mathbf{x}$ について成り立つ為には、

$$a^2 + 5a + 4 = 0, \frac{3\sqrt{2}}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}ab - b = 0$$

が成り立つことが必要である。$a^2 + 5a + 4 = 0$ より $a = -1, -4$、この時に $\frac{3\sqrt{2}}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}ab - b = 0$ から $.b = 0.$ ◀

（類題） $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ とする。直線 $y = mx$ 上の全ての点が行列 A による一次変換で再び直線 $y = mx$ 上に移る為の m の値は何か。

例題 *2-4.* 変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(a > 0)$ を考える。この変換で点 P が P' に写るとする。この時に、問に答えよ。

１．原点を O として常に関係式 $2OP = OP'$ が成り立っているとするときに、a, b を決めよ。

２．このときに、ある直線 l が再び同じ直線 l に移るとするとき、直線 l の式を求めよ。

（解法）１． $x' = -x + ay, y' = bx + y$ だから、関係式 $2OP = OP'$ に代入して両辺を自乗すると、

$$4(x^2 + y^2) = (-x + ay)^2 + (bx + y)^2$$

左辺を展開して纏めると、

$$(1 + b^2)x^2 + (1 + a^2)y^2 + 2(b - a)xy = 4(x^2 + y^2)$$

が得られる。この式が全ての x, y について成り立つから、

$$(1 + b^2) = 4, (1 + a^2) = 4, (b - a) = 0$$

が成り立てばよい。$a > 0$ に注意して $a = b = \sqrt{3}$ を得る。

２． 求める直線の方程式を $y = mx + n$ として直線上の任意の点 $\begin{pmatrix} x \\ mx + n \end{pmatrix}$ を与えられた変換で移すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ mx + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + \sqrt{3}(mx + n) \\ \sqrt{3}x + mx + n \end{pmatrix}$$

となる。これが再び同じ直線の上にあることから、次の関係式が成り立つ。

$$\sqrt{3}x + mx + n = m(-x + \sqrt{3}(mx + n)) + n.$$

よって、

$$(\sqrt{3}m^2 - 2m - \sqrt{3})x + \sqrt{3}mn = 0$$

が全ての x について成り立てば良い。連立方程式

$$\begin{cases} \sqrt{3}m^2 - 2m - \sqrt{3} = 0 \\ 3mn = 0 \end{cases}$$

を解いて解 $m = \sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, n = 0$ を得る。◀

例題2-5. 3 次元ベクトル空間で行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ が表す一次変換を f とする。以下に答えよ。

（１）$f(\vec{x_0}) = \vec{0}$ となるベクトル $\vec{x_0}$ を求めよ。

（２）２つのベクトル $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ について、$\vec{x_1} - \vec{x_2}$ が $\vec{x_0}$ に平行ならば、$f(\vec{x_1}) = f(\vec{x_2})$ であることを示せ。
（３）原点を通り、$\vec{x_0}$ に垂直な平面 α 上にあるベクトル $\vec{z}$ の満たす方程式を求めよ。
（４）平面 α 上にある異なる２つのベクトル $\vec{z_1}, \vec{z_2}$ は f によって、異なるベクトルに写されることを示せ。

（解法）（１） $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1)-(3)\to(1)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{[1]+[3]\to[1]}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

従って、

$$rankA = 2$$

ここで、$f(\vec{x_0}) = \vec{0}$ となるベクトルを $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と置いて、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は

方程式

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から、

$$x = -z, y = 2z, z; free$$

即ち

$$\vec{x_0} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（２）仮定から、$\vec{x_1} - \vec{x_2} = k\vec{x_0}$ となり、f の線形性によって、

$$f(\vec{x_1} - \vec{x_2}) = f(k\vec{x_0}) = kf(\vec{x_0}) = \vec{0}$$

つまり、

$$f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2) = \vec{0}$$

よって、

$$f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$$

が成り立つ。

（3） $\vec{z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ と置けば、

$$\vec{z} \cdot \vec{x}_0 = 0$$

によって、

$$-X + 2Y + Z = 0$$

が求める方程式である。

（4） $f(\vec{z}_1) = f(\vec{z}_2)$ とすると、f の線形性によって、

$$f(\vec{z}_1 - \vec{z}_2) = \vec{0}$$

が成り立つ。つまり、

$$\vec{z}_1 - \vec{z}_2 \in Ker(f)$$

である。よって、

$$\vec{z}_1 - \vec{z}_2 = k\vec{x}_0$$

と書けるが、

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_0 = 0\text{、及び}\vec{z}_2 \cdot \vec{x}_0 = 0$$

なので、

$$(\vec{z}_1 - \vec{z}_2) \cdot \vec{x}_0 = 0$$

即ち

$$k\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 = 0$$

となり、

$$\vec{x}_0 = \vec{0}$$

となり、これは、矛盾である。◀

問題２－３．

１．f を R^3 から R^3 への線形写像とし、

$$f(\vec{e_1}) = \vec{a}_1, f(\vec{e_2}) = \vec{a}_2, f(\vec{e_3}) = \vec{a}_3$$

とする。ここで、

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。このときに、以下の（１）と（２）は同値であることを示せ。

（１）$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が独立である。

（２）f が逆写像 $g; R^3 \to R^3$ を持つ。

２． R^4 から R^3 への線形写像 $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+u \\ x+2y+z+u \\ x-z+u \end{pmatrix}$ について以下に答えよ。

（１）f の像空間 $\mathrm{Im}(f) = \{f(\vec{x}) \in R^3, \vec{x} \in R^4\}$ の基底 $(bases)$ を一組求めよ。

（２）f の核空間 $Ker(f) = \{\vec{x} \in R^4; f(\vec{x}) = \vec{0}\}$ の基底 $(bases)$ を一組求めよ。

３．R^3 の部分集合 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3; x+y+z=0 \right\}$ について以下に答えよ。

（１）V は R^3 の部分空間であることを示せ。

（２）V の正規直交基底を一組求めよ。

（３）写像 $f : V \to V$ を $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ と定める。f は線形写像であることを示せ。

（４）（２）で求めたの一組の基底を $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ とする。$f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2})$ を $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ を用いて表せ。

3　ベクトル空間

3.1　ベクトル空間の定義

一般に K を実数又は複素数として集合 X が K 上の**ベクトル空間**であるとは、"X の中の任意の要素（元）x, y と任意の K の元 k に対して**加法（足し算）**$x+y$ と**スカラー倍**kx とが定義されていて、次が成り立つ。

$(i)x+y$ が X の中にはいる
$(ii)kx$ が X にはいる"

この定義からもわかるようにベクトル空間の概念は可成り広いものである。例えば、実数全体の集まり、複素数全体の集まり、ある区間で定義された関数の全体、。。。。などたくさんの例が直ぐに思い浮かぶ。勿論、２年生で学んだ平面又は空間の中のいわゆるベクトルもこの仲間に入る。次に、あるベクトル空間 X がある時に、その部分空間の概念を定義する。あるベクトル空間 X が与えられているとして、X の部分集合 Y が**ベクトル部分空間**であるとは、

$(i)x+y$ が Y の中に入いる
$(ii)kx$ が Y に入いる

ことであるとする。次に、ベクトル空間に内積が定義されているとして、その部分空間 Y に対して、Y の**直交補空間**（これは再びベクトル部分空間になる）を定義する。ベクトル空間 X とその部分空間 Y がある時に、部分空間 Y の**直交補空間**$Y^{\perp}$ は

"部分空間 Y の全ての元に直交する X の元全体から出来る集合"

のことであるとする。

例えば、X を平面上のベクトル全体とし、その中で Y を原点を通るある直線を考えてこの直線上の点と原点とを結んで出来るベクトル全体とする。この時に、Y の直交補空間 $Y^{\perp}$ は最初の直線に原点を通り直交する直線を考えて、この直線上の点と原点とを結んで出来るベクトル全体である。

また、ベクトル空間の例としては、今までこの授業で考えてきた連立方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ の解全体は 1 つのベクトル空間の例になっている。

次に、ベクトル空間（又は、部分空間）の**基底（$base$)**について触れておこう。

"ベクトル空間の中に n 個の**一 次 独 立**(定義は後で触れる）な
ベクトルの組 $\{\vec{e_1},...,\vec{e_n}\}$ があってその空間の全ての元が
$\{\vec{e_1},...,\vec{e_n}\}$ の一次結合で書ける"

ときに、$\{\vec{e_1},...,\vec{e_n}\}$ をこの空間の

1つ の 基 底 系 （ $bases$)

と呼び、この

空 間 の 次 元 は n

であるという。

（例）1. n 次元ユークリッド空間 $R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} ; x_j \text{は実数} \right\}$ は、最もよく知られたベクトル空間の例である。

2. 連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解全体は、１つのベクトル空間をなす。

3. ベクトル空間 R^n からベクトル空間 R^m への線形写像 f に対して、$Ker(f)$（核空間）及び $\mathrm{Im}(f)$（像空間）は、それぞれ１つの部分空間をなす。但し、$Ker(f) = \{\vec{x} \in R^n; f(\vec{x}) = \vec{0}\}, \mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in R^m; \vec{y} = f(\vec{x}), \vec{x} \in R^n\}$

4. ベクトル空間 V の元の組 $\{\vec{x_j}\}_{j=1}^n$ に対して、$\{\sum_{j=1}^n c_j\vec{x_j}; c_j \in R\}$ はベクトル空間 V の１つのベクトル部分空間になり、この空間のことを $\{\vec{x_j}\}_{j=1}^n$ で張られる空間と呼ぶ。

5. 実数を係数とする二次関数の全体は１つのベクトル空間であるが、この空間の任意の元（言い換えれば、任意の実係数の二次関数）は、関数 3 つの関数 $\{x^2, x, 1\}$ で書かれ、これらは一次独立である。従って、これらはこの空間の基底であり、次元は３である。

例題3-1. 空間 W を次のように定義する。問に答えよ。

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in R^4;\ \begin{matrix}x_1+x_2+x_3=0\\x_2+x_3+x_4=0\end{matrix}\right.$$

-

（1）空間 W の基底 (base) を一組求めよ

（2）空間 W の直交補空間の直交単位基底 (base) を一組求めよ

（解法） *(1)*. 連立方程式

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

の係数行列 A は

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

であり、その階数 (rank) は２である。従って、解の自由度（自由に選べる解の個数）は４－２＝２である。2 つの方程式から求める解は、

$$x_1=-x_2-x_3, x_4=-x_2-x_3, x_2, x_3; free$$

である。これをベクトルの形で書けば、

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_1-c_2\\x_2\\x_3\\-c_1-c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

となる。この形から一組の base として

$$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\vec{e_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

