1　連立方程式

1.1　一元方程式

方程式 $ax = b$ を解くと、もしも $a \neq 0$ ならば、両辺を a で割って $x = \frac{b}{a}$ となる。

1.2　連立方程式

連立方程式

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1...(1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2...(2) \\ ... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i...(i) \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m...(m) \end{array}\right. \quad .....(1.1)$$

は、行列とベクトルを用いて次のように簡単に書ける

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad ...(1.2)$$

但し、行列 A（**係数行列**という）とベクトル $\vec{x}$ および $\vec{b}$ は以下のように決める。
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1j} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2j} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{ij} & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mj} & . & a_{mn} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_j \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_j \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.m \neq$
n であってもよいが暫くは $m = n$ としておく。

もしも行列 A の逆 A^{-1} があればそれを (1.2) の両辺に左から掛けて

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}(\textbf{クラーメル}\text{の公式})...(1.3)$$

となり方程式は解ける。

（注意）（１）行列を表すのに、$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ または、簡単に $A = (a_{ij})$ 等を用いる。

（２）**逆行列の計算**；行列 $A,(m=n)$ に対して逆行列 A^{-1} は、A の行列式の値 $|A|$（$=\det(A)$）が零でない時に（行列 A は**正則**であるという）存在する。その場合、逆行列 A^{-1} は次のようである。

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A_{ji})_{1\le i\le n,1\le j\le n}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & . & A_{j1} & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & A_{j2} & . & A_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1i} & A_{2i} & . & A_{ji} & . & A_{jn} \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & A_{jn} & . & A_{nn} \end{pmatrix}$$

但し、ここで A_{ij} はもとの行列 A の (i,j) 余因子とよばれるもので以下のように

与えられる $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}, D_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & . & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & . & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & . & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & . & a_{(i+1)n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$ ◀

（３）以下では主に係数行列 A の逆が無い（$\det(A)=0$）場合を考える。また、簡単のために右辺の $b_i,(1\le i\le n)$ は全て 0 であるとする。このような場合に方程式を**斉次方程式**と呼ぶ。斉次方程式は係数行列 A が逆を持つときには $x_i=0,(1\le i\le n)$ が解でそれ以外に解を持たない。

幾つかの例題

例題$1-2-1.$ $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3x+4y-2z=0 \\ 4x-2y+3z=0 \end{cases}$

このときには $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$ で A は正則だから逆を持っている。従って、$x=y=z=0$ が解。◀

例題$1-2-2.$ $\begin{cases} x+y+z=0........(1) \\ x+2y+3z=0.....(2) \\ 2x+3y+4z=0...(3) \end{cases}$

このときに A の行列式の値は 0 になっていて、しかも明らかに、$(1)+(2)=(3)$ だからこの時には方程式は実質的には２個しかないので例えば、$\begin{cases} x+y+z=0........(1) \\ x+2y+3z=0....(2) \end{cases}$ を解く。詳しく言えば z を右辺に移項して、$\begin{cases} x+y=-z........(1) \\ x+2y=-3z...(2) \end{cases}$.

この連立方程式を x,y について解くと、$y=-2z,x=z$ を得る。この時に z は任意に取れる。従って解は、$x=z,y=-2z,z$; 任意となる。

この例では、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ であるが $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ であることに注意しておく。◀

例題$1-2-3.$ $\begin{cases} x+y+z=0..........(1) \\ 2x+2y+2z=0.....(2) \\ 3x+3y+3z=0.....(3) \end{cases}$

このときに A の行列式の値は明らかに 0 になっていて、しかも明らかに、$2\times(1)=(2), 3\times(1)=(3)$ だからこの時には方程式は実質的には 1 個しかないので例えば、$x+y+z=0$ だけを解けば $z=-x-y$ を得る。このときに x と y は任意に取れる。従って解は、$z=-x-y, x, y;$ 任意となる。この例では、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ でしかも $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ など全ての二次の行列式の値も 0 であることに注意しておく。◀

例題$1-2-4.$ $\begin{cases} 0x+0y+0z=0 \\ 0x+0y+0z=0 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$

この方程式は明らかに x, y, z の全てが任意に取れる。◀

1.2.1 問題 *1-1*

連立方程式 $\begin{cases} x+2y-z=0...(i) \\ 3x+8y-3z=0...(ii) \\ 2x+y-2z=0...(iii) \end{cases}$ を解け。

1.3 連立方程式の係数行列のランク（$rank$）と連立方程式の解

先ず、「$m\times n$ 行列 A の**ランク（**$rank$**、階数）**が $k, (k \leq \min(n, m)$ である」とは

”行列 A から作られる全ての $(k+1)$ 次以上の正方行列の行列式の値が 0 で、
k 次の正方行列のうちで行列式の値が 0 でないものが少なくとも 1 つある”

こととする。

（注意）同値な条件は問題１－２参照のこと。

　連立方程式

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

について、

「自由に選べる解の個数（＝**解の自由度**）」＋「係数行列Aの**ランク**」＝**未知数の個数**...$(*)$

更に、連立方程式

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

について、

”連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$が解をもつのは、
「$rank(A) = rank(A\vec{b})$」が成り立つ場合に限る”

このときに、矢張り上の関係 $(*)$ が成立する。行列 $B = (A\vec{b})$ を連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の**拡大係数行列**と呼ぶ。

　以下、$A\vec{x} = \vec{0}$ の場合に $(*)$ の理由を示す。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k + a_{1(k+1)}x_{k+1} + ... + a_{1n}x_n = 0.........(1) \\ ... \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kk}x_k + a_{k(k+1)}x_{k+1} + ... + a_{kn}x_n = 0.........(k) \\ a_{(k+1)1}x_1 + a_{(k+1)2}x_2 + ... + a_{(k+1)k}x_k + a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1} + ... + a_{(k+1)n}x_n = 0...(k+1) \\ ... \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nk}x_k + a_{n(k+1)}x_{k+1} + ... + a_{nn}x_n = 0........(n) \end{cases}$$

いま、$A_{kk} = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1k} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & ... & ... & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$ とし、$(k+1)$ 以上の全ての行列式の値は 0 とする。$k+1 \leq i \leq n$ となる i を固定し、任意の $1 \leq j \leq n$ に対して、仮定から

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} & a_{1j} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & a_{i1} & ... & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

が全ての i, j について成り立つ。この行列式を一番右の列で展開すると、$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{kj}A_{kj} + a_{ij}A_{ij} = 0$ となるが、A_{mj} は上の行列の

