1　特講１問題解答

1.1　問題 *1-1*

係数行列の行列式の値 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

$1 \times \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)3 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times (-13) + 3 \times 3 + 2 \times 2. (i) \times 13 = (ii) \times 3 + (iii) \times 2$

1.2　問題 *1-2*

１．（１）$(i)A$ の 0 でない小行列の最大のサイズ。

$(ii)A$ の一次独立な列ベクトルの最大個数。

$(iii)A$ の一次独立な行ベクトルの最大個数。

$(iv)A$ で定まる線形変換の値域の次元。

（２）階数: 3

（３）$u = \frac{7}{25} - \frac{1}{2}x, y = \frac{3}{5}, z = \frac{9}{25}, x; free$

２．（１）$\det A = a - 4. (i) a = 4 \to rank(A) = 2, (ii) a \neq 4 \to rank(A) = 3$

（２）$(i) a = 4 \to rank(B) = 2, (ii) a \neq 4 \to rank(B) = 3$

（３）$(i) a = 4 \to rank(A) = rank(B) = 2$（解の自由度＝３－２＝１）。$x = z + 2, y = -2z - 1, z; free$

$(ii) a \neq 4 \to rank(A) = rank(B) = 3$（解の自由度＝３－３＝０）$.x = 3, y = -3, z = 1$

３．（１）$(1) + (4) = (2), (1) - (4) = (3), (1)$ と (3) は独立 $\to$ 階数: 2

$$\begin{cases} x + z = -y \\ x - z = -3y - 2u \end{cases} \to x = -2y - u, z = y + u, y, u; free$$

（２）$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (u-1)^2 = (-2y - u - 1)^2 + (y-1)^2 + (y + u - 1)^2 + (u-1)^2$

$= 6uy - 2u + 3u^2 + 6y^2 + 4 = 6(y + \frac{1}{2}u)^2 + \frac{3}{2}(u - \frac{2}{3})^2 + \frac{10}{3}$

$\to u = \frac{2}{3}, y = -\frac{1}{2}u = -\frac{1}{3}, x = -2y - u = 0, z = y + u = \frac{1}{3}.$

４．（１）係数行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & a \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & a \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 4a + 4$

$(i) a = -1 \to rank(A) = 2$ 解は存在しても一意でない（存在すれば自由な解が $1(= 3 - 2)$ つ）

$(ii) a \neq -1 \to rank(A) = 3$ このときに $rank(B) = 3$ ならば解が存在して一意。

拡大係数行列 $B, |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & a & b \\ 4 & 3 & 0 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \end{vmatrix} = (b-2c-1)(a+1) = 0$ の時

に解を持つ。$a \neq -1$ だから、$(b-2c-1)=0$ のとき解が存在して一意になる。$\begin{cases} y-2z=1 \\ 2x+2y+az=b \\ 2x+y+z=c \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{1}{2a+2}(4c-3b-a+ac+2), \\ y = \frac{1}{a+1}(a+2b-2c-1), \\ z = \frac{1}{a+1}(b-c-1) \end{cases}$

（３）$a=-1$ の時には、$rank(A)=2$ だから、方程式が解を持つ為には $rank(B)=2$。このときには３次の小行列式の値例えば、$\begin{vmatrix} 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} =$

$3c=0, c=0.$ 更に、$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & b \end{vmatrix} = 3-3b=0, b=1.$ よって、$c=0, b=1.$

この場合 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の階数は２となり方程式は解を持つ。

$\begin{cases} y-2z=1 \\ 2x+2y-z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ を解くと、$y=2z+1, 2x=-3z-1$ だから、求める直線は、$\frac{y-1}{2} = \frac{(x+\frac{1}{2})}{-3} = z.$

５． 拡大係数行列 B、$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a+1 \\ a & 0 & a+1 & 1 \\ 1 & -a & 1 & a+1 \end{vmatrix} = 2a - a^2 + a^3 =$

$a\left(a^2-a+2\right)$

$(i) a \neq 0$ ならば拡大係数行列 $B; rank=4.$ 一方係数行列 $A, rank(A) \leq 3 \rightarrow$ 解を持たない。

$(ii) a=0$ の場合を考える。$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(4)-(1)\rightarrow(4)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(2)-(1)\rightarrow(2)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{[3]-[1]\rightarrow[3]}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, rank(A)=3.$

この場合に$\mathrm{rank(B)}=3$は明らかだから連立方程式は解を持ち、$\begin{cases} x+z=1...(1) \\ x+y=1...(2) \\ z=1...(3) \\ x+z=1...(4) \end{cases}$を解くと、（1）と（4）は同じだから、（1）、（2）、（3）から$z=1,x=0,y=0$を得る。

6．係数行列Aの行列式の値、$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 2-k \\ 1 & k \end{vmatrix}=4k-2.$

$(i)k\neq\frac{1}{2}$ならば、方程式は自明な解しか持たない。

$(ii)k=\frac{1}{2}$ならば、$\begin{cases} 3x+\frac{3}{2}y=0...(1) \\ x+\frac{1}{2}y=0...(2) \end{cases}$ （1）＝３×(２) は明らかだから、(2) より$y=-2x,x;free$の解。

発展問題　1．n**次の正方行列**A_n**を、対角成分が全て**a**でそれ以外は全て**1**であるようなものとする。以下に答えよ。**

$(i)|A_n|$**を因数分解せよ。**(ii)**連立方程式**$\begin{cases} ax_1+x_2+...+x_n=0 \\ x_1+ax_2+...+x_n=0 \\ ...... \\ x_1+x_2+...+ax_n=0 \end{cases}$**を解け。**

2．**連立方程式**$\begin{cases} 3x+5y+2z=0 \\ x+(t+2)y+z=0 \\ tx+y+(t-1)z=0 \end{cases}$**が**$x=y=z=0$**以外の解をもつように定数の値を定め解を求めよ。**

3．$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$**として以下に答えよ。**

(1) 方程式$A\vec{x}=\vec{b}$**が解を持つ為の必要十分条件は**$a+b+c=0$**であることを示せ。**

(2) 任意のベクトル$\vec{x}$**に対して、**$(A\vec{x},\vec{y})=0$**となる非自明な**$(\vec{y}\neq\vec{0})$**3 次元のベクトル**$\vec{y}$**を求めよ。**