を選べばよい。

(2). 直交補空間を $W^\perp$ として、$W^\perp$ の元 $\vec{a}$ は $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ とした時に、$(\vec{a}, \vec{e_1}) = (\vec{a}, \vec{e_2}) = 0$ から成分 a, b, c, d は方程式

$$\begin{cases} -a + b - d = 0 \\ -a + c - d = 0 \end{cases}$$

を満たす。この連立方程式の係数行列の rank は 2 であり、前と同様にして、解の自由度は 2 である. 方程式の解は、

$$b = a + d, c = a + d, a, d; free$$

である。従って、

$$\vec{a} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る。従って、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が空間 W の基底系になる。ここで、W の直交基底系を得る為には、以下のようにして、$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の係数 a, d をベクトル $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が、例えばベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に直交するように決める。ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ a+d \\ a+d \\ d \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ との内積が 0 になれば良いので、

$$a + (a + d) + (a + d) = 0$$

から

$$3a+2d=0, d=-\frac{3}{2}a。$$

よって、

$$\vec{a}=a\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}=a'\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-3\end{pmatrix}。$$

以下は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ の長さをそれぞれ１にして

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

が空間 W の１つの直交単位系になる。

（注）上では、$\begin{pmatrix}a\\a+d\\a+d\\d\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ と直交するようにしたが、$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ と直交するように a,d を取れば、別の直交単位系が得られる。◀

例題3-2.$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\12\\-13\end{pmatrix}$ とする。次の問に答えよ。

（１）$\vec{a},\vec{b}$ が張る部分空間 W の直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ。

（２）$\vec{c}=\vec{x}+\vec{y}$, と書け。但し $\vec{x}$ は W の元で、$\vec{y}$ は $W^{\perp}$ の元であるとする。（このことを $\vec{x}\in W, \vec{y}\in W^{\perp}$ とかく）

（解法）*(1)*. $\vec{a},\vec{b}$ で張る空間 W の元は、m,n を任意の実数として、

$$m\vec{a}+n\vec{b}=\begin{pmatrix}4m+n\\m+n\\3n\end{pmatrix}$$

と書けるので、空間 W の直交補空間 $W^{\perp}$ の元 $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は

$$(m\vec{a}+n\vec{b},\vec{x})=0$$

となることから、

$$(4m+n)x+(m+n)y+3nz=0$$

となる。この式が全ての実数 m,n にたいして成立するので、

$$m(4x+y)+n(x+y+3z)=0$$

から $4x+y=0,x+y+3z=0$ が得られ、この連立方程式

$$\begin{cases} 4x+y=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases}$$

は明らかに $rank=2$ で、従って自由に選べる解の個数は 3-2=1 である。実際に解けば、

$$y=-4x,z=x,x;free$$

となり、

$$\vec{x}=c\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる。従って、直交補空間 $W^{\perp}$ の元は $c\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形をしたもの全てからなる空間となる。

(2).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -13 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる k,m,n を求める。連立方程式

$$\begin{cases} 4k+m+n=1 \\ k+m-4n=12 \\ 3m+n=-13 \end{cases}$$

を解いて $k=1, m=-5, n=2$ を得る。よって、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -13 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となって、$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -15 \end{pmatrix}$ は W の元で、$\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の元である。◀

例題*3-3.* 3次元ベクトル空間 R^3 の4つのベクトル

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、

$$L[\vec{x}_1, \vec{x}_2] = L[\vec{x}_3, \vec{x}_4]$$

であることを示せ。但し、$L[\vec{x}, \vec{y}]$ は2つのベクトル $\vec{x}, \vec{y}$ によって張られる部分空間を表す。

（解法）最初に、

$$\vec{x}_3, \vec{x}_4 \in L[\vec{x}_1, \vec{x}_2]$$

が成り立つことを示す。その為には、適当な定数 a,b,c,d に対して

$$\begin{cases} \vec{x}_3 = a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 \\ \vec{x}_4 = c\vec{x}_1 + d\vec{x}_2 \end{cases}$$

が成り立てば良い。詳しく書けば、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 及び $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が成り立てば良い。これらの式が成立するには、方程式

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 1 \quad ...(*) \\ 2b = 1 \end{cases}$$

及び

$$\begin{cases} 2c = -1 \\ c + d = 0 \quad ...(**) \\ 2d = 1 \end{cases}$$

を満たす定数 a, b, c, d が存在すれば良い。

方程式 $(*), (**)$ を解いて、解

$$(a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}), (c = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{2})$$

を得る。従って、

$$\vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$$

及び

$$\vec{x}_4 = -\frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$$

と書ける。

次ぎに、$\vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$ 及び $\vec{x}_4 = -\frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$ から、連立方程式

$$\begin{cases} \vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2 \\ \vec{x}_4 = -\frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2 \end{cases}$$

を $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ について解けば、

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_3 - \vec{x}_4, \vec{x}_2 = \vec{x}_3 + \vec{x}_4$$

つまり、

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L[\vec{x}_3, \vec{x}_4]$$

が成り立つ。以上により、主張が証明出来た。◀

例題3-4.f を R^3 から R^3 への線形写像として、関係式

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}, a \in R$$

が成り立つとする。但し、$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。以下の問に答えよ。

（1）集合 $Ker(f) = \left\{ \vec{x} \in R^3 ; f(\vec{x}) = \vec{0} \right\}$ は R^3 の部分空間であることを示し、その次元と基底を求めよ。

（解法）線形写像 f に対応する行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とすると、条件 $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$

から、関係式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$$

を得る。

従って、

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$$

となる。故に、

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -4 \\ 1 & a-1 & -2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

この行列の行列式の値を計算すると、

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -4 \\ 1 & a-1 & -2 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a^2 - 8a + 12 = (a+3)(a-2)^2$$

となるので、以下の3つの場合に分けて考える。

(i)$a \neq 2, -3$ の場合。$|A| \neq 0$ となるので、行列 A は逆行列 A^{-1} を持ち、連立方程式

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

の解は、$\vec{x} = \vec{0}$ である。従って、この場合は、

$$Ker(f) = \{\vec{0}\}$$

であり、$Ker(f)$ の次元は、0 である。また、基底は、$\vec{0}$ である。

(ii)$a=2$ の場合。この場合は、

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となり、方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考えると、

$$\begin{cases} 2x+2y-4z=0...(1) \\ x+y-2z=0...(2) \\ -x-y+2z=0...(3) \end{cases}$$

明らかに $(1)=2\times(2),(3)=-(2)$ なので、方程式の解は、

$$z=\frac{x+y}{2}, x; free, y; free,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \frac{c_1+c_2}{2} \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となり、$Ker(f)$ は二次元で、2つのベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で張られるベクトル空間になり、基底は、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である。

(iii)$a=-3$ の場合。この場合は、

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

となり、方程式

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考えると、

$$\begin{cases} -3x + 2y - 4z = 0...(1) \\ x - 4y - 2z = 0...(2) \\ -x - y - 3z = 0...(3) \end{cases}$$

明らかに $2 \times (3) - (2) = (1)$ なので、方程式の解は、(2) と (3) を解いて、

$$x = -2z, y = -z, z; free,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_3 \\ -c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、$Ker(f)$ は一次元で、ベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られるベクトル空間になり、基底は、$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。◀

（注意）$Ker(f)$ を、写像 f の核と呼び、線形写像 f に対して、$Ker(f)$ はベクトル空間になる。

3.2 ベクトルの一次独立と一次従属

「定義」n 個のベクトル $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ が**一次独立**であるとは、

"関係式 $c_1\vec{a}_1 + ... + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$が成り立つのは全ての i について $c_i = 0$ の場合に限る"

とする。一次独立でないときに**一次従属**であるという。

即ち、n 個のベクトル $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ が**一次従属**であるとは、

"どれかの i について $c_i \neq 0$ であって、しかも $c_1\vec{a}_1 + ... + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$となっている"

ことである。$c_1\vec{a}_1 + ... + c_n\vec{a}_n$ をベクトル $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ の**一次結合**という。**一次従属**のときには、どれかの i について

$$\vec{a}_i = -\frac{c_1}{c_i}\vec{a}_1 - ... - \frac{c_{i-1}}{c_i}\vec{a}_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}\vec{a}_{i+1} - ... - \frac{c_n}{c_i}\vec{a}_n$$

と書けるので、n 個のベクトル $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ が**一次従属**であるとは、

"どれか１つのベクトルが残りの他のベクトルの一次結合で書ける"

ことである。従って、$\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ が**一次独立**であるとは

"このうちのどの 1 つも残りのベクトルの一次結合で書けない"

ことである。

さて、各ベクトルを $\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ と書くと

$$c_1\vec{a}_1 + ... + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

は

$$c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ a_{n2} \end{pmatrix} + ... + c_j\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix} + ... + c_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

従って、

$$\begin{cases} c_1a_{11} + c_2a_{12} + .. + c_ja_{1j} + .. + c_na_{1n} = 0 \\ c_1a_{21} + c_2a_{22} + .. + c_ja_{2j} + .. + c_na_{2n} = 0 \\ . \\ . \\ c_1a_{n1} + c_2a_{n2} + .. + c_ja_{nj} + .. + c_na_{nn} = 0 \end{cases}$$

と書き直して、これを c_i を未知数とする連立方程式と見ると、この連立方程式が全ての i について $c_i = 0$ となる解だけを持つためには（$resp.$ どれかの i について $c_i \neq 0$ となる解を持つためには）、この連立方程式の係数行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の行列式の値 $|A|$ が 0 にならないことである（$resp.0$ になることである）。

従って、

ベクトル$\vec{a_i} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{pmatrix}, i = 1, ..., n$ が**一次独立（$resp.$一次従属）**である

ことは、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \;(\; resp. = 0)$$

と同じである。

（例）$(1)\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ だから一次独立。

$(2)\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ は、$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0$ だから一次従属。関係式 $\vec{a} + (-2)\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ が成り立つことが容易にわかる。◀

例題3-$5.$ 行列 A を次のように決める。以下の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ a & -1 & a^2 & -1 \\ -a & 1 & -a^2 & -a \end{pmatrix}$$

(1)$|A|$ を計算せよ。

(2) 行列 A の逆行列が存在するための条件をいえ。

(3)$rank(A)=3$ となる条件をいえ。

(4)(3) の条件のもとで、行列 A によって決まる線形写像の核（$kernel$）の基底（$base$）を求めよ。ここで、線形写像 A の核とは、$A\vec{x}=\vec{0}$ となるベクトル $\vec{x}$ のことである。

