1　応用数学後期中間試験問題（１２月５日３・４限）

（注意）１．解答は解答用紙（白紙）の両面を使用すること。用紙が不足したときには、追加分を貰うこと。

２．途中の計算は消さないで残すこと。
３．各問題毎の指示に従って答えること。指示を越えた解答は採点しない。
４．問題の後に配点が記入してある。各自で１００点分を選んで解答すること。
５．１００点を越えた分は採点の対象としない。

1.1　１．次の複素数 $z = x + iy$ を極形式 $re^{i\theta}$ で表し、逆に極形式 $re^{i\theta}$ を $z = x + iy$ に直せ。（（５）を含めて２題以内）（$2 \times 5 = 10$）（「知識・能力１」）

（１）$1+i$（２）$\sqrt{3}+i$（３）$2e^{-\frac{\pi}{4}i}$（４）$e^{-\frac{13\pi}{3}i}$（５）$3-i\sqrt{3}$

1.2　２．次の複素数を最も簡単な $z = x + iy$ の形で表せ。（１題以内）（$1 \times 5 = 5$）（「知識・能力２」）

（１）$(1-i)^9$（２）$\frac{1}{(1+\sqrt{3}i)^{10}}$

1.3　３．次の円分方程式を解け。（（３）を含めて２題以内）（$2 \times 10 = 20$）（「知識・能力２」）

（１）$z^6 = -1$（２）$z^4 = i$（３）$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

1.4　４．次の値を求めよ。（（１）〜（３）は各１題以内）（$4 \times 5 = 20$）（「知識・能力２」）

（１）$(i)\sqrt[3]{1-i}(ii)\sqrt{i}$（２）$(i)i^{-i}(ii)(1+i\sqrt{3})^{i^i}$（３）$(i)\log(1-i)(ii)\log i$（４）$Log(1-i\sqrt{3})$

1.5　５．次の複素関数 $w = f(z)$ を $w = u(x, y) + iv(x, y)$ の形で表し、正則関数であるかどうか判定せよ。（（３）、（４）は各１題以内）（（１）$1 \times 5 = 5$,（２）$1 \times 5 = 5$,（３）$1 \times 10 = 10$,（４）$1 \times 10 = 10$）（「知識・能力２」）

（１）$w = z^2$（２）$w = |z|$（３）$(i)w = \frac{1}{z}(ii)w = z^3$（４）$(i)w = \cos z (ii)w = e^{z^2}$

1.6　６．次の問に答えよ。（１．$1 \times 5 = 5$, ２．$1 \times 5 = 5$）（「知識・能力１」）

方程式 $z^5 = 1$ を満足する全ての複素数 z について考える。以下に答えよ。

１．与えられた方程式を満たす z のうちで、$z = 1$ を除いて偏角 $(\arg z)$ が最小のものを $z = \omega$ とする。このときに、方程式 $z^5 = 1$ の全ての解は、$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ と表されることを示せ。但し、$0 \leq \arg z \leq 2\pi$ とする。

２．上の１．で定義した ω は、方程式 $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ を満たすことを示せ。（hint；$z^5 - 1$ を因数分解する）

1.7　７．以下に答えよ。（１題以内（１）（$1 \times \underline{10 = 10}$,（２）$1 \times 10 = 10$,（３）$1 \times 10 = 10$）（「知識・能力２」）

（１）1 の 8 乗根のうちで偏角が正で最小のもの β を求め β^4 を計算せよ。

（２）1 の 16 乗根のうちで偏角が正で最小のものを $\alpha (\neq 1)$ として、$S = \sum_{k=0}^{7} \alpha^{2k}$ を計算せよ。

（３）$z = (1 + i)^n - (1 - i)^n$ として、$|z|$ を計算せよ。

1.8　８．次に答えよ。（１題以内）（（１）$1 \times 10 = 10$,（２）$1 \times \underline{10 = 10}$,（３）$1 \times \underline{10 = 10}$,（４）$1 \times 10 = 10$）（「知識・能力１」）

（１）$f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ が正則になるように、定数 a, b, c, d を決めて、関数 $f(z)$ を z で表せ。

（２）$w = x^2 - y^2 - 3x + 2 + i(2x - 3)y$ は正則関数であるか。正則関数ならばその導関数を求めよ。

（３）正則関数 $w = f(z)$ の実部 $u(x, y)$ が $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ であるときに、関数 $w = f(z)$ を求めよ。

（４）正則関数 $w = f(z)$ の実部 $u(x, y)$ が $u = e^{-x} \sin y$ であり、かつ $z = 0$ で $w = 0$ となる関数 $w(z)$ を求めよ。

以下は今回の試験範囲に関連したやや難しい問題である。余裕のある人は是非挑戦。

1.9 以下に答えよ。

１．正則関数 $f(z)$ は $f(0)=0$ を満たし、その実部が $u(x,y)=e^{-x}(x\cos y+ay\sin y)$ である。以下に答えよ。(i) 関数 $u(x,y)$ は調和関数 $(u_{xx}+u_{yy}=0)$ であるように定数 a を決めよ。(ii) 複素関数 $f(z)$ の虚部 $v(x,y)$ を求めよ。(iii)$f(z)$ を z で表せ。

２．関数 $u(x,y)=e^{-ax}\sin 2y$ について以下に答えよ。

(i) 関数 $u(x,y)$ が調和関数 $(u_{xx}+u_{yy}=0)$ になるように定数 a を決めよ。

(ii)(i) で決めた定数 a に対して、$u(x,y)$ を実部にするような複素正則関数 $f(z)$ を求めよ。

３．$f=z^2$ によって、z 平面における直線群 $z=a+iy$（a：実数）は、w 平面のどのような図形に写されるか。図示せよ。

４．複素平面の単位円板 $D=\{z;|z|<1\}$ 上で定義された関数 $u=\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right)$ を定める。u は D 上の調和関数であることを示せ。

５．関数 $w(z)=\sin z^2, z=x+iy$ の実部 $u(z)$ と虚部 $v(z)$ を x,y で表せ。

６．$\cos z$ が実数になる z の条件を求めよ。

７．方程式を解け。

（1） $\cos z=-2$（２）$\cos z=2$ **（3）** $\sin z=2$