(m,j) 余因子で j の選び方によらないことに注意しておく。仮定から、$A_{kk}\neq 0$ なので

$$a_{ij}=\frac{A_{1j}}{A_{kk}}a_{1j}+...+\frac{A_{kj}}{A_{kk}}a_{kj}=\alpha_1 a_{1j}+\alpha_2 a_{2j}+...+\alpha_k a_{kj}$$

と書けて上の注意から各 α_m は j に関係しない。ここで j として、$1,2,...k$ は勿論 $(k+1),(k+2),...,n$ と取れるので、式 i が式全体として

$$i=\alpha_1\times(1)+\alpha_2\times(2)+...+\alpha_k\times(k)$$

となっていることがわかる。

次に、$i=k+1,k+2,...,n$ とすれば、$(1)\sim(k)$ から $(k+1)\sim(n)$ が出ることがわかる。よって $(1)\sim(k)$ だけを解けば良いことがわかった。つまり、

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+.........+a_{1k}x_k=-(a_{1(k+1)}x_{k+1}+........+a_{1n}x_n)........(1) \\ ... \\ ... \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+.........+a_{kk}x_k=-(a_{k(k+1)}x_{k+1}+.......+a_{kn}x_n).........(k) \end{cases}$$

として未知数 $x_1,...,x_k$ に関する連立方程式とみて解く。この時に、係数行列の行列式の値は仮定によって 0 ではないので、$type$(１) の方程式として一意に解ける。この時に、右辺に移項した変数 $x_{k+1},x_{k+2},...x_n$ は自由に取れるので"「自由な解の個数」$=n-k$"であることもわかる。以上の議論は右辺の各 b_i が 0 でないときにも殆んど同じように成り立つ。

例題$1-1$. 連立方程式 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ ax+y=b \end{cases}$ ...$(*)$ について以下の問に答えよ。

（１）$a=0,b=1$ の場合に解を求めよ。

（２）$a=-1,b=-1$ のときに、方程式の解を求めよ。

（３）方程式が解を持たないのは、どのような場合か。

（解法） $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, B(a,b)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$ とおく。

（１）$a=0,b=1$ の場合には連立方程式は、$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ y=1 \end{cases}$ となり、

係数行列 $A(0)$ 及び拡大係数行列 $B(0,1)$ はそれぞれ、$A(0)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B(0,1)=$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

まず、行列 A の行列式の値 $|A|$ を計算すると、$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ だから、行列 A は正則で逆行列 A^{-1} が存在する。連立方程式 $(*)$ の両辺に左から A^{-1} をかけて、方程式の解 $x = 2, y = 1, z = -2$ を得る。

(2) $a = -1, b = -1$ の場合には、連立方程式は $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 ...(i) \\ 2x - y + z = 2 ...(ii) \\ -x + y = -1 ...(iii) \end{cases}$ $...(**)$ となり、係数行列 $A(-1)$ 及び拡大係数行列 $B(-1,-1)$ はそれぞれ $A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B(-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

行列 A の階数を計算すると、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\to(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)\to(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり、$rankA = 2$ となる。またこの場合、行列 B は第１列と第４列が同じなので、行列 B の階数が行列 A の階数と同じになって、方程式 $(**)$ が解を持つ。この場合、$(i) = 3 \times (ii) + 5 \times (iii)$ が成り立ち本質的には方程式は２つである。また、自由に選べる解の個数（解の自由度）は、$(3-2) = 1$ である。ここでは $(ii), (iii)$ を解く。(iii) より $y = x - 1$ であり、これを (ii) に代入して $z = 2 - 2x + y = 2 - 2x + x - 1 = 1 - x$ を得る。従って、方程式の解は、$x = free, y = x - 1, z = -x + 1$ である。

(3) $rankA = 3$ の場合は、$rankB = 3$ となり、方程式は解を持つ。従って、方程式が解を持たない為には、$rankA \neq 3$ が必要条件である。明らかに、$rankA \geq 2$ なので、方程式が解を持たない為には、$rankA = 2$ でなければならない。$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\to(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)\Leftrightarrow(2),(3)-(2)\to(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ だから、$rankA = 2$ であるための条件は、$a = -1$ である。

このときに、$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\to(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)\to(3)}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \underset{(b\neq-1)}{\xrightarrow{(b+1)\times[1]+[4]\to[1]}}$

$\begin{pmatrix} b+1 & 3 & 0 & 0 \\ 2(b+1) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2[1]+[2]\to[2]} \begin{pmatrix} b+1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} b+1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 0 \end{pmatrix}$ となるので、$b \neq -1$ の場合は、$rankB = 3$ となり、方程式は解を持たない。

$b = -1$ の場合は、上の計算で、$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

となり、$rankB = 2$ であり方程式が解を持つ。

従って、$a = -1, b \neq -1$ の場合に限って方程式は解を持たない。◀

例題$1-2.$ 連立方程式 $\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ay - z = -2 \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$ について以下の問に答えよ。

（1）係数行列 A の行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

（2）方程式が次のようになる為の a の値の条件をいえ。

(a) ただ一組の解を持つ。

(b) 2つ以上の解を持つ。

(c) 解を持たない。

（解法）（1） $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 10 + 3a = (a+5)(a-2)$

（2） *(a)* ただ一組の解を持つためには、係数行列 A の行列式の値 $|A|$ について、$|A| \neq 0$ が成り立てば良い。この場合（1）によって、$a \neq 2, -5$ となれば良い。

(b) このためには、(a) 以外で、しかも係数行列 A と拡大係数行列 B に対して、$rankA = rankB$ が成り立てば良い。

(i)$a = 2$ の場合.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[3]\to[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-[2]\to[1]}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $rankA = 2$ である。次ぎに、$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{[2]-[3]\to[2]}{\longrightarrow\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overset{[1]-[2]\to[1]}{\longrightarrow\to} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ だから、$rankB = 2$ である。従って、この場合は $rankA = rankB$ が成り立ち、方程式は解を持つ。

(ii)$a = -5$ の場合。$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \overset{[2]+[3]\to[3]}{\longrightarrow\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow\to$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{[3]-[1]\to[3]}{\longrightarrow\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. だから $rankA = 2$ である。次ぎに、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & -5 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & -5 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(3)+(2)\to(3)}{\longrightarrow\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(3)+(1)\to(3)}{\longrightarrow\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(3)-(1)\to-(3)}{\longrightarrow\to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overset{2(2)-(3)\to(2)}{\longrightarrow\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ だから、$rankB = 3$ である。従って、この場合は $rankA < rankB$ が成り立ち、方程式は解を持たない。◀

例題$1-3.A$ は $m \times n$ 行列、$\vec{b}$ は m 次の実ベクトルとして、連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}...(*), A\vec{x} = \vec{0}...(**)$ を考える。以下に答えよ。