（解法） *(1)*

$$\begin{vmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ a & -1 & a^2 & -1 \\ -a & 1 & -a^2 & -a \end{vmatrix}$$

$$\overset{(1)+(4)\Longrightarrow(4),(2)+(3)\Longrightarrow(3),(1)+(2)\Longrightarrow(2)}{=} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1-a & 1-a & 1-a \\ a & a-1 & a^2-1 & a-1 \\ -a & 1-a & -a^2-a & -2a \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} 1-a & 1-a & 1-a \\ a-1 & a^2-1 & a-1 \\ 1-a & -a^2-a & -2a \end{vmatrix}$$

$$= a(1-a)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1-a & -a^2-a & -2a \end{vmatrix}$$

$$\overset{[2]-[1]\Longrightarrow[2]}{=} -a(a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1-a & -a^2-a & -2a \end{vmatrix}$$

$$= -a^2(a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-a & -2a \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a+1)$$

(2)(1) から $a \neq 0, \pm 1$（注意；この場合は行列の $rank$ は 4）

$(5)(1)$ から $a=0,\pm 1$ の何れかである。以下順に $rank$ を計算する。

$(i) a=0$ の場合

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\Leftrightarrow(3),(3)\Leftrightarrow(4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(4)\Longrightarrow(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]+[3]\Longrightarrow[2]} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ 。だから、$rank(A)=2$

$(ii) a=1$ の場合

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\Longrightarrow(1)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(3)\Longrightarrow(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]+[2]\Longrightarrow[1],[2]+[3]\Longrightarrow[3],(3)+(4)\Longrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$ 。だから、$rank(A)=$
2

(iii)$a=-1$ の場合。

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)-(2)\Longrightarrow(4)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]+[3]\Longrightarrow[4],[3]+[2]\Longrightarrow[3],[2]+[1]\Longrightarrow[2]}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(3)-(1)\Longrightarrow(3)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)+(1)\Longrightarrow(2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$。

だから、$rank(A) = 3$

$(4)(3)$ から $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ である。今ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$ が行列 A による線形写像の核になっているとすると $A\vec{x} = \vec{0}$ だから

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となって、x, y, z, u は次の連立方程式の解である。

$$\begin{cases} -x + y - z + u = 0 \\ x + y + z + u = 0 \\ -x - y + z - u = 0 \\ x + y - z + u = 0 \end{cases}$$

この連立方程式は係数行列 A の $rank$ が 3 だから自由に選べる解の個数は 1 であり、次の方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} -x + y - z = -u ...(1) \\ x + y + z = -u ...(2) \\ -x - y + z = u ...(3) \end{cases}$$

$(1) + (3)$ から

$$x = 0$$

$(2) + (3)$ から

$$z = 0$$

が簡単にわかり、従って

$$y = -u, u; free$$

もわかる。従って、求めるベクトル

$$\vec{x} = c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる。よって、$Ker(A)$ は１次元でその元は $c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書ける。

だから、基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとればよい。◀

*(***注意）**写像 F の**核（**$Ker(F)$) に対して、写像 F の "**像**" と呼ばれる集合は Im**（**F) と書かれて F(x) 全体を集めたものである。

例題$3-6$ 次の行列 A で決まる R^4 から R^3 への線形写像について以下の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 核の基底を求めよ。

(2) 像の次元を求めよ。

(3)R^4 をユークリッド内積で内積空間とするときに、核の直交補空間の基底を求めよ。

（解法）*(1)*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(2)+(4)\Longrightarrow(2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{[3]-[2]\Longrightarrow[3]}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \overset{[3]\div 3\Longrightarrow[3]}{\rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{[3]-[1]\Longrightarrow[3]}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから行列 A の階数（$rank$) は 2 である。そこで、次の連立方程式は自由に選べる未知数が $4-2=2$ 個あることに注意して、

$$\begin{cases} x-y+2z+u=0 \\ -4y+5z+4u=0 \\ 3x+y+z-u=0 \end{cases}$$

を 2 つの方程式を 2 つの未知数について解く。つまり、

$$\begin{cases} x-y=-2z-u \\ 4y=5z+4u \end{cases}$$

から、

$$y=\frac{5}{4}z+u, x=-\frac{3}{4}z, z, u; free.$$

従って、ベクトルで書くと

$$c_1\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=c_1'\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、求める基底は $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$ の線形写像 A による像を $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ と置くと、

$$\begin{cases} X=x-y+2z+u \\ Y=-4y+5z+4u \\ Z=3x+y+z-u \end{cases}$$

だから、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}+u\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ は明らかであり、また、

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

となるので、３つのベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は一次従属である。実際に、

$$-3 \times \vec{a} + 5 \times \vec{b} + 4 \times \vec{c} = \vec{0}$$

が成り立つ。この中で、例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ は独立だから、像の空間の元は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。k, l は任意の実数である。つまり、像空間の次元は２である。

(5)(1) より、核の基底は $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから、今、核の直交補空間の元（要素）を $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ と置くと、$\vec{e_1} \cdot \vec{a} = \vec{e_1} \cdot \vec{a} = 0$ から、a, b, c, d は連立方程式

$$\begin{cases} -3a + 5b + 4c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

を満たす。ここで、この連立方程式の係数行列は

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、$rank(B) = 2$ になるので、解の自由度 $= 4 - 2 = 2$ となる。従って、上の連立方程式を解けば、解

$$b = \frac{3}{5}a - \frac{4}{5}c, d = -\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}c, a; free, c; free$$

が得られる。よって、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = k' \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + l' \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となり、求める基底は $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ である。◀

（注意） この例題からもわかるように、核の次元と像の次元との和は全体の空間の次元に等しい。

例題 *3-7*

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$

とする。$\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ とで生成される R^3 の部分空間を V とし、$\vec{a}_3$ と $\vec{a}_4$ とで生成される部分空間を $W(a)$ とするときに、$V \cap W(a)$ の空間の次元と基底、 空間 $V + W(a)$ の次元と基底を求めよ。

（解法） $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ は明らかであろう。また、$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ が独立であることも明らかであろう。次に、行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の行列式の値は $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - a$ と計算できる。従って、次の 2 つの場合に分けて考える。

$(i) 2=a$ の場合は、３つのベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ は一次従属で $\vec{a}_4$ が $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ の一次結合で書ける。

$$\vec{a}_4 = 3 \times \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

このときに、$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ が、$\vec{a}_3$ と $\vec{a}_4$ の一次結合で書けることは、殆んど明らかであろう。

従って、

$$V = W(a)$$

となり、

$$V \cap W(a) = V + W(a) = V$$

で、次元は２であり、基底は

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

$(ii) 2 \neq a$ の場合は、３つのベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ は一次独立で $\vec{a}_4$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ の一次結合で書けない。従って、

$$V \cap W(a) = \{c\vec{a}_3 ; c \text{ は任意の実数 }\}$$

となり、その次元は１で、基底は $\vec{a}_3$ である。また、$V + W(a)$ の次元は３であり、基底は

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$

である。◀

例題 *3-8* 行列 A とベクトル $\vec{a}$ が与えられている。この時に、問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の階数 $(rank)$ を求めよ。
(2)$\mathbf{Im}(A)$ の表す空間を求めよ。
(3) ベクトル $\vec{a}$ が $Ker(A^t)$ の元と直交することを示せ。
(4)$A\vec{x}=\vec{a}$ を満たす $\vec{x}$ を求めよ。

(解法） *(1)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{(3)-(1)\Longrightarrow(3)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

だから、階数（rank) は 2 である。

(2)R^3 の勝手なベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の変換 A による像 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ をとすると、

$$\begin{cases} X = x+y+z \\ Y = x-y+z \\ Z = 2x+2z \end{cases}$$

が成り立つ。この連立方程式から

$$\begin{cases} X+Y = 2x+2z \\ Z = 2x+2z \end{cases}$$

が得られるので、

$$X+Y=Z$$

が成り立ち、像空間は平面である。

(3)$A^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ だから、A^t の核 $(Kernel)$ の元 $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は連立方程式

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-y=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

を満たす。この解は

$$y=x, z=-x, x: free$$

であり、ベクトルで書くと

$$\vec{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで、c は任意の実数である。このベクトルが $\vec{a}$ と直交することは、$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\vec{a}$ との内積を考えて計算すると $(\vec{x}, \vec{a}) = 8c - 8c = 0$ だから 2 つのベクトルは直交する。

(4) 連立方程式

$$\begin{cases} x + y + z = 8 ...(1) \\ x - y + z = 0 ...(2) \\ 2x + 2z = 8 ...(3) \end{cases}$$

で $(1) + (2) = (3)$ だから、$(1), (2)$ を解いて、解

$$z = 4 - x, y = 4, x; free$$

が得られる。従って、

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ 4 \\ 4 - c \end{pmatrix}$$

が求める解である。ここで、c は任意の実数を表す。◀

例題$3-9$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$$

が一次独立なとき、

$$\vec{a}_1, \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3, ..., \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$$

も一次独立であることを示せ。

（解法）いま、関係式

$$c_1\vec{a}_1 + c_2(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + c_3(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) + ... + c_n(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n) = \vec{0} ...(1)$$

が成り立つと仮定して、各係数 $c_i, i = 1, 2, ..., n$ について、

$$c_i = 0$$

を示せば良い。式 (1) を変形すると、

$$(c_n + c_{n-1} + ... + c_2 + c_1)\vec{a}_1 + (c_n + c_{n-1} + ... + c_2)\vec{a}_2 + ...(c_n + c_{n-1})\vec{a}_{n-1} + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

が得られる。仮定から、ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ は一次独立だから、関係式

$$\begin{cases} c_n = 0...(1) \\ c_n + c_{n-1} = 0...(2) \\ ---- \\ ---- \\ --- \\ c_n + c_{n-1} + ... + c_2 = 0...(n-1) \\ c_n + c_{n-1} + ... + c_2 + c_1 = 0...(n) \end{cases}$$

が成り立つ。この連立方程式を順に解けば、

$$c_i = 0, i = 1, 2, ..., n$$

が得られて、主張が示された。◀

問題**３－１.**

１．(i) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ の階数 (rank) を求めよ。(ii)(i) で与えた行列 A により定まる R^m から R^n への線形写像を f_A で表す。f_A の像空間 $\mathrm{Im}(f_A)$ の基底 (bases) を一組求めよ。また、f_A の核空間 $Ker(f_A)$ の次元を求めよ。

２．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とベクトル $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ に対して以下に答えよ。

(i) 行列 A の階数 (rank) を答えよ。(ii) 空間 $\mathrm{Im}(A)$ の表す図をかけ。(iii)$\vec{b}$ は、$Ker(A^T)$ の元と直交することを示せ。(iv)$A\vec{x} = \vec{b}$ を満たす $\vec{x}$ を求めよ。

３．$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in R^3$ として、線形写像 $f; R^3 \to R^3$ を、$f(\vec{x}) = 6\vec{x} - (\vec{v}, \vec{x})\vec{v}$ と定義する。以下に答えよ。