4．**変数**$x,y,z,(x=y=z=0$ **以外**$)$**の間に関係式**$\frac{x+y-2z}{x}=\frac{-x+2y+z}{y}=\frac{y-z}{z}$**が成り立つときに、共通な値と**$x,y,z$**の比を求めよ。**

5．**行列**$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 2 & k \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$**、及びベクトル**$\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ b \end{pmatrix}$**が与えられているときに以下に答えよ。**

（1）行列A**の行列式の値を求めよ。**

（2）連立方程式$A\vec{x}=\vec{0}$**が自明でない解を持つように定数**k**の値を決めよ。また、そのときに自明でない解を求めよ。**

（3）（2）の場合に、連立方程式$A\vec{x}=\vec{b}$が解を持つように定数bを定めよ。また、そのときに解を求めよ。

6．**連立方程式**$\begin{cases} x-y+z-u=0 \\ x+y-z-u=0 \\ x-y-z+u=0 \end{cases}$ **の解全体が作るR^4の部分空間Kの次元と基底を求めよ。**

1.2.1 問題 3-1

1．(i)$rank=2.$

(ii)$\mathrm{Im}(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+2y+2z \\ 3u+2x+6y+4z \\ 2u+x+4y+3z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(i) からベクトルの組$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$の次元は 2. 例えば$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$が基底。

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in Ker(f_A) \to \begin{pmatrix} u+2y+2z \\ 3u+2x+6y+4z \\ 2u+x+4y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .u = -2x-2y, z=x$

2．(i)$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in R^3, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3.$

$f(\vec{x}) = 6\vec{x}-(\vec{x}\cdot\vec{v})\vec{v} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - (x+2y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-2y+z \\ -2x+2y+2z \\ x+2y+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 5x-2y+z \\ -2x+2y+2z \\ x+2y+5z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

（別法）$f(\vec{x}) \cdot \vec{v} = 6\vec{x} \cdot \vec{v} - (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v} \cdot \vec{v} = 6(\vec{x} \cdot \vec{v}) - 6(\vec{x} \cdot \vec{v}) = 0, (\vec{v} \cdot \vec{v} = 6)$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} .rank(A) = 2$

$\mathrm{Im}(f) = \{A\vec{x}; \vec{x} \in R^3\} = \{x \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\} = \{y \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(f), \begin{pmatrix} 5x-2y+z \\ -2x+2y+2z \\ x+2y+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} 5x-2y+z=0 \\ -2x+2y+2z=0 \\ x+2y+5z=0 \end{cases} .x = -z, y = -2z, z; free.$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1 次元

(iii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{x} \in (\mathrm{Im}(f)) \rightarrow \vec{x} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c+d \\ 2c+2d \\ 2c+5d \end{pmatrix}$

$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -2c+d \\ 2c+2d \\ 2c+5d \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -2c+d = 0 \rightarrow d = 2c \rightarrow\rightarrow\rightarrow \begin{pmatrix} -2c+d \\ 2c+2d \\ 2c+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6c \\ 12c \end{pmatrix}$

３．(i) 省略

(ii)$T(1) = 0, T(x) = 1, ..., T(x^k) = kx^{k-1}, ..., T(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2}$

により、$Ker(T) = \{c; c(\mathrm{real}, const.)\}, \dim = 1. \mathrm{Im}(T) = \{c_0 + c_1x + ... + c_{n-2}x^{n-2}; c_j(\mathrm{real}, const.)\}, \dim = n-2$

４．$k = 3; A^2\vec{x} \neq 0$ により、$A\vec{x} \neq 0, \vec{x} \neq 0.$ 何故なら、例えば、$A\vec{x} = 0$ とすると、両辺に A を掛けて $A^2\vec{x} = 0$ となるからである。このときに、$c_0\vec{x} + c_1A\vec{x} + c_2A^2\vec{x} = 0...(i)$ とする。(i) の両辺に A を掛けて、$c_0A\vec{x} + c_1A^2\vec{x} + c_2A^3\vec{x} = 0.$

仮定から、$A^3\vec{x} = 0$ だから、$c_0A\vec{x} + c_1A^2\vec{x} = 0...(ii).(ii)$ の両辺に A を掛けて、$c_0A^2\vec{x} + c_1A^3\vec{x} = 0.$ 仮定から、$A^3\vec{x} = 0$ だから、$c_0A^2\vec{x} = 0...(iii).$ ここで、仮定から $A^2\vec{x} \neq 0$ だから、$c_0 = 0.$

よって、(i) から、$c_1A\vec{x}+c_2A^2\vec{x}=0...(i)'$. 再び $(i)'$ の両辺に A を掛けて、$c_1A^2\vec{x}+c_2A^3\vec{x}=0$. 再び仮定 $A^3\vec{x}=0$ から、$c_1A^2\vec{x}=0$. ここで、再び仮定 $A^2\vec{x}\neq 0$ から、$c_1=0$. よって、$c_2A^2\vec{x}=0...(i)''$.

従って、$c_2=0$. 故に、$c_0=c_1=c_2=0$ が成り立つ。即ち、$\{\vec{x},A\vec{x},A^2\vec{x}\}$ は一次独立である。

５.（１）$A\vec{e}_j=$ 行列 A の第 j 列。だから、$A\vec{e}_j$ を第 j 列とする行列はもとの行列 A と一致する。

$\det A=8abc^2-8ab^2c=-8abc\,(b-c)\neq 0$ から、$b\neq c, a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

（２）$|A\vec{x}|^2=(A\vec{x},A\vec{x})=(A^tA\vec{x},\vec{x})=|\vec{x}|^2=(\vec{x},\vec{x})$ となるのは、$A^tA=E$

$$A^tA=\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ \sqrt{2}b & 0 & -\sqrt{2}b & 0 \\ 0 & \sqrt{2}c & 0 & -\sqrt{2}c \\ b & c & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 & b \\ a & 0 & \sqrt{2}c & c \\ a & -\sqrt{2}b & 0 & b \\ a & 0 & -\sqrt{2}c & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a^2 & 0 & 0 & 2ab+2 \\ 0 & 4b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4c^2 & 0 \\ 2ab+2ac & 0 & 0 & 2b^2+2 \end{pmatrix}$$