(i) 方程式 $(*)$ の解 $\vec{x}_0$ と方程式 $(**)$ の解 $\vec{x}_1$ の和 $\vec{x}_0 + \vec{x}_1$ は方程式 $(*)$ の解であることを示せ。

(ii) 方程式 $(*)$ の 1 つの解を $\vec{x}_0$ とする。方程式 $(*)$ の任意の解 $\vec{x}$ は、方程式 $(**)$ の解 $\vec{x}_1$ を用いて $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$ と表されることを示せ。

(iii) 方程式 $(**)$ の解の全体 W_1 は、n 次元ユークリッド空間 R^n の線形部分空間であることを示せ。

(iv)A の転置行列の列ベクトルで生成される R^n の線形部分空間 W_2 をとす

ると、W_2 は (iii) で求めた W_1 の直交補空間になることを示せ。

（解法） (i)$A(\vec{x}_0+\vec{x}_1)=A\vec{x}_0+A\vec{x}_1=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$

(ii)$\begin{cases} A\vec{x}=\vec{b} \\ A\vec{x}_0=\vec{b} \end{cases} \rightarrow A(\vec{x}-\vec{x}_0)=A\vec{x}-A\vec{x}_0=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}\rightarrow \vec{x}-\vec{x}_0=\vec{x}_1;(**)$ の解。$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{x}_1$

(iii)$\begin{cases} A\vec{x}=\vec{0} \\ A\vec{y}=\vec{0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (i)A(\vec{x}+\vec{y})=\vec{0} \\ (ii)A(k\vec{x})=\vec{0} \end{cases}$

(iv)$A=\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ . \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$ とすると、$A^T=\begin{pmatrix}\vec{a}_1^T\vec{a}_2^T...\vec{a}_n^T\end{pmatrix}$ だから、$W_2=\{\vec{a}=c_1\vec{a}_1^T+c_2\vec{a}_2^T+...+c_n\vec{a}_n^T\}.$

$A\vec{x}=\vec{0}$ 即ち、$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ . \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}$ から、$\vec{a}_1\cdot\vec{x}=\vec{a}_2\cdot\vec{x}=...=\vec{a}_n\cdot\vec{x}=0.$ 故に、$\vec{a}\cdot\vec{x}=0,\vec{a}\in W_2.$

1.3.1 問題 *1-2*

1. 以下の（1）〜（3）に答えよ。

（1）行列 A の階数 $(rank)$ の定義について、以下の文章を完成せよ。

$(i)A$ の 0 でない小行列の.....。

$(ii)A$ の..... な列ベクトルの最大個数。

$(iii)A$ の..... な行ベクトルの最大個数。

$(iv)A$ で定まる線形変換の値域の....。

（2）行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

（3）連立方程式 $\begin{cases} x+4z+2u=2 \\ 3x+y+2z+6u=3 \\ x-2y-z+2u=-1 \end{cases}$ を解け。

2. 連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+az=a-3 \end{cases}$ について以下の問に答えよ。

（1）係数行列の階数を答えよ。

（2）拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & a & a-3 \end{pmatrix}$ の階数を答えよ。

（3）この方程式が解を持つかどうかを判定し、解を持つ場合に解を求めよ。

3. 連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+5y-z+3u=0 \\ x+3y-z+2u=0 \\ 2x+3y+z+u=0 \end{cases}$ ...$(*)$ について以下の問に答えよ。

（1）$(*)$ の係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の列ベクトルのうちで、なるべく少ない個数の列ベクトルを用いて、それらの一次結合によりその他の列ベクトルを表せ。

（3）$(*)$ の解 x, y, z, u の中で、関数 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(u-1)^2$ を最小にする組を求めよ。

4. 連立方程式 $\begin{cases} y-2z=1 \\ 2x+2y+az=b \\ 4x+3y=b \\ 2x+y+z=c \end{cases}$ ...$(*)$ について以下の問に答えよ。

（1）方程式 $(*)$ の解がただ一組存在するように a, b, c の関係式を求めよ。また、その場合、解を求めよ。

（2）方程式 $(*)$ の解が三次元空間の中で直線になるときに、a, b, c の関係式を求めよ。また、その場合、その直線を求めよ。

5. 定数 a に対して、方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1+a \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \\ a+1 \end{pmatrix}$ が、解を持つような a とそのときの解を求めよ。

6. 連立方程式 $\begin{cases} 3x+(2-k)y=0 \\ x+ky=0 \end{cases}$ が非自明な解 ($x=y=0$ 以外の解) を持つ為には k の値は幾つであるか。また、その時の解も求めよ。

2　ベクトル空間

2.1　ベクトル空間の定義

一般に K を実数又は複素数として集合 X が K 上の**ベクトル空間**であるとは、”X の中の任意の要素（元）x, y と任意の K の元 k に対して**加法（足し算）**$x+y$ と**スカラー倍**kx とが定義されていて、次が成り立つ。

$(i)x+y$ が X の中にはいる
$(ii)kx$ が X にはいる

この定義からもわかるようにベクトル空間の概念は可成り広いものである。例えば、実数全体の集まり (R)、複素数全体の集まり (C)、ある区間で定義された関数の全体、... などたくさんの例が直ぐに思い浮かぶ。勿論、２年生で学んだ平面又は空間の中のいわゆるベクトルもこの仲間に入る。次に、あるベクトル空間 X がある時に、その部分空間の概念を定義する。あるベクトル空間 X が与えられているとして、X の部分集合 Y が**ベクトル部分空間**であるとは、

$$(i) x+y \text{ が } Y \text{ の中に入いる}$$
$$(ii) kx \text{ が } Y \text{ に入いる}$$

ことであるとする。

次に、ベクトル空間に内積が定義されているとし、部分空間 Y に対して

"Y の全ての元に直交する X の元全体から出来る集合"

を Y の**直交補空間**$Y^{\perp}$（これは再びベクトル部分空間になる）と呼ぶ。

例えば、X を平面上のベクトル全体とし、原点を通るある直線 L_1 について考えて直線 L_1 上の点 P と原点 O とを結んで出来るベクトル $\overrightarrow{OP}$ の全体（これは部分空間になる）を Y とする。この時に、Y の直交補空間 $Y^{\perp}$ は原点を通り直線 L_1 に直交する直線 L_2 を考え、直線 L_2 上の点 Q と原点 O とを結んで出来るベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の全体が作るベクトル空間である。