(i)$(f(\vec{x}),\vec{v})=0$ を示せ。(ii)$f(\vec{x})=A\vec{x}$ と表したときに、行列 A を求めよ。(iii)f の像空間 $(\mathrm{Im}(f))$ の次元、f の核空間 $(Ker(f))$ の次元を求めよ。(iv)$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\neq\vec{x}\in(\mathrm{Im}(f))$ を満たし、$\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ と直交するベクトル $\vec{x}\in R^3$ が存在するならば求めよ。また、そのようなベクトルが存在しないならば理由を述べよ。

４．R^n が n 次元実ベクトル空間を表すとして、以下に答えよ。

(i) 行列 $A=\begin{pmatrix}0&2&2&1\\2&6&4&3\\1&4&3&2\end{pmatrix}$ の階数 (rank) を求めよ。(ii)(i) で与えた行列 A により定まる R^m から R^n への線形写像を f_A で表す。f_A の像空間 $f_A(R^m)$ の基底 (bases) を一組求めよ。また、f_A の核空間 $f_A^{-1}(0)$ の次元を求めよ。

５．n を１以上の自然数とし、n 個の連続関数 $1,x,x^2,...,x^{n-1}$ の一次結合全体を、$L=L\{1,x,x^2,...,x^{n-1}\}$ と表す。線形写像 T を $T;f\in L\to f'\in L$ で表す。以下に答えよ。

(i)$1,x,x^2,...,x^{n-1}$ は、一次独立であることを示せ。(ii)$Ker(T),\mathrm{Im}(T)$ を求め、それぞれの次元を答えよ。

６．R^3 の部分集合 $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3;x+y+z=0\right\}$ について以下に答えよ。

(i)V は R^3 の部分空間であることを示せ。(ii) V の正規直交基底を一組求めよ。(iii) 写像 $f:V\to V$ を $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\z\\x\end{pmatrix}$ と定める。f は線形写像であることを示せ。(iv)(ii) で求めたの一組の基底を $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ とする。$f(\vec{e}_1),f(\vec{e}_2)$ を $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ を用いて表せ。

７．R^4 から R^3 への線形写像 $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+u\\x+2y+z+u\\x-z+u\end{pmatrix}$ について以下に答えよ。

(i) f の像空間 $\mathrm{Im}(f)=\{f(\vec{x})\in R^3,\vec{x}\in R^4\}$ の基底 $(bases)$ を一組求めよ。(ii) f の核空間 $Ker(f)=\{\vec{x}\in R^4;f(\vec{x})=\vec{0}\}$ の基底 $(bases)$ を一

組求めよ。

8. f を R^3 から R^3 への線形写像とし、

$$f(\vec{e_1}) = \vec{a}_1, f(\vec{e_2}) = \vec{a}_2, f(\vec{e_3}) = \vec{a}_3$$

とする。ここで、

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。このときに、以下の(i)と(ii は同値であることを示せ。

(i) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が独立である。(ii) f が逆写像 $g : R^3 \to R^3$ を持つ。

4 固有値と固有ベクトル

4.1 内積

ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ で各 x_i は実数または複素数とする。この時、内積を次で定義する。

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j = \vec{y}^* \vec{x},$$

$\vec{y}^* = {}^t\ \bar{y} = (\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n).$

内積は $\vec{x} \cdot \vec{y}$ と書くこともある。内積の主な性質は以下のようである。

(1)$(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = |\vec{x}|^2$

(2)$(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$

(3)$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$

4.2 固有値と固有ベクトル

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ . & ... & . \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対して

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}(\vec{x}\neq\vec{0})...(4.1)$$

を満たす $\lambda,\vec{x}$ をそれぞれ行列 A の固有値、固有ベクトルという。

(4.1) は

$$(A-\lambda E_n)\vec{x}=\vec{0}...(4.2)$$

と同じである。但し、$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ でこれは n 次の単位行列とよばれる。

さて、（4. 2）が解 $\vec{x}=\vec{0}$ 以外の解を持つためには連立方程式（4.2）が type 2）～4）の形にならないといけない。従って λ は次の方程式の解でなければいけない。

$$|A-\lambda E_n|=0...(4.3)$$

この λ についての n 次方程式を行列 A の**特性方程式（固有方程式）**という。

（注意）上の方程式 (4. 1) 又は、（4. 2）を詳しく書くと、以下のようになる。

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+....+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+....+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad .... \\ \qquad\qquad .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+(a_{nn}-\lambda)x_n=0 \end{cases} ...(4.4)$$

実際の問題を解くときには、この式から書き始めるのが良い。

更に、（4.3）は以下になる。

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & -- & -- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & -- & -- & a_{2n} \\ . & . & -- & -- & . \\ . & . & -- & -- & . \\ a_{n1} & a_{n2} & -- & -- & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0...(4.5)$$

4.3 固有値、固有ベクトルの性質

以下行列を $A=(a_{ij})$ と簡単に書き表すことにする。$A=(a_{ij})$ に対して $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$ とする。但し $\bar{a}_{ij}$ は複素数 a_{ij} の複素共役を表す。また、$A=(a_{ij})$ に対して ${}^tA=(a_{ji})$ と書いて行列 A の**転置行列**という。次に $A^*={}^t\bar{A}$ とする。行列 A が $A^*=A$ を満たす時に A は**エルミート行列**という。成分を実数に限ればエルミート行列であることは、行列が**対称行列**であることと同じである。

「性質１」行列Aがエルミート行列ならばその固有値は実数である。

（証明）行列 A はエルミート行列であるとし、$A\vec{x}=\lambda\vec{x}(\vec{x}\neq\vec{0})$ と仮定する。$(\vec{x},\lambda\vec{x})=(\vec{x},A\vec{x})=(A\vec{x})^*\vec{x}=\vec{x}^*A^*\vec{x}=\vec{x}^*A\vec{x}$(行列 A がエルミート行列だから）$=\vec{x}^*\lambda\vec{x}=\lambda\vec{x}^*\vec{x}=\lambda(\vec{x},\vec{x})$ ところが、$(\vec{x},\lambda\vec{x})=(\lambda\vec{x})^*\vec{x}=$

$\bar{\lambda}\vec{x}^*\vec{x}=\bar{\lambda}(\vec{x},\vec{x})$。よって、$\bar{\lambda}(\vec{x},\vec{x})=\lambda(\vec{x},\vec{x})$ が成り立つ。$\vec{x}\neq\vec{0}$ だから $\bar{\lambda}=\lambda$ となって λ は実数になる。

「性質２」行列Aがエルミート行列ならば次が成り立つ。$A\vec{x}=\lambda\vec{x},A\vec{y}=\mu\vec{y},\lambda\neq\mu$ならば$(\vec{x},\vec{y})=0$. 従って、ベクトル$\vec{x},\vec{y}$は一次独立である。

（証明）$(\lambda\vec{x},\vec{y})=(A\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},A^*\vec{y})$（check すること）

$=(\vec{x},A\vec{y})=(\vec{x},\mu\vec{y})=\bar{\mu}(\vec{x},\vec{y})=\mu(\vec{x},\vec{y})$（$\mu$ が実数だから）, また $(\lambda\vec{x},\vec{y})=\lambda(\vec{x},\vec{y})$ なので、$\lambda(\vec{x},\vec{y})=\mu(\vec{x},\vec{y})$ となる。従って、$\lambda\neq\mu$ ならば $(\vec{x},\vec{y})=0$ となり証明ができた。

（check　point）$(\vec{x},A^*\vec{y})=(A^*\vec{y})^*\vec{x}=(\vec{y})^*(A^*)^*\vec{x}=(\vec{y})^*A\vec{x}=(A\vec{x},\vec{y})$

「性質３」一般には、異なる固有値に対する固有ベクトルはお互いに一次独立である。

（１）２個の場合。$A\vec{x}=\lambda\vec{x},A\vec{y}=\mu\vec{y},\lambda\neq\mu$ として、$\vec{y}=c\vec{x}$ とする。A（ｃ$\vec{x}$）$=\mu$(ｃ$\vec{x}$) だから $cA\vec{x}=c\mu\vec{x}$、一方では、$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ から $cA\vec{x}=c\lambda\vec{x}$ よって $c\mu\vec{x}=c\lambda\vec{x}$ だから $\lambda\neq\mu$ ならば $c=0$.

（２）３個の場合。$A\vec{x}=\lambda\vec{x},A\vec{y}=\mu\vec{y},A\vec{z}=\nu\vec{z},\lambda\neq\mu,\lambda\neq\nu,\mu\neq\nu$ とし、$\vec{z}=c_1\vec{x}+c_2\vec{y}$ とする。

(i)$c_1\neq0,c_2=0$、または $c_2\neq0,c_2=0$ の時には、（１）の場合から $\lambda=\nu$ または $\mu=\nu$ となりいずれも矛盾。

(ii)$c_1\neq0,c_2\neq0$ とすると $A(c_1\vec{x}+c_2\vec{y})=\nu(c_1\vec{x}+c_2\vec{y})$ から $c_1A\vec{x}+c_2A\vec{y}=c_1\nu\vec{x}+c_2\nu\vec{y}$ よって $c_1\lambda\vec{x}+c_2\mu\vec{y}=c_1\nu\vec{x}+c_2\nu\vec{y}$が成り立つ。従って、$c_1(\lambda-\nu)\vec{x}=c_2(\mu-\nu)\vec{y}$ これは矛盾。

以下同じように証明される。

「性質 *4*」以上のことから、特に、行列Aが実数を成分とする対称行列の時には、$A^* = {}^t A = A$ となって上の「性質１」、「性質２」から全ての固有値は実数になってしかも異なる固有値に対応する固有ベクトルはお互いに直交している。

その時には、各固有ベクトル $\vec{X}_j (j = 1, ..., n)$ の長さが 1 になるようにしておけば

$$
\begin{aligned}
(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= 1 (i = j) \\
&= 0 (i \neq j)
\end{aligned}
$$

となる。この時に、行列 P を次のように決めると P は $P^t P = E_n$ を満たしいわゆる直交行列になる。

$$P = (\vec{X}_1, ..., \vec{X}_n)$$

一般に $T^* T = E_n$ となる行列 T をユニタリ行列という。直交行列 P 及びユニタリ行列 T の逆行列はそれぞれ ${}^t P$、T^* であることは明らかであろう。

（注意）固有値に重解になるものが含まれる時には、上の議論はそのまま適要できないので少し工夫が必要であり、また、場合によっては対角化できないこともある。一般に、対称行列は対角化できることが、知られている。

4.4 実際の計算

以下例題で具体的な問題の解法の手順を説明する。

例題 *4-1* 次の行列の固有値、固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（解法）先ずこの行列は対称行列であることに注意しておこう。この場合 (4.2) は、

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ...(*)$$

となり、

$$A-\lambda E_3=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

である。従って、固有方程式 $|A-\lambda E_3|=0$ は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