により、$\begin{cases} a^2=b^2=c^2=\frac{1}{4} \\ 2a(b+c)=0 \end{cases}.\begin{cases} a=\pm\frac{1}{2} \\ b=\pm\frac{1}{2} \\ c=\mp\frac{1}{2} \end{cases}$

６．n 次正方行列 A について、以下の命題の中で１つだけ他の命題と同値でないものがある。それを指摘せよ。(技術士一次試験 H13)

（１)、（２)、（３）$A^tA=E$（４）$A^{-1}=A$

（５）$A=\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & . & \vec{a}_j & . & \vec{a}_j \end{pmatrix}, A^t=\begin{pmatrix} \vec{a}_1^t \\ . \\ \vec{a}_i^t \\ . \\ \vec{a}_n^t \end{pmatrix}.$

$$A^tA=\begin{pmatrix} \vec{a}_1^t \\ . \\ \vec{a}_i^t \\ . \\ \vec{a}_n^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & . & \vec{a}_j & . & \vec{a}_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{a}_1^t\vec{a}_1 & . & \vec{a}_1^t\vec{a}_j & . & \vec{a}_1^t\vec{a}_n \\ . & . & . & . & . \\ \vec{a}_i^t\vec{a}_1 & . & \vec{a}_i^t\vec{a}_j & . & \vec{a}_i^t\vec{a}_n \\ . & . & . & . & . \\ \vec{a}_n^t\vec{a}_1 & . & \vec{a}_n^t\vec{a}_j & . & \vec{a}_n^t\vec{a}_n \end{pmatrix}.\vec{a}_i^t\vec{a}_j=$$

$\begin{cases} 1,(i=j) \\ 0,(i\neq j) \end{cases}$ から、$A^tA=E$

1.2.2　問題 *3-2*

１. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \vec{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \vec{a}_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ として、$c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+c_3\vec{a}_3=\vec{0}$.

$$c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1a_{11}+c_2a_{12}+c_3a_{13} \\ c_1a_{21}+c_2a_{22}+c_3a_{23} \\ c_1a_{31}+c_2a_{32}+c_3a_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\vec{0}.\begin{cases} c_1a_{11}+c_2a_{12}+c_3a_{13}=0 \\ c_1a_{21}+c_2a_{22}+c_3a_{23}=0 \\ c_1a_{31}+c_2a_{32}+c_3a_{33}=0 \end{cases}$$

ここで、

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ が一次独立 $\Longleftrightarrow (c_1,c_2,c_3)=(0,0,0) \Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の逆行列が存在する。$\Longleftrightarrow g=g_{A^{-1}}$ が写像 f_A の逆写像

2．（1）$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y+u \\ x+2y+z+u \\ x-z+u \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=x\vec{a}_1+y\vec{a}_2+z\vec{a}_3+u\vec{a}_4$ と置くと、独立なベクトルの最大個数は 2 だから $\mathrm{Im}(f)$ は 2 次元で基底は、例えば、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

（2）$Ker(f)=\{\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}\in R^4;\begin{cases} x+y+u=0 \\ x+2y+z+u=0 \\ x-z+u=0 \end{cases}\}$. 連立方程式 $\begin{cases} x+y+u=0...(1) \\ x+2y+z+u=0...(2) \\ x-z+u=0...(3) \end{cases}$ の解は $z=-y-u+u=-y$. よって、$\vec{x}=\begin{pmatrix} -y-u \\ y \\ -y \\ u \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+u\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。基底は例えば、$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3．（1）省略

（2）$\vec{x}\in V \to x+y+z=0 \to z=-(x+y) \to$

$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ -(x+y) \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\to \vec{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\vec{x}=$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -(x+y) \end{pmatrix}$

$\vec{x}_1 \cdot \vec{x} = 0 \to x + x + y = 0 \to y = -2x \to \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\to \vec{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\vec{x}$

（4） $f(\vec{e}_1) = f \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = x\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \to$

$\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ -2y = -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}x + y = \sqrt{3} \end{cases}, \ [x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}\sqrt{3}]$

$f(\vec{e}_2) = f \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = x\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \to$

$\begin{cases} \sqrt{3}x + y = -2 \\ -2y = 1 \\ -\sqrt{3}x + y = 1 \end{cases}, \ [x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, y = -\frac{1}{2}]$

4．（1） $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t + 2s \\ t \\ s \end{pmatrix}$

（2） $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t + 2s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9s + 5t \\ 7s + 9t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ 正則 $\to$ 平面全体。

（3） $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 5z \\ 3x + z \end{pmatrix} \overset{2x+5y=0}{\to} 2(2x - y + 5z) + 5(3x + z) = 0$

$\to 19x - 2y + 15z = 0$（平面）

5．平面上の任意のベクトル $\vec{x} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ に対して、ベクトル $\vec{y} = b\vec{e}_1 - a\vec{e}_2$ は $\vec{x}$ と直交する。従って、$f(\vec{x}) = af(\vec{e}_1) + b(\vec{e}_2)$ と $f(\vec{y}) = bf(\vec{e}_1) - a(\vec{e}_2)$ とは直交する。だから、関係式 $f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = 0$ が成り立つ。よって、$(af(\vec{e}_1) +$

$bf(\vec{e}_2))\cdot(bf(\vec{e}_1)-af(\vec{e}_2))=0$

$\to ab|f(\vec{e}_1)|^2=ab|f(\vec{e}_2)|^2(f(\vec{e}_1)\cdot f(\vec{e}_2)=0)$.

従って、$\vec{x}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2, \vec{y}=c\vec{e}_1+d\vec{e}_2$ とすると、$\cos\theta=\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$.