また、連立方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ の解全体はベクトル空間なる。

次に、ベクトル空間（又は、部分空間）の**基底（***base)* について触れておこう。

"ベクトル空間の中に n 個の**一次独立**（定義は後で触れる）なベクトルの組 $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ があってその空間の全ての元が $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ の一次結合で書ける"

ときに、$\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ をこの空間の *1* つの**基底系（基底の組）**と呼び、この**空間の次元**は n であるという。

（例）１． n 次元ユークリッド空間 $R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} ; x_j \text{は実数} \right\}$ はベクトル空間の代表的な例である。各要素（元）x_j が複素数の場合は C^n で表す。また、この空間の標準的な基底は、$\left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, .., \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. 実数を係数とする連立方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ の解全体は R^n のベクトル部分空間である。

3. ベクトル空間 R^n からベクトル空間 R^m への線形写像 f に対して、$Ker(f)$（核空間）及び $\mathrm{Im}(f)$（像空間）は、それぞれ１つの部分空間をなす。但し、$Ker(f)=\{\vec{x}\in R^n; f(\vec{x})=\vec{0}\}, \mathrm{Im}(f)=\{\vec{y}\in R^m; \vec{y}=f(\vec{x}), \vec{x}\in R^n\}$

4. ベクトル空間 V の元の組 $\{\vec{x}_j\}_{j=1}^n$ に対して、$\{\sum_{j=1}^n c_j\vec{x}_j; c_j\in R\}$ はベクトル空間 V の１つのベクトル部分空間になり、この空間のことを $\{\vec{x}_j\}_{j=1}^n$ で張られる空間と呼ぶ。各 $\sum_{j=1}^n c_j\vec{x}_j, (c_j\in R)$ を $\{\vec{x}_j\}_{j=1}^n$ の一次結合と呼ぶ。

5. 実数を係数とする二次関数の全体は１つのベクトル空間であるが、この空間の任意の元（言い換えれば、任意の実係数の二次関数）は、$\{x^2,x,1\}$ の一次結合で書かれ、$\{x^2,x,1\}$ は一次独立である。従って、$\{x^2,x,1\}$ はこの空間の基底であり次元は３である。

2.2 ベクトルの内積

ベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$ で各 x_i, y_i は実数または複素数とする。この時、ベクトル $\vec{x},\vec{y}$ の**内積（スカラー積）**$(\vec{x},\vec{y})$ を次で定義する。

$$(\vec{x},\vec{y})=\sum_{j=1}^n x_j\bar{y}_j=\vec{y}^*\vec{x}, (\bar{y}_j \text{は複素数の } y_j \text{複素共役})$$

但し、$\vec{y}^*=\bar{\vec{y}}^t=(\bar{y}_1,...,\bar{y}_n)$. 内積は $\vec{x}\cdot\vec{y}$ と書くこともある。

以下では、ベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ 又は行列 $A=(a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ に対して $(x_1x_2...x_n)$ 又は $(a_{ji})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ をベクトル $\vec{x}$ 又は行列 A の転置といい $\vec{x}^t, (or \quad {}^t\vec{x})$、$A^t, (or \quad {}^tA)$ で表す。

内積は性質 $\left\{\begin{array}{c} (i)(\vec{x},\vec{y})=\overline{(\vec{y},\vec{x})} \\ (ii)(\vec{x},\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x},\vec{y})+(\vec{x},\vec{z}) \\ (iii)(c\vec{x},\vec{y})=c(\vec{x},\vec{y}) \\ (iv)(\vec{x},\vec{x})\ge 0 \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{c} (1)(\vec{x},\vec{x})=\sum_{i=1}^n|x_i|^2=|\vec{x}|^2\ge 0 \\ (2)(\vec{x},\vec{y})=0\Leftrightarrow \vec{x}\perp\vec{y} \\ (3)|(\vec{x},\vec{y})|\le|\vec{x}|\cdot|\vec{y}| \end{array}\right.$

を持つ。

（注意）一般のベクトル空間 V において２つの要素（元）$\vec{x},\vec{y}$ についてスカラー量（実数又は複素数）$(\vec{x},\vec{y})$ が定義されていて、上の性質 $(i)-(iv)$ を満たすときに $(\vec{x},\vec{y})$ を V における**内積**とよぶ。このときに、$|\vec{x}|$ は**ノルム**の性質を持ち、$d(\vec{x},\vec{y})=|\vec{x}-\vec{y}|$ とすると $d(\vec{x},\vec{y})$ は**距離**の性質を持つ。また、ベクトル $\vec{x},\vec{y}$ の**外積**$\vec{x}\times\vec{y}$（**ベクトル積**）については、**「ベクトル解析」**を参

照のこと。

例（内積の例）. 区間 $[-1,1]$ で定義する変数 t について実係数の高々２次の多項式全体の作るベクトル空間を W とする。W の内積を $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, f,g\in W$ で定義するときに以下に答えよ。

（１）この内積 (f,g) に関する正規直交系を求めよ。

（２）関数 $f(t)=t^2+at+b\in W$ で (f,f) が最小になるものを求めよ。

（解）（１）関数の組 $\{1,t,t^2\}$ を選び、**シュッミトの方法**で直交系に直す。

$\vec{e}_1=\frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|},(\vec{f}_1=1),|\vec{f}_1|^2=\int_{-1}^{1}dt=2$

$\to \vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}},$

$\vec{f}_2=t-(t,\frac{1}{\sqrt{2}})\vec{e}_1=t-(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}tdt)\frac{1}{\sqrt{2}}=t,|\vec{f}_2|^2=\int_{-1}^{1}t^2dt=\frac{2}{3}$

$\to \vec{e}_2=\sqrt{\frac{3}{2}}t$

$\vec{f}_3=t^2-(t^2,\frac{1}{\sqrt{2}})\vec{e}_1-(t^2,\sqrt{\frac{3}{2}}t)\vec{e}_2=t^2-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}t^2dt-\frac{3}{2}(\int_{-1}^{1}t^3dt)t=t^2-\frac{1}{3},|\vec{f}_3|^2=\int_{-1}^{1}(t^2-\frac{1}{3})^2dt=\frac{8}{45}$

$\to \vec{e}_2=\sqrt{\frac{45}{8}}(t^2-\frac{1}{3})$

（２）$\int_{-1}^{1}(t^2+at+b)^2dt=\frac{2}{3}a^2+2b^2+\frac{4}{3}b+\frac{2}{5}=\frac{2}{3}a^2+2(b+\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{5}-\frac{2}{9})\to a=0,b=-\frac{1}{3}$

例題*2-1.* 空間 W を次のように定義する。問に答えよ。$W=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in R^4;\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2+x_3+x_4=0\end{cases}\right.$.