となる。以下サラスの方法で展開して、$-\lambda^3+3\lambda+2=0$ を解けばよい。

それには $f(\lambda)=\lambda^3-3\lambda-2$ とおいて $f(-1)=0$ に注意して因数定理を用いると

$$f(\lambda)=\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

と因数分解できるので固有値は

$$\lambda=2,\lambda=-1\,(\text{重解})$$

である。

行列式の性質を用いて以下のように計算しても良い。$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda-1 & 0 \\ 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$

$=(\lambda+1)^2(2-\lambda)$

次に各固有値に対する固有ベクトルを求める。

(i)$\lambda=2$ に対する固有ベクトルは ($*$) で $\lambda=2$ を代入すると

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。これから x, y, z は次の連立方程式の解となる。

$$\left\{\begin{array}{c} -2x+y+z=0...(1) \\ x-2y+z=0....(2) \\ x+y-2z=0....(3) \end{array}\right.$$

$$(1)+(2)=-(3)$$

だから例えば

$$\left\{\begin{array}{c} -2x+y+z=0...(1) \\ x-2y+z=0....(2) \end{array}\right.$$

を解けば良い。それには未知数 z を右辺に移項して

$$\left\{\begin{array}{c} -2x+y=-z...(1') \\ x-2y=-z...(2') \end{array}\right.$$

を未知数 x, y について解く。これから、

$$x=z, y=z, z; free$$

の解を持つ。従ってベクトルで表せば

$$\vec{x}_1=\left(\begin{array}{c} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{array}\right)$$

が固有ベクトルになる。

(ii)$\lambda=-1$ に対する固有ベクトルは（$*$）で $\lambda=-1$ を代入すると

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

となる。これから x, y, z は次の連立方程式の解となる。

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=0...(1) \\ x+y+z=0....(2) \\ x+y+z=0....(3) \end{array}\right.$$

これは明らかに方程式は

$$x+y+z=0$$

１つだけなので、解は例えば、

$$x=-y-z, y; free, z; free$$

となる。これをベクトルで書けば

$$\vec{x}_2=\begin{pmatrix} -c_2-c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

となる。◀

問題．４．１

１．次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

（１）$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$固有値の和と績（２）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

（３）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

（４）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$固有値に対する固有空間、その基底

（５）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$固有値と A^{-1}

２．$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$のときに、以下に答えよ。

（１）行列 A の固有多項式を求めよ。

（２）行列 A の固有値、固有ベクトルを求めよ。

（３）$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$をAの固有ベクトルで表せ。

（４）$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$、$n=1,2,...$ を n で表せ。

5　行列の対角化とその応用

5.1　行列の対角化

与えられた行列 A について前節の方法で固有値と固有ベクトルを求める。

$$A\vec{x}_j = \lambda_j \vec{x}_j, j = 1, ..., n...(5.1)$$

次に、これらの固有ベクトルを用いて行列 P を以下のように決める。

$$P = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)...(5.2)$$

つまり求めた固有ベクトルを左から順に並べて出来る行列を P とする。（その為には n 個の固有ベクトルが必要である。）

そこで n 個の関係式（5.1）を上で作った行列 P と下で決める行列 D を用いて表すと

$$AP = A(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n) = PD...(5.3)$$

となることがわかる。ここで、行列 D は次で与えられる対角行列である。

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0... & \lambda_n \end{pmatrix} ...(5.4)$$

（5.1）から $A(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n) = (\lambda_1 \vec{x}_1, ..., \lambda_n \vec{x}_n) = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0... & \lambda_n \end{pmatrix} =$ PD となるからである。（5.3）でもしも行列 P が正則で（$|P| \neq 0$）あるならば P の逆行列 P^{-1} があるのでそれを左から両辺にかけると

$$P^{-1}AP = D \;(D \text{ は対角行列})...(5.5)$$

となる。このことを**行列の対角化**という。以下に具体的な例題でその手順を示す。

行列の対角化の例題　例題 *5-1.* 与えられた行列を対角化せよ。

(1)$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　**（解法）**[1] 最初に固有値と固有ベクトルを求める。この場合に (5.1) を当てはめると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ...(*)$$

となるような $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 及び実数 λ を求めることになる。$(*)$ を書き直すと、ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は、方程式

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ...(**)$$

の解で、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることになる。方程式 $(**)$ が、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるような解を持つには、連立方程式 $(**)$ の係数行列の行列式がゼロになることから、先ず固有値 λ は固有方程式

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

の解である。

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

だから、固有値は

$$\lambda = 1, 2, 3$$

である。次に各固有値に対応する固有ベクトルを順次求める。
(i)$\lambda = 1$ のときは連立方程式 $(**)$ が

$$\left\{ \begin{array}{c} -z = 0 ...(1) \\ x + y + z = 0 ...(2) \\ 2x + 2y + 2z = 0 ...(3) \end{array} \right.$$

であり、$(3) = 2 \times (2)$ だから、解は $(1), (2)$ から

$$y = -x, z = 0, y; free$$

となる。これをベクトルで表すと

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii)$\lambda = 2$ のときは連立方程式 $(**)$ が

$$\left\{ \begin{array}{c} -x - z = 0 ...(1) \\ x + z = 0 ...(2) \\ 2x + 2y + z = 0 ...(3) \end{array} \right.$$

であり、$(2) = -(1)$ だから、解は $(1), (3)$ から

$$x = -z, y = \frac{z}{2}, z; free$$

となる。これをベクトルで表すと

$$\vec{x_2} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ \frac{c_2}{2} \\ c_2 \end{pmatrix} = \acute{c}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iii)$\lambda = 3$ のときは連立方程式 $(**)$ が

$$\left\{ \begin{array}{c} -2x - z = 0 ...(1) \\ x - y + z = 0 ...(2) \\ 2x + 2y = 0 ...(3) \end{array} \right.$$

であり、$(1)+(2)=-\frac{1}{2}\times(3)$ だから、解は $(1),(2)$ から

$$x=-y, z=2y, y; free$$

となる。これをベクトルで表すと

$$\vec{x_3}=\begin{pmatrix}-c_3\\c_3\\2c_3\end{pmatrix}=c_3\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

[2] 上の任意に取れる定数 $c_i(i=1,2,3)$ を全て 1 として固有ベクトルを順に左から並べて行列 P を作ると

$$P=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}$$

となる。先に説明したようにこの時に、

$$P^{-1}AP=D$$

但し、

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

となる。また念の為に行列 P の逆行列 P^{-1} を計算してみると

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&\frac{1}{2}\\-1&-1&0\\1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

となる。◀

(2) $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ **(解法)** [1] 上の例題と同じように、方程式 $\begin{pmatrix}2-\lambda&0&1\\0&2-\lambda&-1\\1&-1&1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ...($*$) の解で、$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\neq$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるようにする。この方程式（$*$）が、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるような解を持つには、連立方程式（$*$）の係数行列 $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ の行列式がゼロになることから、先ず固有値 λ は固有方程式

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

を満たす。

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

となり固有値

$$\lambda = 0, 2, 3$$

である。次に各固有値に対応する固有ベクトルを順次求める。
(i)$\lambda = 0$ のときは連立方程式（ $*$ ）が

$$\begin{cases} 2x + z = 0 ...(1) \\ 2y - z = 0 ...(2) \\ x - y + z = 0 ...(3) \end{cases}$$

で、$(1) - (2) = \frac{1}{2} \times (3)$ となり、解は

$$x = y, z = 2y, y; free$$

となる。これをベクトルで表すと

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ - \\ 2 \end{pmatrix}。$$

ここで特に、$|\vec{x}_1|=1$ となるように $c_1=\frac{1}{\sqrt{6}}$ と取る。この時に、

$$\vec{X}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

と書く。

(ii)$\lambda=2$ のときは連立方程式（$*$）が

$$\left\{\begin{array}{c} z=0...(1)\\ -z=0...(2)\\ x-y-z=0...(3)\end{array}\right.$$

で、$(1)=-(2)$ となり、解は

$$x=y,z;free$$

となる。これをベクトルで表すと

$$\vec{x}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}。$$

ここで特に、$|\vec{x}_2|=1$ となるように $c_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ と取る。この時に、

$$\vec{X}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

と書く。

(iii)$\lambda=3$ のときは連立方程式（$*$）が

$$\left\{\begin{array}{c} -x+z=0...(1)\\ -y-z=0...(2)\\ x-y-2z=0...(3)\end{array}\right.$$

で、$(2)-(1)=(3)$ となり、解は

$$x=z,y=-z,z;free$$

となる。これをベクトルで表すと

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} c_3 \\ -c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

ここで特に、$|\vec{x}_3| = 1$ となるように $c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ と取る。この時に、

$$\vec{X}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書く。

[2] 上の固有ベクトル $\vec{X}_i (i = 1,2,3)$ を順に左から並べて行列 T を作ると

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

となる。この行列 T は先の説明により直交行列である。$(T^tT = E_3)$

従ってこの場合は

$${}^tTAT = D$$

が成り立つ。但し、

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。◀

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **（解法）**[1] 固有値と固有ベクトルを求める。

先ず固有値は固有方程式

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

から

$$(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$$

となり固有値は

$$\lambda=1\,(\text{重解}),2$$

である。次に各固有値に対応する固有ベクトルを順次求める。
(i)$\lambda=1$ のときは連立方程式が

$$\begin{cases} x-y+z=0...(1) \\ z=0...(2) \\ -x+y-z=0...(3) \end{cases}$$

で、$(1)=-(3)$ となり、解は

$$x=y,z=0,y;free$$

となる。これをベクトルで表すと

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii)$\lambda=2$ のときは連立方程式が

$$\begin{cases} -y+z=0...(1) \\ -y+z=0...(2) \\ -x+y-z=0...(3) \end{cases}$$

で、$(1)=(2)$ となり、解は

$$z=y,x=0,y;free$$

となる。これをベクトルで表すと

$$\vec{x}_2=c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この場合固有ベクトルが 2 個しかなく行列 P が作れないので対角化は出来ない。◀

（4）$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ **（解法）**[1] 最初に固有値と固有ベクトルを求める。先ず固有値は固有方程式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -1\\ 2 & -2-\lambda & 2\\ -1 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

から

$$(\lambda-2)^2(\lambda+4)=0$$

となり固有値は

$$\lambda=2\,(\text{重解})、-4$$

である。次に各固有値に対応する固有ベクトルを順次求める。

(i)$\lambda=-4$のときは連立方程式が

$$\begin{cases}5x+2y-z=0...(1)\\ 2x+2y+2z=0...(2)\\ -x+2y+5z=0...(3)\end{cases}$$

で、$(1)-2\times(2)=-(3)$ となり、解は

$$x=z, y=-2z, z; free$$

となる。これをベクトルで表すと

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}c_1\\ -2c_1\\ c_1\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}。$$