ここで、$f(\vec{x})=af(\vec{e}_1)+bf(\vec{e}_2), f(\vec{y})=cf(\vec{e}_1)+df(\vec{e}_2)$ として、$\cos\theta'=\frac{ac|f(\vec{e}_1)|^2+bd|f(\vec{e}_2)|^2}{\sqrt{a^2|f(\vec{e}_1)|^2+b^2|f(\vec{e}_2)|^2}\sqrt{c^2|f(\vec{e}_1)|^2+d^2|f(\vec{e}_2)|^2}}\overset{|f(\vec{e}_1)|^2=|f(\vec{e}_2)|^2}{=}\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}=\cos\theta$

6.（1） A の固有値・固有ベクトル: $2\leftrightarrow c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, 5\leftrightarrow c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}, P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\to\to\to\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}=D$

（2）$A=PDP^{-1}\to A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{2^{n+1}}{3}+\frac{5^n}{3}&-\frac{2^n}{3}+\frac{5^n}{3}\\-\frac{2^{n+1}}{3}^n+\frac{2\cdot5^n}{3}&\frac{2^n}{3}+\frac{2\cdot5^n}{3}\end{pmatrix}$

（3）平面上の直線を、$\begin{cases}x=at+b\\y=ct+d\end{cases}$ $...(*)$ とする。

$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}at+b\\ct+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(3a+c)t+3b+d\\2(a+2c)t+2b+4d\end{pmatrix}$

$\to\begin{cases}X=(3a+c)t+3b+d\\Y=2(a+2c)t+2b+4d\end{cases}$ これは直線を表す。また、平行な２直線は、$(*)$ の表示で、$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$ が成り立ち、そのときには、$\frac{3a+c}{3a'+c'}=\frac{2(a+2c)}{2(a'+2c')}$ が成り立ち移った先の直線も平行になる。

（4）$A(0,0),B(0,1),C(1,0),D(1,1)\to A'(0,0),B'(1,4),C'(3,2),D'(4,6)$ となり、４角形の面積は $(12-2)=10$. この値は、変換行列 A の行列式の値である。

7. 線形変換を表す行列を A として、任意のベクトル $\vec{x},\vec{y}$ について、$|\vec{x}+\vec{y}|^2=|A(\vec{x}+\vec{y})|^2$

$\to(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})=(A\vec{x}+A\vec{y},A\vec{x}+A\vec{y})$

$\to(\vec{x},\vec{x})+(\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{x})+(\vec{y},\vec{y})=(A\vec{x},A\vec{x})+(A\vec{x},A\vec{y})+(A\vec{y},A\vec{x})+(A\vec{y},A\vec{y})$

$\to(\vec{x},\vec{y})=(A\vec{x},A\vec{y})=(A^TA\vec{x},\vec{y})$

$\to(\vec{x}-A^TA\vec{x},\vec{y})=0$

$\overset{\vec{y}\text{の任意性}}{\to}\vec{x}-A^TA\vec{x}=0$

$\overset{\vec{x}\text{の任意性}}{\to}A^TA=E_n$.

発展問題　１．R^3 **の線形写像**$F; R^3 \to R^3$ **が**$F; \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ **を満たすとする。**

（１）線形写像F **の行列表示を求めよ。**

（２）ベクトル$\vec{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **の像を求めよ。**

（３）写像F **の核空間**$Ker(F)$**、像空間**$\mathrm{Im}(F)$ **の次元と基底を求めよ。**

２．R^3 **の線形写像**$F; R^3 \to R^3$ **が**$F; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ **を満たすとする。**

（１）ベクトル$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **を**$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **の線形和で表せ。**

（２）写像F **を表す行列を求めよ。**

（３）写像F **で、ベクトル**$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ **に移るベクトルを求めよ。**

３．**実変数**x **の**3 **次以下の多項式全体が作るベクトル空間を**V **とする。実数**$a (\neq 0)$ **に対して、**$T_a; f(x) \to f(x+a) - f(a), (f(x) \in V)$ **によって定まる線形写像**T_a **について以下に答えよ。**

（１）線形写像T_a **の基底**$\{1, x, x^2, x^3\}$ **に関する行列表現を求めよ。**

（２）線形写像T_a **の**$\mathrm{Im}(T_a), Ker(T_a)$ **を求めよ。**

（３）線形写像T_a **の固有値・固有ベクトルを求めよ。**

（４）T_a **の表現行列が** $Jordan$ **行列になるときの基底をその表現を求めよ。**

４．**実数**t, s **について、行列**$A = \begin{pmatrix} s & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & t & 2t \end{pmatrix}$ **とする。**A **を表現行列とするベクトル空間**R^3 **上の線形写像を**F_A **で表す。次に、**R^3 **の部分空間**W

を$W=\{\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in R^3; x+y-2z=0\}$ とする。以下に答えよ。

（1）写像F_A が条件$F_A(W)\subset W$ を満たすときに、定数t,s の値を求めよ。以下では定数t,s は（1）の条件を満たすとする。

（2）行列A の行列式の値を求めよ。

（3）R^3 の自然な内積で部分空間W の直交補空間$W^\perp$ の基底になるベクトル$\vec{u}$ を求めよ。

（4）（3）のベクトル$\vec{u}$ について、ベクトル$F_A(\vec{u})$ の空間$W^\perp$ への射影はベクトル$\vec{u}$ の何倍か。

（5）写像F_A を部分空間W に制限して得られるW 上の線形写像を表す行列の行列式の値を求めよ。

５．写像$f;R^3\to R^3$ が条件$f(\vec{u}_1)=\vec{u}_1, f(\vec{u}_2)=\vec{u}_2, f(\vec{u}_3)=0$ を満たすとする。但し、$\vec{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。以下に答えよ。

（1）任意の$\vec{x}\in R^3$ について、$\vec{x}=a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+a_3\vec{u}_3$ と表されることを示せ。

（2）線形写像$g;R^3\to R^3$ が条件$g(\vec{u}_1)=\vec{u}_1, g(\vec{u}_2)=\vec{u}_2, g(\vec{u}_3)=0$ を満たすときに、$f(\vec{x})=g(\vec{x})$ が成り立つことを示せ。

（3）（2）の結果から、$f\circ f=f$ を示せ。

（4）条件”$f(\vec{x})=A\vec{x}, (\vec{x}\in R^3)$”を満たす行列$A$ を求めよ。

６．写像$f;R^3\to R$ を$f(\vec{x})=x+y+z, \vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in R^3$ で定める。$\vec{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ として以下に答えよ。

（1）写像$f;R^3\to R$ は線形写像であることを示せ。

（2）$\vec{u}_1,\vec{u}_2$ は一次独立であることを示せ。

（3）条件$f(\vec{x})\neq 0$ を満たす任意の$\vec{x}\in R^3$ について、$\vec{x},\vec{u}_1,\vec{u}_2$ がR^3 の基底になることを示せ。