（１）空間 W の基底 (bases) を一組求めよ

（２）空間 W の直交補空間 $W^{\perp}$ の単位直交基底 (bases) を一組求めよ

（解法）*(1)*. 連立方程式 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$ の係数行列 A は、$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$ であり、その**階数 (rank)** は 2 である。従って、**解の自由度**（自由に選べる解の個数）は $4-2=2$ である。2 つの方程式から求める解は、$x_1=-x_2-x_3,x_4=-x_2-x_3,x_2,x_3;free$ である。これをベクトルの形で書けば、$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_1-c_2\\x_2\\x_3\\-c_1-c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ となる。この形から一組の bases として $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\vec{e}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ を選べばよい。

(2). 直交補空間を $W^\perp$ として、$W^\perp$ の元 $\vec{a}$ は $\vec{a}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ とした時に、$(\vec{a},\vec{e}_1)=(\vec{a},\vec{e}_2)=0$ から成分 a,b,c,d は方程式 $\begin{cases} -a+b-d=0 \\ -a+c-d=0 \end{cases}$ を満たす。この連立方程式の係数行列の rank は 2 であり、前と同様にして、解の自由度は 2 である. 方程式の解は、$b=a+d, c=a+d, a,d; free$ である。従って、$\vec{a}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る。従って、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が空間 $W^\perp$ の基底系になる。ここで、$W^\perp$ の直交基底系を得るには、$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の係数 a,d をベクトル $a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が、例えばベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に直交するように決める。ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ a+d \\ a+d \\ d \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ との内積が 0 になれば良いので、$a+(a+d)+(a+d)=0$ から $3a+2d=0, d=-\frac{3}{2}a.$ よって、$\vec{a}=a\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}=a'\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. 以下は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ の長さをそれぞれ 1 にして、$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ が空間 $W^\perp$ の 1 つの直交単位系になる。

（注）上では、$\begin{pmatrix} a \\ a+d \\ a+d \\ d \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するようにしたが、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と直交するように a,d を取れば、別の単位直交系が得られる。◀

例題2-2.$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\12\\-13\end{pmatrix}$ とする。次の問に答えよ。

（1）$\vec{a},\vec{b}$ が張る部分空間 W の直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ。

（2）$\vec{c}=\vec{x}+\vec{y}$, と書け。但し $\vec{x}$ は W の元で、$\vec{y}$ は $W^{\perp}$ の元であるとする。（このことを $\vec{x}\in W,\vec{y}\in W^{\perp}$ とかく）

（解法） *(1)*. $\vec{a},\vec{b}$ で張る空間 W の元は、m,n を任意の実数として、$m\vec{a}+n\vec{b}=\begin{pmatrix}4m+n\\m+n\\3n\end{pmatrix}$ と書けるので、空間 W の直交補空間 $W^{\perp}$ の元 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ は $(m\vec{a}+n\vec{b},\vec{x})=0$ となることから、$(4m+n)x+(m+n)y+3nz=0$ となる。この式が全ての実数 m,n にたいして成立するので、$m(4x+y)+n(x+y+3z)=0$ から $4x+y=0,x+y+3z=0$ が得られ、この連立方程式 $\begin{cases}4x+y=0\\x+y+3z=0\end{cases}$ は明らかに $rank=2$ で、従って自由に選べる解の個数は $3-2=1$ である。実際に解けば、$y=-4x,z=x,x;free$ となり、$\vec{x}=c\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ が得られる。

従って、直交補空間 $W^{\perp}$ の元は $c\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ の形をしたもの全てからなる空間となる。

(2). $\begin{pmatrix}1\\12\\-13\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ となる k,m,n を求める。連立方程式 $\begin{cases}4k+m+n=1\\k+m-4n=12\\3m+n=-13\end{cases}$ を解いて $k=1,m=-5,n=2$ を得る。

よって、$\begin{pmatrix}1\\12\\-13\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}+(-5)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\-15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix}$ となって、$\begin{pmatrix}-1\\-4\\-15\end{pmatrix}$ は W の元で、$\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の元である。

◀

例題2-3. 3 次元ベクトル空間 R^3 の 4 つのベクトル $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\vec{x}_2=$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、$L[\vec{x}_1, \vec{x}_2] = L[\vec{x}_3, \vec{x}_4]$ であることを示せ。但し、$L[\vec{x}, \vec{y}]$ は 2 つのベクトル $\vec{x}, \vec{y}$ によって張られる部分空間を表す。

（解法） 最初に、$\vec{x}_3, \vec{x}_4 \in L[\vec{x}_1, \vec{x}_2]$ が成り立つことを示す。その為には、適当な定数 a, b, c, d に対して $\begin{cases} \vec{x}_3 = a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 \\ \vec{x}_4 = c\vec{x}_1 + d\vec{x}_2 \end{cases}$ が成り立てば良い。詳しく書けば、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 及び $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

が成り立てば良い。これらの式が成立するには、方程式 $\begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 1 \\ 2b = 1 \end{cases} ...(*)$

及び $\begin{cases} 2c = -1 \\ c + d = 0 \\ 2d = 1 \end{cases} ...(**)$ を満たす定数 a, b, c, d が存在すれば良い。

方程式 $(*), (**)$ を解いて、解 $(a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}), (c = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{2})$ を得る。従って、$\vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$ 及び $\vec{x}_4 = -\frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$ と書ける。

次ぎに、$\vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$ 及び $\vec{x}_4 = -\frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$ から、連立方程式 $\begin{cases} \vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2 \\ \vec{x}_4 = -\frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2 \end{cases}$ を $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ について解けば、$\vec{x}_1 = \vec{x}_3 - \vec{x}_4, \vec{x}_2 = \vec{x}_3 + \vec{x}_4$ つまり、$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L[\vec{x}_3, \vec{x}_4]$ が成り立つ。以上により、主張が証明出来た。◀

例題 *2-4.* f を R^3 から R^3 への線形写像として、関係式 $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}, a \in R$ が成り立つとする。但し、$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。このときに、集合 $Ker(f) = \left\{\vec{x} \in R^3; f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$ は R^3 の部分空間であることを示し、その次元と基底を求めよ。

（解法） 線形写像 f に対応する行列を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とすると、

条件 $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$ から、関係

式 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$ を得る。

従って、$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$ となる。故に、$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -4 \\ 1 & a-1 & -2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & -4 \\ 1 & a-1 & -2 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a^2 - 8a + 12 = (a+3)(a-2)^2$ となるので、以下の 3 つの場合に分けて考える。