ここで特に、$|\vec{x}_1|=1$ となるように $c_1=\frac{1}{\sqrt{6}}$ と取る。この時に、

$$\vec{X}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

と書く。

(ii)$\lambda=2$ のときは連立方程式が

$$\begin{cases} -x+2y-z=0...(1) \\ 2x-4y+2z=0...(2) \\ -x+2y-z=0...(3) \end{cases}$$

で、$(1)=(3),(2)=-2\times(3)$ となり、解は

$$z=-x+2y, x, y; free$$

となる。これをベクトルで表すと

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ -c_2+2c_3 \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}。$$

となるが、ここで、

$$\vec{x_2}=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x_3}=c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と置くと、ベクトル $\vec{x_1}$ はベクトル $\vec{x_2}$、$\vec{x_3}$ のどちらにも直交しているが、$\vec{x_2}$ と $\vec{x_3}$ は直交していない。そこで、先ず $\vec{x_2}$ の長さが１になるように $c_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ として

$$\vec{X_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

おき、次にベクトル $\vec{x_3}$ の替わりに $\lambda=2$ の固有ベクトルで $\vec{x_2}$ に直交する単位ベクトルを次の何れかの手順で作る。

「手順１」ベクトル $m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ n \\ -m+2n \end{pmatrix}$ がベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交すれば良いのだから２つのベクトルの内積が０になるように m,n を決めればよい。だから、m,n は

$$m+(m-2n)=0$$

即ち

$$m = n$$

であればよい。だから求めるベクトルは

$$m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。これを長さ１にするには $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とすれば良いから

$$\vec{X_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶ。

「手順２」ベクトル $\vec{x_3}$ とベクトル $\vec{x_2}$ からベクトル $\vec{x_2}$ に垂直なベクト

ルを作る幾何学的な方法（幾何の得意な人はこの方法で）。先ず、ベクトル $\vec{x_3}$ のベクトル $\vec{x_2}$ への

$$\text{正射影の長さ} = |\vec{x_3}|\cos\theta(\text{ここで}\theta\text{は}2\text{つのベクトルのなす角})$$

$$= |\vec{x_3}|\frac{(\vec{x_3}, \vec{x_2})}{|\vec{x_3}||\vec{x_2}|} = \frac{(\vec{x_3}, \vec{x_2})}{|\vec{x_2}|},$$

だから、

$$\text{ベクトル}\vec{x_3}\text{のベクトル}\vec{x_2}\text{への正射影}$$

$$= \frac{(\vec{x_3}, \vec{x_2})}{|\vec{x_2}|}\frac{\vec{x_2}}{|\vec{x_2}|} = \frac{(\vec{x_3}, \vec{x_2})}{|\vec{x_2}|^2}\vec{x_2}\text{。}$$

従ってベクトル

$$\vec{x_3} - \frac{(\vec{x_3}, \vec{x_2})}{|\vec{x_2}|^2}\vec{x_2}$$

が、ベクトル $\vec{x}_2$ に垂直なベクトルであり、求めるベクトルである。今の場合は、上の (ii) で定数 c_1、c_2 をいずれも 1 にすると $|\vec{x}_2| = \sqrt{2}, (\vec{x}_3, \vec{x}_2) = -2$ なので、

$$\vec{x}_3 - \frac{(\vec{x}_3, \vec{x}_2)}{|\vec{x}_2|^2}\vec{x}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる。以下は「手順１」と同様に長さを１にすれば良い。

以上の結果によって３つのベクトル

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られた。これらの３つのベクトルを左から順に並べて T を作る。即ち、

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

と置く。この時に前に述べたことから行列 T は直交行列（つまり $T{}^tT = E_3$）になっている。

この行列 T を用いて

$${}^tTAT = D$$

と出来る。但し、行列 D は

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

である。◀

（注意）上の例題で「手順２」で示した方法は、シュミットの方法と呼ばれている。この方法は、ベクトルの個数が増えた場合にも適用され

る。以下に示しておこう。ベクトル $\{x_i\}_{i=1}^N$ から、正規直交系（ここで、正規とはそれぞれのが 1 であることをいい、直交系とはお互いのベクトルが直交することである）$\{X_i\}_{i=1}^N$ を作る方法.

以下で示すような手順で $\{X_i\}_{i=1}^N$ を作る。

(1)$X_1=\frac{x_1}{|x_1|}$,

(2)$x'_2=x_2-(x_2,X_1)X_1, X_2=\frac{x'_2}{|x'_2|}$

(3)$x'_3=x_3-(x_3,X_1)X_1-(x_3,X_2)X_2, X_3=\frac{x'_3}{|x'_3|}$

(j)$x'_j=x_j-\sum_{k=1}^{j-1}(x_j,X_k)X_k, X_j=\frac{x'_j}{|x'_j|}$

(n)$x'_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}(x_n,X_k)X_k, X_n=\frac{x'_n}{|x'_n|}$

問題 *5-1* 次の行列を対角化せよ。

（1）$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ T も（2）$\begin{pmatrix}1 & 6\\ 6 & 6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 直交行列 T で

（3）$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -4\\ -5 & 4 & -8\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ P も

（4）$\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ 0を固有値に持つような a に対して

（5）$\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ 正則行列 P で、固有値・固有ベクトルも

5.2　対角化の応用

「1」A^n の計算　例題. 次の行列 A について A^n を計算せよ。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

（解法） すでに**例題** *5-1(1)* でやってあるようにこの行列 A は行列 $P=$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ によって次のように対角化されている。$P^{-1}AP = D$.

但し、$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$。

上の結果から $A = PDP^{-1}$ となるので、

$$A^n = (PDP^{-1})^n$$

$$= (PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1}) = PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1}$$

$$= PDD...DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{1+n} - 3^n & -1 + 2^{1+n} - 3^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}3^n \\ -2^n + 3^n & 1 - 2^n + 3^n & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n \\ -2^{1+n} + 2 \cdot 3^n & -2^{1+n} + 2 \cdot 3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

◀**（類題）**次の行列の n 乗を計算せよ。$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

「２」二次曲線の標準化　例題． 次の二次曲線は何を表すか。

$$x^2-2y^2+4xy=1$$

（解法） 二次形式 x^2-2y^2+4xy はベクトルと行列を用いて次のように書ける。

$$x^2-2y^2+4xy=(x,y)\begin{pmatrix}1&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}={}^t\vec{x}A\vec{x}。$$

但し、ここでは

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&-2\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

と置いた。

　以下では、行列 A の固有値、固有ベクトルを求めて、直交行列による対角化を行う。

　先ず、固有値は固有方程式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&-2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda-2)(\lambda+3)=0$$

から求める固有値は

$$\lambda=2,-3$$

となり、

　$\lambda=2$ の時の固有ベクトルの満たす連立方程式は

$$\begin{cases}-x+2y=0\\2x-4y=0\end{cases}$$

であり、従って固有ベクトルは

$$\vec{x}_1=c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

となる。

同様に、$\lambda = -3$ の時の固有ベクトルの満たす連立方程式は

$$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

であり、従って固有ベクトルは

$$\vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる。それぞれの固有ベクトルの長さが 1 になるように $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ と選んで、それらを左から順に並べて求める直交行列 T は

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

となる。この時に、

$$cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となる角度を θ とおけば、行列 T は

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となり、原点の周りの角度 θ だけの回転を表すことに注意しておく。さて、ここで、$\vec{x} = T\vec{X}$ 詳しくいえば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

の変数変換をおこない x, y の二次形式 ${}^t\vec{x}A\vec{x}$ を X, Y の二次形式に変換する。

$${}^t\vec{x}A\vec{x} = 1$$

に $\vec{x} = T\vec{X}$ を代入すれば、

$${}^t(T\vec{X})AT\vec{X} = 1$$

となるが、関係式 ${}^t(T\vec{X}) = {}^t\vec{X}{}^tT$ を用いると

$$ {}^t\vec{X}{}^tTAT\vec{X} = 1 $$

となるが、ここで

$$ {}^tTAT = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} $$

であることに注意すると X, Y の二次形式としては、

$$ 2X^2 - 3Y^2 = 1 $$

となることがわかる。従って、この曲線は双曲線であることがわかる。◀

（注意）二次形式 $ax^2 + 2hxy + by^2$ を標準形に直すのに、変数変換

$$ \begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases} $$

を行い、X, Y の二次形式に変換すると、

$$ ax^2 + 2hxy + by^2 $$

$$ = a(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + 2h(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) + b(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 $$

$$ = (a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta)X^2 $$

$$ +(a\sin^2\theta - 2h\cos\theta\sin\theta + b\cos^2\theta)Y^2 $$

$$ +(-2a\cos\theta\sin\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta))XY $$

これを

$$ AX^2 + 2HXY + BY^2 $$

と書くと、

$$
\begin{aligned}
A &= a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta \\
&= a\frac{1+\cos 2\theta}{2} + h\sin 2\theta + b\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\
&= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\theta + h\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= a\sin^2\theta - 2h\cos\theta\sin\theta + b\cos^2\theta \\
&= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\cos 2\theta - h\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2H &= -2(a-b)\cos\theta\sin\theta + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
&= -(a-b)\sin 2\theta + 2h\cos 2\theta
\end{aligned}
$$

が得られて、関係式

$$
\left\{
\begin{aligned}
A+B &= a+b, \\
AB-H^2 &= ab-h^2
\end{aligned}
\right.
$$

が成立する。いま特に、

$$H = 0$$

となるように角度 θ を選ぶには、

$$
\begin{aligned}
-(a-b)\sin 2\theta + 2h\cos 2\theta = 0, \\
(a-b)\sin 2\theta = 2h\cos 2\theta, \\
\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}
\end{aligned}
$$

となる角度を選ぶ。そのときに、A, B は二次方程式

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - h^2 = 0$$

の解であり、それは、行列の形で書けば

$$
\begin{vmatrix} a-\lambda & h \\ h & b-\lambda \end{vmatrix} = 0
$$

となり、それは、行列 $\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ の固有値である。◀

（類題）1. 次の二次形式で表される曲線は何か答えよ（1）$2x^2+5y^2-4xy=3$（2）$3x^2+5y^2+2\sqrt{3}xy-4\sqrt{3x}+4y=1$

2. 二次の正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が直交行列であるための条件をいえ。

「3」二次曲面の標準化　例題. 次の二次形式で表される二次曲面は何か。

$$2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz=1$$

(解法） 前の例題と同様にして二次形式 $2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz$ は行列 A とベクトル $\vec{x}$ を用いると

$$2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz={}^t\,\vec{x}A\vec{x}$$

と書ける。但し、行列 A とベクトル $\vec{x}$ は次の式でで定義する。

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

既に、**例題** *5-1(2)* で見るようにこの対称行列 A は直交行列 T によってのように対角化されている。

$${}^tTAT=D$$

但し、

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

そこで、前の例題のように変数変換 $\vec{x}=T\vec{X}$ 詳しくいえば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