（4）$\vec{u}_1,\vec{u}_2$ が$Ker(f)$ の基底であることを示せ。

７．線形写像$F:R^4\to R^3$ を$F(\vec{x})=\begin{pmatrix} x+2y+3z-u \\ 2x+4y+8z+u \\ 3x+6y+13z+3u \end{pmatrix}, \vec{x}=$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$ **とする。このときに、**$\mathrm{Im}(F), Ker(F)$ **の次元と基底を求めよ。**

８．R^3 **のベクトル**$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **について、線形写像**$F; R^3 \to R^3$ **が**$\begin{cases} F(\vec{a}) = 2\vec{b} + 2\vec{c} \\ F(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} \\ F(\vec{c}) = 2\vec{b} + 4\vec{c} \end{cases}$ **を満たすとする。以下に答えよ。**

（１）ベクトル$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **は**R^3 **の基底であることを示せ。**

（２）ベクトル$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ **を**$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **で表せ。**

（３）$F(\vec{x})$ **を**$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **で表せ。**

（４）線形写像F **の標準基底に対する表現行列を求めよ。**

９．**（１）実定数**a, b **について**R^3 **から**R^3 **への写像**$f; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + y - 3z \\ 3x + ay + bz \end{pmatrix}$ **は線形写像であることを示せ。**

（２）写像f **の像空間**$\mathrm{Im}(f)$ **が**2 **次元となるように定数**a, b **の条件を定めよ。**

１０．**２次以下の実係数多項式**$f(x) = ax^2 + bx + c$ **の全体が作る線形空間を**V **とする。**

（１）V **の変換**$T : f(x) \to \int_{-1}^{1} (t - x)^2 f(t) dt$ **は**V **の線形変換であることを示せ。**

（２）基底$\{1, x, x^2\}$ **に関して、この線形変換を表す行列を求めよ。**

１１．**（１）**$\{1, x, x^2\}$ **がベクトル空間**P **の基底であることを示せ。**

（２）P **から**P **への写像**Φ **を、**$\Phi(p) = 2x^2 p(1) - 3x\frac{dp}{dx} + p, (p \in P)$ **と定める。**$(\Phi(1), \Phi(x), \Phi(x^2)) = (1, x, x^2)A$ **となる行列を求めよ。**

（３）（２）の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。

1.2.3　問題 *4-1*

１. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

（１）$c_1 \begin{pmatrix} -(a + \sqrt{a^2 + 4a}) \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{a - \sqrt{a^2+4a}}{2} + 1, c_2 \begin{pmatrix} -(a - \sqrt{a^2 + 4a}) \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{a + \sqrt{a^2+4a}}{2} + 1.$

固有値の和 $= Tr(A) = a + 2$, 績 $= \det(A) = 1$

（２）(i)$c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -1, c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 3(ii)c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -\frac{1}{2}, c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow$

$\frac{5}{2}$

（3） (i)$a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow -1, c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow 2$

(ii)$a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow 0, c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow 3$

(iii)$c\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} \leftrightarrow 2$

（4） $a\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow -1, b\begin{pmatrix}i\\-1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow -i, c\begin{pmatrix}-i\\-1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow i$

2.（1）X^3+4X^2+5X+2

（2） 固有ベクトル: $a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, b\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow -1, c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow -2$

（3） $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

（4） $A^n\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = (-1)^n\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 3(-1)^n\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - (-2)^n\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2(-1)^n-(-2)^n\\-2(-1)^n\\3(-1)^n-(-2)^n\end{pmatrix}$

3.（1） $X^2-(a+c)X+\left(ac-b^2\right)=0, D=(a+c)^2-4\left(ac-b^2\right)=(a-c)^2+4b^2\geq 0$

（別証）$A\vec{x}=\lambda\vec{x}, \lambda(\vec{x},\vec{x})=(\lambda\vec{x},\vec{x})=(A\vec{x},\vec{x}) \overset{A^*=\bar{A}^T}{=} (\vec{x},A^*\vec{x}) \overset{A^*=A}{=} (\vec{x},A\vec{x})=(\vec{x},\lambda\vec{x})=\bar{\lambda}(\vec{x},\vec{x}) \to \lambda=\bar{\lambda} \to \lambda;\mathrm{real}$

（2）$(\vec{x},\vec{y})=\sum_{j=1}^n x_j\bar{y}_j, \vec{u}\cdot A\vec{v}=\sum_{i,j=1}^n x_j\bar{a}_{ij}\bar{y}_i=\sum_{i,j=1}^n x_j a_{ji}\bar{y}_i=\sum_{i,j=1}^n a_{ji}x_j\bar{y}_i=A\vec{u}\cdot\vec{v}$

（3）$D=0 \to a=c, b=0, X^2-2aX+a^2=0 \to X=a$

（4）$A\vec{x}=\lambda\vec{x}, A\vec{y}=\mu\vec{y}, \lambda(\vec{x},\vec{y})=(\lambda\vec{x},\vec{y})=(A\vec{x},\vec{y}) \overset{A^*=A}{=} (\vec{x},A\vec{y})=(\vec{x},\mu\vec{y}) \overset{\mu;\mathrm{real}}{=} \mu(\vec{x},\vec{y}) \to (\lambda-\mu)(\vec{x},\vec{y})=0 \to (\vec{x},\vec{y})=0$

（5）$PP^T=\begin{pmatrix}|\vec{U}_0|^2 & (\vec{U}_0,\vec{V}_0)\\(\vec{U}_0,\vec{V}_0) & |\vec{V}_0|^2\end{pmatrix}=E$

（6）$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow f(x,y) = (X,Y)^T PAP \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \overset{D=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}}{=}$
$(X,Y)D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda X^2 + \mu Y^2$

4.（1）$(A+E)(A-E) = A^2 - E = -E$ だから、$-(A-E)$ が $A+E$ の逆であり、正則。

（2）$\begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0 \rightarrow x = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$