(i)$a \neq 2, -3$ の場合。$|A| \neq 0$ となるので、行列 A は逆行列 A^{-1} を持ち、連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解は、$\vec{x} = \vec{0}$ である。従って、この場合は、$Ker(f) = \{\vec{0}\}$ であり、$Ker(f)$ の次元は、0 である。また、基底は、$\vec{0}$ である。

(ii)$a = 2$ の場合。この場合は、$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ となり、方程式 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考えると、$\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 0 ...(1) \\ x + y - 2z = 0 ...(2) \\ -x - y + 2z = 0 ...(3) \end{cases}$

明らかに (1) $= 2\times$(2), (3) $= -$(2) なので、方程式の解は、$z = \frac{x+y}{2}, x; free, y; free$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \frac{c_1+c_2}{2} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ となり、$Ker(f)$ は二次元で、2 つのベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られるベクトル空間になり、基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

(iii)$a = -3$ の場合。この場合は、$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ となり、方程式

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ を考えると、$$\begin{cases} -3x+2y-4z=0...(1) \\ x-4y-2z=0...(2) \\ -x-y-3z=0...(3) \end{cases}$$

明らかに $2\times(3)-(2)=(1)$ なので、方程式の解は、(2) と (3) を解いて、

$x=-2z, y=-z, z; free,$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_3 \\ -c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_3\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり、

$Ker(f)$ は一次元で、ベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られるベクトル空間になり、基底は、$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。◀

（注意）$Ker(f)$ を写像 f の核という。線形写像 f に対して $Ker(f)$ はベクトル空間になる。

2.3 ベクトルの一次独立と一次従属

n 個のベクトル $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ が**一次独立**であるとは、

”関係式 $c_1\vec{a}_1+...+c_n\vec{a}_n=\vec{0}$ が成り立つのは全ての i について $c_i=0$ の場合に限る”

とする。一次独立でないときに**一次従属**であるという。

即ち、n 個のベクトル $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ が**一次従属**であるとは、

”どれかの i について $c_i \neq 0$ であって、しかも $c_1\vec{a}_1+...+c_n\vec{a}_n=\vec{0}$ となっている”

ことである。$c_1\vec{a}_1+...+c_n\vec{a}_n$ をベクトル $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ の**一次結合**という。**一次従属**のときには、どれかの i について、$\vec{a}_i = -\frac{c_1}{c_i}\vec{a}_1 - ... - \frac{c_{i-1}}{c_i}\vec{a}_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}\vec{a}_{i+1} - ... - \frac{c_n}{c_i}\vec{a}_n$ と書けるので、n 個のベクトル $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ が**一次従属**であるとは、”

どれか１つのベクトルが残りの他のベクトルの一次結合で書ける ” ことである。従って、$\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ が**一次独立**であるとは、” このうちのどの１つも残りのベクトルの一次結合で書けない ” ことである。

R^n の場合について詳しくしらべる。ベクトルを $\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ と書くと、

$c_1\vec{a}_1+...+c_n\vec{a}_n=\vec{0}$ は、$c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ a_{n2} \end{pmatrix}+...+c_j\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix}+...+$

$c_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。この関係式を、$\begin{cases} c_1a_{11}+c_2a_{12}+..+c_ja_{1j}+..+c_na_{1n}=0 \\ c_1a_{21}+c_2a_{22}+..+c_ja_{2j}+..+c_na_{2n}=0 \\ . \\ . \\ c_1a_{n1}+c_2a_{n2}+..+c_ja_{nj}+..+c_na_{nn}=0 \end{cases}$

と書き直して c_i を未知数とする連立方程式と見るとき全ての i について $c_i=0$ となる解だけを持つためには（$resp.$ どれかの i について $c_i\neq 0$ となる解を持つためには)、連立方程式の係数行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ の行列式の値 $|A|$ が 0 にならないことである（$resp.$0 になることである)。

従って、ベクトル $\vec{a}_i=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix}, i=1,...,n$ が**一次独立**（$resp.$ **一次従属**）

であることは、$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$($resp.=0$) と同じである。

（例）(1)$\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ だから一次独立。

(2)$\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ は、$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}=0$ だから一次従属で、関係式 $\vec{a}+(-2)\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ が成り立つことがわかる。◀

例題*2-5.* 行列 A について以下に答えよ。

$$A=\begin{pmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ a & -1 & a^2 & -1 \\ -a & 1 & -a^2 & -a \end{pmatrix}$$

(1)$|A|$ を計算せよ。

(2) 行列 A の逆行列が存在するための条件をいえ。

(3)$rank(A)=3$ となる条件をいえ。

(4)(3) の条件のもとで、行列 A によって決まる線形写像の核（$kernel$) の基底（$base$) を求めよ。ここで、線形写像 A の核とは、$A\vec{x}=\vec{0}$ となるベクトル $\vec{x}$ のことである。

（解法） *(1)* $\begin{vmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ a & -1 & a^2 & -1 \\ -a & 1 & -a^2 & -a \end{vmatrix} \overset{(1)+(4)\Longrightarrow(4),(2)+(3)\Longrightarrow(3),(1)+(2)\Longrightarrow(2)}{=} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1-a & 1-a & 1-a \\ a & a-1 & a^2-1 & a-1 \\ -a & 1-a & -a^2-a & -2a \end{vmatrix} =$

$a\begin{vmatrix} 1-a & 1-a & 1-a \\ a-1 & a^2-1 & a-1 \\ 1-a & -a^2-a & -2a \end{vmatrix}$

$=a(1-a)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1-a & -a^2-a & -2a \end{vmatrix} \overset{[2]-[1]\Longrightarrow[2]}{=} -a(a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1-a & -a^2-a & -2a \end{vmatrix}$

$=-a^2(a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-a & -2a \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a+1)$

(2)(1) から $a\neq 0,\pm 1$（注意；この場合は行列の $rank$ は 4）

(3)(1) から $a=0,\pm1$ の何れかである。以下順に $rank$ を計算する。

(i)$a=0$ の場合

$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)\Leftrightarrow(3),(3)\Leftrightarrow(4)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. だから、

$rank(A)=2$.