を行い x, y, z ついての二次形式

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz = ^t \vec{x} A \vec{x}$$

を X, Y, Z に関する二次形式に変換する。

$$^t\vec{x}A\vec{x} = 1$$

に $\vec{x} = P\vec{X}$ を代入して、

$$^t(T\vec{X})A(T\vec{X}) = 1$$

から

$$^t\vec{X}^tTAT\vec{X} = 1$$

を得るが、

$$^tTAT = D$$

を代入して

$$^t\vec{X}D\vec{X} = 1$$

となる。従って、X, Y, Z に関する二次形式として

$$2Y^2 + 3z^2 = 1$$

となり、元の曲面は楕円柱であることがわかった。◀

（類題）次の二次形式で表される曲面は何か。**１．** $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2xz = 1$　**２．** $-x^2 - y^2 - z^2 + 4xy + 4yz + 4xz = 1$

「４」連立微分方程式への応用　例題．次の連立微分方程式を解け。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases}$$

（解法）上の連立微分方程式は次のベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ を用いて次のように表される。

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

この行列 A は既に「２」の例題で次のように対角化されていることに注意する。

$$ {}^tTAT = D, T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}. $$

ここで、そこと同様に $\vec{x} = T\vec{X}$ 詳しくいえば

$$ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} $$

の変数変換を行うと、$\vec{x}$ に関する微分方程式は $\vec{X}$ に関する微分方程式として

$$ T\frac{dX}{dt} = AT\vec{X} $$

が得られる。この両辺に左から ${}^tT$ を掛けて

$$ \frac{dX}{dt} = {}^tTAT\vec{X} = D\vec{X} $$

即ち

$$ \begin{cases} \frac{dX}{dt} = 2X \\ \frac{dY}{dt} = -3Y \end{cases} $$

が得られる。

　この方程式は

$$ X = c_1e^{2t}, Y = c_2e^{-3t} $$

の解を持つ。

　従って変換の式

$$ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} $$

に

$$ X = c_1e^{2t}, Y = c_2e^{-3t} $$

を代入すると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1e^{2t} + c_2e^{-3t} \\ c_1e^{2t} - 2c_2e^{-3t} \end{pmatrix}$$

となって解が求まった。◀

（注意）連立微分方程式 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - x = 2y ...(1) \\ \frac{dy}{dt} + 2y = 2x ...(2) \end{cases}$ 次の方法でも解ける。(1) から $y = \frac{1}{2}(\frac{dx}{dt} - x)$ として (2) に代入すると、$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\frac{dx}{dt} - x) + 2\frac{1}{2}(\frac{dx}{dt} - x) = 2x$ これから x に関する二階の微分方程式 $\frac{d^2x}{dx^2} + \frac{dx}{dt} - 6x = 0$ を得る。この二階線形同次微分方程式は特性方程式 $\rho^2 + \rho - 6 = 0$ から $\rho = 3, -2$ を得て $x = c_1e^{-3t} + c_2e^{2t}$ の解を持つ。$y = \frac{1}{2}(\frac{dx}{dt} - x)$ に $x = c_1e^{-3t} + c_2e^{2t}$ を代入すれば $y = -2c_1e^{-3t} + \frac{c_2}{2}e^{2t}$ を得る。

（類題）次の連立微分方程式を解け。$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$

[5] 図形への応用　例題. 立体 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ を平面 $\sqrt{2}x + 5z = 0$ で切った切り口の図形は何を表すか答えよ。

（解法）平面

$$\alpha{:}\sqrt{2}x + 5z = 0$$

の

法線ベクトルは $(\sqrt{2}, 0, 5)$

であるがこれを単位ベクトルに直して

$$\vec{e_1} = (\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, 0, \frac{5}{3\sqrt{3}})$$

とおく。次に α 上にこの $\vec{e_1}$ に直交していて互いに直交する単位ベクトルを選ぶ。例えば、

$$\vec{e_2} = (0, 1, 0), \vec{e_3} = (\frac{5}{3\sqrt{3}}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}})$$

（これの求め方は以下の注意を見よ）

（注意）一般に空間の平面の方程式 $lx+my+nz=p$ に対してベクトル (l,m,n) はこの平面の法線の方向を表す。次に、$\vec{e_2},\vec{e_3}$ の作り方は、求めるものを (x,y,z) として (x,y,z) は方程式 $\sqrt{2}x+5z=0$ を満たさなければならないので、1 つは $(0,1,0)$ 他は $\sqrt{2}x+5z=0$ から $z=-\frac{\sqrt{2}}{5}x$ から $x=5$ とすれば $z=-\sqrt{2}$ となって $(5,0,-\sqrt{2})$ を得るが、このベクトルの長さを 1 にして $\vec{e_3}=(\frac{5}{3\sqrt{3}},0,-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}})$ が得られる。

そこで座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を行う。ここで、行列 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は直交行列であることに注意しておく。また、この逆変換は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

となっている。これから

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3\sqrt{3}}(\sqrt{2}X+5Z) \\ y=Y \\ z=\frac{1}{3\sqrt{3}}(5X-\sqrt{2}Z) \end{cases}$$

となる。これらを最初の

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$$

に代入すると、

$$\frac{1}{25}(\frac{1}{3\sqrt{3}}(\sqrt{2}X+5Z))^2+\frac{Y^2}{9}+(\frac{1}{3\sqrt{3}}(5X-\sqrt{2}Z))^2=1...(*)$$

となる。この時に、平面

$$\sqrt{2}x+5z=0$$

は

$$X=0$$

に変換されるので、最後の式 (*) で $X=0$ とおくと、

$$\frac{1}{25}\frac{1}{27}(5Z)^2+\frac{Y^2}{9}+\frac{1}{27}(-\sqrt{2}Z)^2=1$$

が得られ、

$$Z^2+Y^2=9$$

となるので、答えは半径 3 の円になる。◀

類題. 立体 $z^2=4x^2+y^2$ を平面 $ax+z=1$ で切る。この時の切り口は何を表すか。

「略解」 例題と同じようにして 3 つのベクトル

$$(a,0,1),(0,1,0),(1,0,-a)$$

を選び、それぞれを長さ 1 にしてそれらを左から順に並べた行列を P とする。つまり、

$$P=\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\end{pmatrix}$$

. この行列による変数変換を行う

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

前と同様にこの変換は直交変換でしかも

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$$

従って、

$$\left\{\begin{array}{c}x=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(aX+Z)\\ y=Y\\ z=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(X-aZ)\end{array}\right.$$

だから、

$$z^2 = 4x^2 + y^2$$

に代入して

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(X-aZ)\right)^2 = 4\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(aX+Z)\right)^2 + Y^2$$

計算して纏めると

$$(X-aZ)^2 = 4(aX+Z)^2 + (a^2+1)Y^2$$

から

$$(a^2+1)Y^2 + (4-a^2)Z^2 + 10aXZ = (4a^2-1)X^2$$

となる。ところが、

$$ax + z = 1$$

は

$$a\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(aX+Z) + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(X-aZ) = 1$$

つまり

$$X = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

に変換されるので、最後の式で

$$X = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

を代入して切り口の図形は、

$$(a^2+1)Y^2 + (4-a^2)Z^2 + \frac{10a}{\sqrt{a^2+1}}Z = \frac{4a^2-1}{a^2+1}$$

となる。従って、$(a^2+1) = (4-a^2)$ の場合は円、$(a^2+1)(4-a^2) \geq 0$ で $(a^2+1) \neq (4-a^2)$ の場合は楕円、$(a^2+1)(4-a^2) < 0$ の場合は双曲線となる。◀

問題 *5-1.*

1. 行列 A とベクトル $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ があり、関係式 $\begin{cases} Aa_1 = 2a_1 \\ Aa_2 = a_2 \\ Aa_3 = 3a_3 \end{cases}$ が成り立つとする。以下に答えよ。

（1）a_1, a_2, a_3 は互いに直交することを示せ。

（2）ベクトル $r = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ を a_1, a_2, a_3 の一次結合でかけ。

（3）Ar, A^2r を求めよ。

（4）A^nr を求めよ。

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, 0 < p, q < 1$ に対して、以下に答えよ。

（1）固有値と固有ベクトルを求めよ。但し、固有ベクトルは単位ベクトルにせよ。

（2）A^n を求めよ。

（3）$\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ。

6 その他の行列に関係した問題

例題 6-1. 次の問に順に答えよ。但し、行列 A は $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とする。

(1)A の固有値、固有ベクトルを求めよ。

(2) 行列 A を対角化せよ。

(3)A^n を計算せよ。

(4) 二次元のベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の間に距離

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

を入れる。ベクトルの列 $\{\vec{x}_j\}_{j=1}^{\infty}$ があるベクトル $\vec{x}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} d(\vec{x}_j, \vec{x}) = 0$$

となるときに、$\{\vec{x}_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $\vec{x}$ に収束するという。

今

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

に対して、上の行列 A を用いて

$$\vec{x}_j = A^j \vec{a}$$

と定める。この時に、a_1, a_2 の取り方に関係なく $\{\vec{x}_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束することを示せ.

（解法）(1). 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

だから、

$$(\frac{1}{2} - \lambda)^2 = \frac{1}{36},$$

よって $(\frac{1}{2} - \lambda) = \pm\frac{1}{6}$, 従って

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}。$$

次に固有ベクトルは、

(i)$\lambda = \frac{2}{3}$ の時は、

$$\begin{cases} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{9}y = 0 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 0 \end{cases}$$

から

$$y = \frac{2}{3}x, x; free$$

を得て、固有ベクトル

$$\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まる。

(ii)$\lambda=\frac{1}{3}$ の時は、

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{6}x+\frac{1}{9}y=0\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{6}y=0\end{array}\right.$$

から

$$y=-\frac{3}{2}x, x; free$$

を得て、固有ベクトル

$$\vec{x}_2=c_2\left(\begin{array}{c}2\\-3\end{array}\right)$$

が求まる。

(２). (1) から

$$P=\left(\begin{array}{cc}2&2\\3&-3\end{array}\right)$$

とおけば、

$$P^{-1}AP=D,$$

但し

$$D=\left(\begin{array}{cc}\frac{2}{3}&0\\0&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

を得る。ここで、$P^{-1}=\left(\begin{array}{cc}\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\end{array}\right)$である。

(3).(2) から $A=PDP^{-1}$ だから

$$A^n=(PDP^{-1})^n$$

$$=(PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1})=PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1}$$

$$=PDD...DP^{-1}=PD^nP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{2}{3})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\{(\frac{2}{3})^n + (\frac{1}{3})^n\} & \frac{1}{3}\{(\frac{2}{3})^n - (\frac{1}{3})^n\} \\ \frac{3}{4}\{(\frac{2}{3})^n - (\frac{1}{3})^n\} & \frac{1}{2}\{(\frac{2}{3})^n - (\frac{1}{3})^n\} \end{pmatrix}$$