（3）$(a-d)^2 + 4bc = 0, \rho = \frac{(a+d)}{2} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{(a-d)}{2} & b \\ c & \frac{(-a+d)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \frac{(a-d)}{2} x + by = 0 \rightarrow k \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{(a-d)}{2b} \end{pmatrix}, k = \frac{2b}{\sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}$

（4）$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} bc + a^2 & ab + bd = b(a+d) \\ ac + cd = c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = O$

$\rightarrow (i) bc = 0 \rightarrow a = d = 0$

$\rightarrow (a-d)^2 + 4bc = 0, \rho = 0$（重解）、固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad or \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(ii) bc \neq 0 \rightarrow a + d = 0, bc = -a^2 \rightarrow a = -d, bc = -a^2$

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow (a-d)^2 + 4bc = 4a^2 - 4a^2 = 0, \rho = 0$（重解）、固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

発展問題　1. 行列A **とベクトル**$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

があり、関係式$\begin{cases} Aa_1 = 2a_1 \\ Aa_2 = a_2 \\ Aa_3 = 3a_3 \end{cases}$ **が成り立つとする。以下に答えよ。**

（1）a_1, a_2, a_3 **は互いに直交することを示せ。（2）**$r = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ **を**a_1, a_2, a_3 **で表せ。（3）**$Ar, A^2 r$ **を求めよ。（4）**$A^n r$ **を求めよ。**

2. n **次正方行列の固有値とその転置行列の固有値は同じであることを示せ。**

３．3 次元空間の原点をO, 点A の位置ベクトルを$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$で表す。点$A$ を通り、方向ベクトルが$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}(\neq \vec{0})$ である直線l が与えられている。以下に答えよ。

(1) 直線l の方程式を書け。

(2) 空間に位置ベクトルが$\vec{p}=\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$である点が与えられた時に、点$P$ に最も近いl 上の点をQ とする。点Q の位置ベクトル$\vec{q}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$を、$\vec{q}=L\vec{p}+\vec{b}$ の形で表せ。但し、$L, \vec{b}$ は直線l だけで定まり、$\vec{q}, \vec{p}$ には無関係な行列とベクトルである。

(3) 行列L の階数を求めよ。

(4) 行列L の固有値、固有ベクトルを求めよ。

４．A を3 次正方行列でその成分は全て実数であり、$A^3=I, A\neq I$ を満たしているとする。以下に答えよ。

(1) 行列A^2+A+I は逆を持たないことを示せ。

(2)$\vec{v}\in R^3$ を行列A^2+A+I の固有値0 に対する固有ベクトルとする。ベクトル$\vec{v}$ と$A\vec{v}$ は一次独立であることを示せ。

５．（１）単位行列ではない２次の直交行列の例を挙げよ。

（２）直交行列の固有値は絶対値が１の複素数になることを示せ。

６．行列$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{8} & 1 \end{pmatrix}$について以下に答えよ。

（１）A の固有値（λ_1, λ_2）・正規化された固有ベクトル（$\vec{p}_1, \vec{p}_2$）を求めよ。

（２）任意のベクトル$\vec{x}$ は、適当な定数c, d を用いて$\vec{x}=c\vec{p}_1+d\vec{p}_2$ と書ける。このことから、$A^n\vec{x}$ はどのように表現されるか。

（３）ベクトル$\vec{x}$ に対して、ベクトルの列$\{A^n\vec{x}\}$ は、平面上の点列を表す。この点列の挙動について述べよ。

７．$A=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ として以下に答えよ。

（１）$S_\theta=(\cos\theta)A+(\sin\theta)B$ の固有値・固有ベクトルを求めよ。

（２）$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする。二次形式$\vec{x}^t S_\theta \vec{x} = c (c \neq 0)$ の表す図形は何か。

８．ある実数a に対して、行列$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}$ が一次独立なベクトル$\vec{x}, \vec{y}$ に対して、$\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}$ が固有ベクトルであるという。a の値を求めよ。

９．行列$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -6a+3 & 4a-1 & 8a-1 \\ 3a-\frac{3}{2} & -2a+1 & -4a \end{pmatrix}$ に対して以下に答えよ。

（１）固有値を求めよ。

（２）一次独立な固有ベクトルを３つ持つ条件を求めよ。

１０．（１）ベクトル$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 2 \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ のなす角を求めよ。

（２）行列A が$A\vec{a} = \vec{b}, A\vec{b} = \vec{a}$ を満たし、$\det A = 2$ であるときに、行列A の固有値を求めよ。

１１．行列$A = \begin{pmatrix} 2 & -a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix}$ が固有値1 を持ち、更に、ベクトル$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が1 とは異なる固有値λ に対する固有ベクトルであるとする。このときに、

（１）定数a, b, c, λ を定めよ。

（２）行列A の固有値1 に対する固有ベクトルを求めよ。

１２．行列$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が-1 を固有値として持つように、定数a を定めよ。そのときに、最大固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

1.2.4　問題 *5-1*

（1）$\begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta \end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -3, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow 3. T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, T^t AT = D, D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. P^{-1}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}P = D, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. P^{-1}AP = D, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

（4）特性多項式、$X^3 - 3aX^2 + \left(3a^2 - 3\right)X + \left(2a - a\left(a^2 - 1\right) - 2\right)$

固有値 $X = 0 \to 2a - a\left(a^2 - 1\right) - 2 = -(a+2)(a-1)^2 = 0$

$(i) a = 1, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(ii) a = -2, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

（5）$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = D, D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

発展問題　1．**行列**$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&1&1&1\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{pmatrix}$**について以下に答えよ。**

（1）固有値$\lambda_j,(\lambda_1>\lambda_2=\lambda_3>\lambda_4)$ **を求めよ。**

（2）$a=1$ **のときに、固有値**λ_1,λ_4 **に対する単位固有ベクトルを求めよ。**

（3）行列A **が対角化可能である為には固有値**$\lambda_2=\lambda_3$ **に対する固有ベクトルが**2 **個必要である。**

(i)$a=1$ **の場合に、固有値**$\lambda_2=\lambda_3$ **に対に対する固有ベクトルを求めよ。**

(ii)$\lambda_2=\lambda_3$ **に対する固有ベクトルが**2 **個存在する為の定数**a **の値を求めよ。**

(iii)(ii) **の場合に、固有値**$\lambda_2=\lambda_3$ **に対対する規格直交化された固有ベクトルを求めよ。**

2．行列$A=\begin{pmatrix}a&-a&0\\-b&2b&-b\\0&-a&a\end{pmatrix}$**について以下に答えよ。**

（1）行列A **の固有値を求めよ。**

（2）行列A **の固有ベクトル**$\{\vec{u}_j\}_{j=1,2,3}$ **を求めよ。**

（3）固有ベクトル$\{\vec{u}_j\}_{j=1,2,3}$ **が直交系になる条件を求めよ。**

（4）行列$P=\begin{pmatrix}\vec{u}_1&\vec{u}_2&\vec{u}_3\end{pmatrix}$ **を用いて行列**A **を対角化せよ。**