(ii)$a=1$ の場合

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(1)+(2)\Longrightarrow(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(2)+(3)\Longrightarrow(2)}{\longrightarrow}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.rank(A)=2$

(iii)$a=-1$ の場合。

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\1&1&1&1\\-1&-1&1&-1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow}{(4)-(2)\Longrightarrow(4)}\begin{pmatrix}-1&1&-1&0\\1&1&1&0\\-1&-1&1&0\\1&1&-1&0\end{pmatrix}\underset{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow}{[4]+[3]\Longrightarrow[4],[3]+[2]\Longrightarrow[3],[2]+[1]\Longrightarrow[2]}$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

だから、$rank(A)=3$

(4)(3) から $A=\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\1&1&1&1\\-1&-1&1&-1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}$ である。今ベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}$

が行列 A による線形写像の核になっているとすると $A\vec{x}=\vec{0}$ だから、$\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\1&1&1&1\\-1&-1&1&-1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ となって、x,y,z,u は次の連立方程式の解である。$\begin{cases}-x+y-z+u=0\\x+y+z+u=0\\-x-y+z-u=0\\x+y-z+u=0\end{cases}$

この連立方程式は係数行列 A の $rank$ が 3 だから自由に選べる解の個数は 1

であり、次の方程式を解けばよい。$\begin{cases}-x+y-z=-u...(1)\\x+y+z=-u...(2)\\-x-y+z=u...(3)\end{cases}$ $(1)+(3)$ から

$x=0.(2)+(3)$ から $z=0$ が簡単にわかり、従って、$y=-u,u;free$ もわか

る。従って、求めるベクトル $\vec{x}=c\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ が得られる。よって、$Ker(A)$

は 1 次元でその元は $c\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ と書ける。だから、基底は $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ をとれ

ばよい。◀

例題$2-6$. 次の行列 A で決まる R^4 から R^3 への線形写像について以下の問に答えよ。

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&-4&5&4\\3&1&1&-1\end{pmatrix}$$

(1) 核の基底を求めよ。

(2) 像の次元を求めよ。

(3)R^4 をユークリッド内積で内積空間とするときに、核の直交補空間の基底を求めよ。

（解法）*(1)*

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(2)+(4)\Longrightarrow(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{[3]-[2]\Longrightarrow[3]}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \overset{[3]\div 3\Longrightarrow[3]}{\longrightarrow}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\overset{[3]-[1]\Longrightarrow[3]}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから行列 A の階数 $(rank)$ は 2 である。連立方程式 $\begin{cases} x-y+2z+u=0 \\ -4y+5z+4u=0 \\ 3x+y+z-u=0 \end{cases}$ は自由に選べる未知数が $4-2=2$ 個持つことに注意して方程式を 2 つの未知数について解く。つまり、$\begin{cases} x-y=-2z-u \\ 4y=5z+4u \end{cases}$ から、$y=\frac{5}{4}z+u, x=-\frac{3}{4}z, z, u; free.$ 従って、ベクトルで書くと、$c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので求める基底は $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$ の線形写像 A による像を $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ と置くと、$\begin{cases} X=x-y+2z+u \\ Y=-4y+5z+4u \\ Z=3x+y+z-u \end{cases}$ だから、$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ と書け

る。ここで $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ は明らかであり、また、$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ となるので、3 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次従属である。実際に、$-3 \times \vec{a} + 5 \times \vec{b} + 4 \times \vec{c} = \vec{0}$ が成り立つ。ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の中で、$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ は独立だから、像の空間の元 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ は、$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書ける。k, l は任意の実数である。故に、像空間の次元は 2 である。

(3)(1) より、核の基底は $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから、今、核の直交補空間の元（要素）を $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ と置くと、$\vec{e}_1 \cdot \vec{a} = \vec{e}_1 \cdot \vec{a} = 0$ から、a, b, c, d は連立方程式 $\begin{cases} -3a + 5b + 4c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}$ を満たす。ここで、この連立方程式の係数行列は $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり、$rank(B) = 2$ になるので、解の自由度 $= 4 - 2 = 2$ となる。従って、上の連立方程式を解けば、解 $b = \frac{3}{5}a - \frac{4}{5}c, d = -\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}c, a; free, c; free$ が得られる。よって、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = k' \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + l' \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となり、求める基底は $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ である。◀

（注意）この例題からもわかるように、核空間の次元と像空間の次元との和は空間の次元に等しい。

例題_2-7._A は 3 次複素正方行列で、$A^2 \neq O, A^3 = O$ を満たすとする。この時に、以下に答えよ。

(1)3 次元の複素列ベクトル $\vec{x}$ を $A^2\vec{x} \neq \vec{0}$ ととる。この時に、$\{A^2\vec{x}, A\vec{x}, \vec{x}\}$ は一次独立であることを示せ。

(2) 上で与えた $\vec{x}$ に対して、3 次正方行列 P を $P = (A^2\vec{x}, A\vec{x}, \vec{x})$ とおく。この時に、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であることを示せ。

（解法）（１）$\begin{cases} aA^2\vec{x} + bA\vec{x} + c\vec{x} = 0...(i) \\ \overset{\times A}{\to} aA^3\vec{x} + bA^2\vec{x} + cA\vec{x} = 0...(ii) \\ \overset{A^3=O}{\to} bA^2\vec{x} + cA\vec{x} = 0...(iii) \\ \overset{\times A}{\to} bA^3\vec{x} + cA^2\vec{x} = 0 \\ \overset{A^3=O}{\to} cA^2\vec{x} = 0 \end{cases}$ $\overset{A^2\vec{x}\neq\vec{0}}{\longrightarrow} c = 0 \overset{(iii)}{\to} b = 0 \overset{(i)}{\to} a = 0$

（２）$AP = A(A^2\vec{x}, A\vec{x}, \vec{x}) = (A^3\vec{x}, A^2\vec{x}, A\vec{x}) = (0, A^2\vec{x}, A\vec{x})$.

故に、$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (A^2\vec{x}, A\vec{x}, \vec{x})\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, A^2\vec{x}, A\vec{x}) = AP$. よって、$AP = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（注意）（１）のベクトル $\vec{u}_1 (= A^2\vec{x})$ は、行列 A の固有値 0 に対する固有ベクトルである、$A\vec{u}_1 = A(A^2\vec{x}) = A^3\vec{x} = O\vec{x} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$. また、ベクトル $\vec{u}_2 (= A\vec{x})$ は、行列 A の固有値 0 に対する拡大固有ベクトルである、$A\vec{u}_2 = A^2\vec{x} = 0 \cdot \vec{u}_2 + \vec{u}_1$. 更に、ベクトル $\vec{x}$ は、行列 A の固有値 0 に対する拡大固有ベクトルである、$A\vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + \vec{u}_2$。◀

例題_2-8._ 行列 A とベクトル $\vec{a}$ が与えられている。この時に、問に答えよ。
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

(1) 行列 A の階数 $(rank)$ を求めよ。

(2)Im(A) の表す空間を求めよ。

(3) ベクトル $\vec{a}$ が $Ker(A^t)$ の元と直交することを示せ。

(4)$A\vec{x} = \vec{a}$ を満たす $\vec{x}$ を求めよ。

(解法）_(1)_ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{(3)-(1)\Longrightarrow(3)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. だから、階数 (rank) は 2 である。