(4).$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ に対して、A を用いて $\vec{x}_j = A^j\vec{a}$ と定めたので、(3) の結果から

$$\vec{x}_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\{(\frac{2}{3})^j + (\frac{1}{3})^j\} & \frac{1}{3}\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})^j\} \\ \frac{3}{4}\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})^j\} & \frac{1}{2}\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})j\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1\{(\frac{2}{3})^j + (\frac{1}{3})^j\} + & \frac{1}{3}a_2\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})^j\} \\ \frac{3}{4}a_1\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})^j\} + & \frac{1}{2}a_2\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})j\} \end{pmatrix}$$

である。ここで、$(\frac{2}{3})^j, (\frac{1}{3})^j \to 0 (j \to \infty)$ に注意すると、a_1, a_2 の値に無関係に、言い換えればベクトル $\vec{a}$ の取り方に関係なく

$$\vec{x}_j \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (j \to \infty)$$

がわかる。◀

例題 6-2.　0 でない全ての実ベクトル $\begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > 0$$

が成り立つように a の値を決めよ。

（解法） $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}$ とし、行列 A の固有値、固有ベクトルを求めて対角化を行う。先ず、固有値は固有方程式

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & -a \\ a & 1-\lambda & a \\ -a & a & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

から

$$(1-\lambda)^3 - 2a^3 - 3(1-\lambda)a^2 = 0、$$

ここで $X = (1-\lambda)$ とおくと

$$X^3 - 3a^2X - 2a^3 = 0、$$

因数分解して、

$$(X+a)(X^2 - aX - 2a^2) = 0、(X+a)^2(X-2a) = 0$$

従って、固有値は

$$\lambda = a+1, -2a+1$$

となる。固有ベクトルは
(i)$\lambda = a+1$ のときは、連立方程式

$$\begin{cases} -ax + ay - az = 0 \\ ax - ay + az = 0 \\ -ax + ay - az = 0 \end{cases}$$

から

$$y = x + z, x, z; free$$

をえる。ベクトルで書けば、

$$\vec{x_1} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(i)$\lambda=-2a+1$ のときは、連立方程式

$$\begin{cases} 2ax+ay-az=0...(1) \\ ax+2ay+az=0...(2) \\ -ax+ay+2az=0...(3) \end{cases}$$

ここで $(2)-(1)=(3)$ に注意して

$$\begin{cases} 2x+y=z...(1) \\ x+2y=-z...(2) \end{cases}$$

を解くと、

$$x=z, y=-z, z; free$$

をえる。ベクトルで書けば、

$$\vec{x}_2=c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。前と同様に $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に直交するように c_1 と c_2 との関係を調べると

$$c_1+(c_1+c_2)=0$$

から

$$c_2=-2c_1$$

を得る。この時に、$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}-2c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=$ $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}-2c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}=c_1'\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる。これら

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3個のベクトルをそれぞれ長さが1になるようにして、左から順に並べると次の行列 T を得る。

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

この時に、関係式

$${}^tTAT = D$$

が成立する。

$$D = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a+1 \end{pmatrix}$$

今、変数変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

簡単に

$$\vec{x} = T\vec{X}$$

を行うと最初の条件式

$$\begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > 0$$

は

$$\begin{pmatrix} Z, & Y, & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$> 0$$

簡単に書けば

$$^t\vec{X}^tTAT\vec{X} > 0$$

つまり

$$^t\vec{X}D\vec{X} > 0$$

となる。これを詳しく書けば

$$(a+1)X^2 + (a+1)Y^2 + (-2a+1)Z^2 > 0$$

が全ての X, Y, Z について成り立てば良いので、求める条件は

$$(a+1) > 0, (-2a+1) > 0$$

となる。これから、不等式

$$-1 < a < \frac{1}{2}$$

を得る。◀

例題 6-3. $x^2+y^2+z^2=1$ の条件のもとで $3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx$ の最大値、最小値を求めよ。

（解法）

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$= \begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =^t \vec{x}A\vec{x}$$

となることに注意して行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求め、直交行列で対角化する。先ず、固有方程式

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

から

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20 = 0、$$

因数分解して、

$$(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2 = 0、$$

よって固有値は

$$\lambda = 2, 5$$

である。
　最初に $\lambda = 2$ の時の固有ベクトルは連立方程式

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

を解いて、

$$\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を得る。ここで、$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交するように c_1 と c_2 との関係を調べると

$$c_1 + (c_1 + c_2) = 0$$

から

$$c_2 = -2c_1$$

を得る。この時に、$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は、

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。
　$\lambda = 5$ の時の固有ベクトルは連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{c} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right.$$

を解いて、

$$\vec{x}_2 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る。これら

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 個のベクトルをそれぞれ長さが 1 になるようにして、左から順に並べると次の行列 T を得る。

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

この時に、関係式

$${}^tTAT = D$$

が成立する。

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

今、変数変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

簡単に書けば

$$\vec{x} = T\vec{X}$$

を行うと最初の二次形式 $3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx$ は

$$3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx$$

$$= \begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =^t \vec{x} A \vec{x} =^t \vec{X}^t TAT\vec{X}$$

即ち、

$$^t\vec{X}^t TAT\vec{X}$$

$$= \begin{pmatrix} Z, & Y, & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Z, & Y, & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 2X^2+2X^2+5Z^2$$

となる。この時に、T による変換は T が直交行列であるから、$x^2+y^2+z^2=1$ の条件は、$X^2+Y^2+Z^2=1$ になる（「一次変換と行列」参照）。この条件 $X^2+Y^2+Z^2=1$ のもとで二次形式 $2X^2+2X^2+5Z^2$ の最大値、最小値はそれぞれ 5 と 2 であることは明らかであろう。◀

最後に少し難しい例題をやろう。

例題 *6-4*. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$....[1] を満たしているときに、次に答えよ。

(1)$a_0=a_1=1$ として、極限値 $\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を求めよ。

(2) 与えられた式 [1] は行列とベクトルを用いて $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$ とかける。このことを利用して極限値 τ を求めよ。また一般項 a_n も求めよ。

（解法）(1). 条件の式 [1] の両辺を a_n で割って $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ を得る。ここで、

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

とおけば数 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は

$$\alpha_{n+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_n}$$

を満たす。上の漸化式から、$\alpha_n > 0$ は明らかで、それから

$$\alpha_n \geq 1$$

かわかり、従って

$$\alpha_n \leq 2、$$

つまり

$$1 \leq \alpha_n \leq 2$$

が従う。
　だから、

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\alpha_n} \leq 1$$

となるので、上の関係式から

$$\frac{3}{2} \leq \alpha_n \leq 2$$

が得られる。このことを用いると以下の等式と不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} - \alpha_n &= (1 + \frac{1}{\alpha_n}) - \left(1 + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n-1}} \\
&= \frac{1}{\alpha_n \alpha_{n-1}} (\alpha_{n+1} - \alpha_n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\alpha_{n+1}-\alpha_n| &\leq (\frac{2}{3})(\frac{2}{3})\,|\alpha_n-\alpha_{n-1}| \\
&= (\frac{4}{9})\,|\alpha_n-\alpha_{n-1}| \\
&\leq (\frac{4}{9})^2\,|\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}| \\
&\leq (\frac{4}{9})^3\,|\alpha_{n-2}-\alpha_{n-3}| \\
&.... \\
&\leq (\frac{4}{9})^{n-1}\,|\alpha_2-\alpha_1|
\end{aligned}
$$

従って、

$$
|\alpha_{n+p}-\alpha_n| \leq |\alpha_n-\alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}| + ... + |\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}|
$$

$$
\leq (\frac{4}{9})^{n-1}\,|\alpha_2-\alpha_1| + (\frac{4}{9})^{n}\,|\alpha_2-\alpha_1| + ... + (\frac{4}{9})^{n+p-3}\,|\alpha_2-\alpha_1| + (\frac{4}{9})^{n+p-2}\,|\alpha_2-\alpha_1|
$$

$$
\leq (\frac{4}{9})^{n-1}\,|\alpha_2-\alpha_1|\,(1+\frac{4}{9}+(\frac{4}{9})^2+...+(\frac{4}{9})^{p-1})
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (\frac{4}{9})^{n-1}\,|\alpha_2-\alpha_1|\,(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}) \\
&= (\frac{4}{9})^{n-1}(\frac{5}{9})\,|\alpha_2-\alpha_1|
\end{aligned}
$$

が成り立って、数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ はいわゆるコーシー列になっている。だから、数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

次ぎに、

$$
\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha
$$

とおけば、関係式

$$
\alpha_{n+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_n}
$$

から、

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

を得る。従って、α は二次方程式

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

の解であり、しかも $\alpha > 0$ だから、

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

を得る。

（注意）一般に数列が収束するための条件は次が良く使われる。

(i) **次の *2* つの条件 *[1]*、*[2]* を同時に満たす数列は収束する。**

[1] 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界（$resp.$ 下に有界）である。つまり、ある定数 M があって全ての n に対して $a_n \leq M$（$rsp.M \leq a_n$）が成立する。。

[2] 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に増加（$resp.$ 減少）する。つまり、$a_n \leq a_{n+1}$（$resp.a_n \geq a_{n+1}$）が全ての n に対して成立する。

上の性質 [2] を満たす数列を**単調増大な数列**（$resp.$ **単調減少な数列**）という。

(ii) また、この例のように、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が十分に大きな自然数 n と任意の自然数 p に対して $|a_{n+p} - a_n|$ が幾らでも 0 に近く出来る時にその数列は**コーシー列**であるという。この性質を持つ数列は収束する。

(2). 最初に、行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求める。固有方程式は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

だから、展開して、

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

より

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

が固有値となる。
　次に、固有ベクトルは $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ の時に、連立方程式

$$\begin{cases} -\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}x + y = 0 \\ x + \frac{1\mp\sqrt{5}}{2}y = 0 \end{cases}$$

を解いて、

$$y = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}x$$

を得て、固有ベクトルは

$$\vec{x_i} = c_i \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} (i = 1, 2)$$

を得る。この時に、$c_i = 2$ と置き、次の行列を考える。

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

この行列の逆行列は、

$$P^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 \\ 1+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}$$

であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

が成立している。
　今、

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

から、

$$P\begin{pmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = AP\begin{pmatrix} A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}$$

が成り立ち、従って

$$\begin{pmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}$$

が成立する。従って、

$$\begin{pmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

となる。だから、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{pmatrix}$$

に代入すると、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} (\frac{1+5}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

$$= P\begin{pmatrix} (\frac{1+5}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\frac{1+5}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix}(\frac{1}{4\sqrt{5}})\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 \\ 1+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これから一般項がわかる。

$$a_n = (\frac{1}{\sqrt{5}})\{(\frac{1+5}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}\}。$$

◀