（5）$A^3-2(a+b)A^2+a(a+2b)A$ **を求めよ。**

3．複素数a,b **について、行列**$A=\begin{pmatrix}0&-ab&0\\0&a+b&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ **対角化可能である条件を求めよ。**

1.2.5　問題 5-2

1.（1）特性多項式: $X^3-6X^2+12X-8=(X-2)^3$, 固有値；2

（2）$\lambda=2$; 固有ベクトル $A-2E=\begin{pmatrix}3&-3&6\\1&-1&2\\-1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0, x-y+2z=0.$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x+2z\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{x}=a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, e_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

拡大固有ベクトル；$(A-2E)\,\vec{u}=\vec{x}_1, (x-y+2z)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+$
$b\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a+2b \\ b \end{pmatrix}.$

$$\begin{cases} a=3, \\ b=-1 \\ x-y+2z=1 \end{cases}, \vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ x+2z+1 \\ z \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$A\vec{x}_1=2\vec{x}_1, Ae_1=2e_1, A\vec{u}_3=2\vec{u}_3+e_1 . e_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3=$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$A(\vec{x}_1, e_1, \vec{u}_3)=(2\vec{x}_1, 2e_1, 2\vec{u}_3+e_1)=(\vec{x}_1, e_1, \vec{u}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$AP=PJ, J=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} . P^{-1}AP=$
$J . A=PJP^{-1}$

（3）$A=PJP^{-1}, A^n=PJ^nP^{-1}, J^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$

$$A^n=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{n-1}(2-3n) & 3\cdot 2^{n-1}n & 6\cdot 2 \\ 2^{n-1}(4-n) & 2^{n-1}(n-2) & 2 \\ 2^{n-1}n & -2^{n-1}n & 2^n(1 \end{matrix}$$

（4）$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{pmatrix} 2^{n-1}(2-3n) & 3\cdot 2^{n-1}n & 6\cdot 2^{n-1}n \\ 2^{n-1}(4-n) & 2^{n-1}(n-2) & 2^n n \\ 2^{n-1}n & -2^{n-1}n & 2^n(1-n) \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} -3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}2^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}2^n & -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}2^{n-1} & 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}2^{n-1} \\ -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}2^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}2^n & -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}2^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}2^{n-1} & 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}2^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}2^{n-1} & -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}2^{n-1} & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}2^n-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2e^2 & -3e^2 & 6e^2 \\ e^2 & 0 & 2e^2 \\ e^2 & -e^2 & -e^2 \end{pmatrix}$$

2．$(i)(A-\lambda E)^3\vec{p}_3 = 0 \to (A-\lambda E)(A-\lambda E)^2\vec{p}_3 = 0 \to (A-\lambda E)\vec{p}_1 = 0 \to A\vec{p}_1 = \lambda\vec{p}_1$

$(ii)(A-\lambda E)\vec{p}_3 = \vec{p}_2 \to \vec{p}_1 = (A-\lambda E)^2\vec{p}_3 = (A-\lambda E)\vec{p}_2$

(iii) 行列 A の特性多項式は、 $X^3-3X^2+3X-1=(X-1)^3$、 固有値は 1、固有ベクトル $\vec{p}_1 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda E)\vec{p}_2 = \vec{p}_1, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to z=0, y+2z = c, x = d \to \vec{p}_2 = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda E)\vec{p}_3 = \vec{p}_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \to z = c, y+2z = d, x = k \to \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} k \\ d-2c \\ c \end{pmatrix}$

$(iv)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3．（1）特性多項式: $X^3-4X^2+5X-2=(X-2)(X-1)^2$. 固有値・固有ベクトル: $a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1, b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2$

$\lambda = 1, \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$について、$(A-E)\vec{q} = \vec{p}$を考えると、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} y \\ z-x \\ y-x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y=1, x=z.$ 即ち、$\vec{q} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ c \end{pmatrix}.$

（2）$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\begin{cases} A\vec{r} = 2\vec{r} \\ A\vec{p} = \vec{p} \\ A\vec{q} = \vec{q} + \vec{p} \end{cases}, A(\vec{r}, \vec{p}, \vec{q}) =$

$(2\vec{r}, \vec{p}, \vec{q}+\vec{p}) = (\vec{r}, \vec{p}, \vec{q}) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

だから、$AP = PJ, P = (\vec{r}, \vec{p}, \vec{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, J =$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（3）$A = PBP^{-1}, A^n = PB^nP^{-1}, B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} n-2^n+2 & n & 2^n-n-1 \\ 1-2^n & 1 & 2^n-1 \\ n-2^{n+1}+2 & n & 2^{n+1}-n-1 \end{pmatrix}$

４．(I)$B\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\vec{v}_1.$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-y \\ x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2x \\ 2y-a \end{pmatrix}, \begin{cases} -x-y = a \\ x+y = -a \end{cases}$

$\begin{cases} x+y = -a \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, a = -(\cos\theta + \sin\theta) = -\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}).$

$\theta = \frac{\pi}{4}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, a = -\sqrt{2}$

(II)$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A.B = PAP^{-1}, B^n = PA^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -(n+1)\sqrt{2}2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n(1-n) & -(1+n)2^n \\ 2^n(n+1) & 2^n(n+3) \end{pmatrix}$$

（参考問題）１．行列$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$**について以下に答えよ。但し、定数は実数。**

(I)A^2, A^3, A^n **を求めよ。**

（解）$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}.$
$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

帰納法で証明

[STEP1]$n = 1;$ 明らか。

[STEP2]$n; o.k. A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} aa^n & a^nb + a^nbn \\ 0 & aa^n \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^nb \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$

（注意）行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の特性多項式は、$X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.

固有値 2（重解)、固有ベクトルは、$(B-2E)\vec{v} = \vec{0}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 即ち、$B\vec{v}_1 = 2\vec{v}_1$

拡大固有ベクトル $\vec{v}$ は、$(B-2E)\vec{v} = \vec{v}_1, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y \\ x+y \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y = -1-x,$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ -1-x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = x\vec{v}_1 + \vec{v}_0, \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. B\vec{v}_0 =$
$2\vec{v}_0 + \vec{v}_1.$

$P = (\vec{v}_1, \vec{v}_0), BP = B(\vec{v}_1, \vec{v}_0) = (B\vec{v}_1, B\vec{v}_0) = (2\vec{v}_1, 2\vec{v}_0 + \vec{v}_1) = (\vec{v}_1, \vec{v}_0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$
$PJ, (J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})$

２．実数a に対して、行列$A = \begin{pmatrix} 0 & -1+a & 2-a \\ -2 & -2+3a & 5-3a \\ -2 & -2+2a & 5-2a \end{pmatrix}$ とする。以下に答えよ。

（１）$a = 1$ の場合に固有値を求めよ。

（２）$a = 1$ の場合に、行列は対角化可能か。可能ならば対角化し、そうでないなら理由を述べよ。

（３）行列A が対角化できない為のa の値の条件を示せ。

（解）（１）$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 固有値: $1, 2$

（２）固有値・固有ベクトル: $c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1, c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2.$

ここで、ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ は互いに独立であるから、行列 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ は正則行列であり、逆 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を持つ。よって、行列 A は $P^{-1}AP = D, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と対角化できる。

（3）行列の特性多項式は、$X^3-(a+3)\,X^2+(3a+2)X-2a = (X-1)\,(X-2)\,(X-a)\,.$
よって、固有値は、$1, 2, a.$

$(i)a \neq 1, 2$ ならば、行列が異なる固有値を持ち、対応する固有ベクトルは独立だから、対角化できる。

$(ii)a = 1$ ならば、（２）により、対角化できる。

$(iii)a = 2$ の場合;$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 固有値•固有ベクトル: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\vec{x}_1 \leftrightarrow 1, c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = c_2\vec{x}_2 \leftrightarrow 2$ であり固有ベクトルが 2 つだけなので、対角化できない。

このとき、拡大固有ベクトルは、$(A-2E)\vec{x} = \vec{x}_2$ から、

$(A-2E)\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2x \\ 2y-2x-z \\ 2y-2x-z \end{pmatrix}$ により、

$$\begin{pmatrix} y-2x \\ 2y-2x-z \\ 2y-2x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

よって、$\begin{cases} y-2x=1 \\ 2y-2x-z=2 \to y-z=1 \end{cases}$ $,\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y-1}{2} \\ y \\ y-1 \end{pmatrix} =$

$c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

だから、$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ として、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

（Jordan の標準形）

３．行列$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **について以下に答えよ。**

（1）行列A **の固有値**λ **とその固有ベクトル**$\vec{p}$ **の組**$(\lambda, \vec{p})$ **の中で**$(A-\lambda E)\vec{q} = \vec{p}, (\vec{q} \neq 0)$ **が成り立つベクトル**$\vec{q}$ **が存在するような組を求めよ。**

（2）（1）を用いて$AP = PB$ **が成り立つような上三角行列**B **と正則行列**P **を求めよ。**

（3）（2）を用いてA^n **を求めよ。**

（解）（1）特性多項式: $X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-2)(X-1)^2$. 固有値・固有ベクトル: $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1, b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2$

$\lambda = 1, \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、$(A-\lambda E)\vec{q} = \vec{p}$ を考えると、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} y \\ z-x \\ y-x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ よって、$y=1, x=z$. 即ち、$\vec{q} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$.

（2）$\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ とすると、$\begin{cases}A\vec{r}=2\vec{r}\\A\vec{p}=\vec{p}\\A\vec{q}=\vec{q}+\vec{p}\end{cases}$ $,A\left(\vec{r},\vec{p},\vec{q}\right)=(2\vec{r},\vec{p},\vec{q}+\vec{p})=$
$(\vec{r},\vec{p},\vec{q})\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

だから、$AP=PB,P=(\vec{r},\vec{p},\vec{q})=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix},B=$
$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

（3）$A=PBP^{-1},A^n=PB^nP^{-1},B^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A^n=PB^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}n-2^n+2&n&2^n-n-1\\1-2^n&1&2^n-1\\n-2^{n+1}+2&n&2^{n+1}-n-1\end{pmatrix}$

発展問題　1．**行列**$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\end{pmatrix}$ **について以下に答えよ。**

（1）固有多項式と固有値を求めよ。

（2）固有ベクトル$\vec{p}_1$ **及び拡大固有ベクトル**$\vec{p}_2$ **を求めよ。**

（3）線形写像$T;R^2\to R^2,T(\vec{x})=A\vec{x}$ **の（2）で求めた基底**$\vec{p}_1,\vec{p}_2$ **に関する表現行列を求めよ。**

2．**行列**$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ **について以下に答えよ。**

（1）A^2,A^3,A^4 **を求めよ。**

（2）整数$n(\geq 0)$ **について**A^{3n},A^{3n+1},A^{3n+2} **を求めよ。**

（3）行列A **の固有多項式を求めよ。**

（4）行列A **の最小多項式を求めよ。**

（5）行列A **を** $Jordan$ **の標準形に直せ。**

3．行列$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&a\end{pmatrix}$ **について以下に答えよ。**

（1）行列A **の固有値・固有ベクトルを求めよ。**

（２）行列A が対角化できる為の定数a の条件を求めて、対角化せよ。

（３）（２）の条件を満たさないときに行列A を $Jordan$ の標準形に直せ。

４．行列$A = \begin{pmatrix} 1 & k^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について以下に答えよ。

（１）行列A の固有値・固有ベクトルを求めよ。

（２）行列A が対角化できる為の定数k の条件を求めて対角化せよ。

（３）（２）の条件を満たさないときに行列A を $Jordan$ の標準形に直せ。