(2)R^3 の勝手なベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の変換 A による像 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ をとすると、$\begin{cases} X=x+y+z \\ Y=x-y+z \\ Z=2x+2z \end{cases}$ が成り立つ。この連立方程式から $\begin{cases} X+Y=2x+2z \\ Z=2x+2z \end{cases}$ が得られるので、$X+Y=Z$ が成り立ち、像空間は平面である。

(3)$A^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ だから、A^t の核 (Ker) の元 $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $(A^t\vec{x}=0)$ は連立方程式 $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-y=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ を満たす。解は $y=x, z=-x, x: free$ であり、ベクトルで書くと $\vec{x}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と書ける。ここで、c は任意の実数である。このベクトルが $\vec{a}$ と直交することは、$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\vec{a}$ との内積を考えて計算すると $(\vec{x},\vec{a})=8c-8c=0$ だから 2 つのベクトルは直交する。

(4) 連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=8...(1) \\ x-y+z=0...(2) \\ 2x+2z=8...(3) \end{cases}$ で $(1)+(2)=(3)$ だから、$(1),(2)$ を解いて、解 $z=4-x, y=4, x; free$ が得られる。従って、$\vec{x}=\begin{pmatrix} c \\ 4 \\ 4-c \end{pmatrix}$ が求める解である。ここで、c は任意の実数を表す。◀

例題$2-9.\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,...,\vec{a}_n$ が一次独立なとき、$\tilde{a}_1,\tilde{a}_1+\tilde{a}_2,\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+\tilde{a}_3,...,\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+...+\vec{a}_n$ も一次独立であることを示せ。

（解法）いま、関係式 $c_1\tilde{a}_1+c_2(\tilde{a}_1+\tilde{a}_2)+c_3(\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+\tilde{a}_3)+...+c_n(\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+...+\vec{a}_n)=\vec{0}...(1)$ が成り立つと仮定して、各係数 $c_i, i=1,2,...,n$ について、$c_i=0$ を示せば良い。式 (1) を変形すると、$(c_n+c_{n-1}+...+c_2+c_1)\tilde{a}_1+(c_n+c_{n-1}+...+c_2)\tilde{a}_2+...(c_n+c_{n-1})\vec{a}_{n-1}+c_n\vec{a}_n=\vec{0}$ が得られる。仮定から、ベクトル $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,...,\vec{a}_n$ は一次独立だから、関係式

$$\begin{cases} c_n = 0...(1) \\ c_n + c_{n-1} = 0...(2) \\ .... \\ .... \\ ... \\ c_n + c_{n-1} + ... + c_2 = 0...(n-1) \\ c_n + c_{n-1} + ... + c_2 + c_1 = 0...(n) \end{cases}$$ が成り立つ。この連立方程式を順に解けば、$c_i = 0, i = 1, 2, ..., n$ が得られて、主張が示された。◀

3　一次変換と行列

写像（又は変換）f が**線形写像（線形変換）**であるとは、次の 2 つの関係式が全ての x, y について成り立つことである。

$$\begin{cases} (i) f(x+y) = f(x) + f(y) \\ (ii) f(kx) = kf(x), \text{ここで } k \text{ は任意の実数である} \end{cases}$$

我々の今までに学んだ関数のうちで上の 2 つの関係式を満たす例は一次関数 $f(x) = ax$ に限られることが容易にわかる。n 次元ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$ に対して、$f(\vec{x}) = A\vec{x}$, (A は実数を成分とする mn 行列) を考えるとこの関数（写像）$f; R^n \to R^m$ は線形である。逆に、$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$ に対して $f(\vec{x})$ が R^m の時に写像 f が線形ならば、mn 行列 A を用いて $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表すことが出来る。何故なら、$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$, 一般に $\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ の f による像を $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ 一般に $f(\vec{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ とおき、

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & a_{mj} & . & a_{mn} \end{pmatrix}$ とおくと、$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ となる。それは、

$f(\vec{x}) = f(\sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n f(x_j \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j f(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & a_{mj} & . & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_j. \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ となるからである。

$m = n$ で行列 A が**直交行列**$(A^t A = E_n)$ である時に、この行列による一次変換を**直交変換**と呼ぶ。

(注意)1. 直交変換では、長さが不変である。詳しくいえば、$\vec{X} = A\vec{x}(A;$直交行列) の時に、$|\vec{X}|^2 = |\vec{x}|^2$ が成り立つ。理由は $|\vec{X}|^2 = (\vec{X}, \vec{X}) = (A\vec{x}, A\vec{x}) = (\vec{x}, {}^t AA\vec{x}) = (\vec{x}, E_n\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{x}) = |\vec{x}|^2$ となるからである。

2. 線形写像 (一次変換) $f; R^n \to R^m$ に対して、$Ker(f) = \{\vec{x} \in R^n; f(\vec{x}) = \vec{0} \in R^m\}, \mathrm{Im}(f) = \{f(\vec{x}) \in R^m, \vec{x} \in R^n\}$ とする。このときに、$Ker(f), \mathrm{Im}(f)$ は何れも R^n, R^m の部分空間になることが示せる。$Ker(f), \mathrm{Im}(f)$ を**核空間**、**像空間**と呼ぶ。

3.0.1 問題 3-1

1. (i) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ の階数 (rank) を求めよ。

(ii)(i) で与えた行列 A により定まる R^4 から R^3 への線形写像を f_A で表す。f_A の像空間 $\mathrm{Im}(f_A)$ の基底 (bases) を一組求めよ。また、f_A の核空間 $Ker(f_A)$ の次元を求めよ。

2. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in R^3$ として、線形写像 $f; R^3 \to R^3$ を、$f(\vec{x}) = 6\vec{x} - (\vec{v}, \vec{x})\vec{v}$ と定義する。以下に答えよ。

(i)$(f(\vec{x}), \vec{v}) = 0$ を示せ。

(ii)$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表したときに、行列 A を求めよ。

(iii)f の像空間 $(\mathrm{Im}(f))$ の次元、f の核空間 $(Ker(f))$ の次元を求めよ。

(iv)$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{x} \in (\mathrm{Im}(f))$ を満たし、$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するベクトル $\vec{x} \in R^3$ が存在するならば求めよ。また、そのようなベクトルが存在しないならば理由を述べよ。

３．n を１以上の自然数とし、n 個の連続関数 $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$ の一次結合全体を、$L = L\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ と表す。線形写像 T を $T; f \in L \to f' \in L$ で表す。以下に答えよ。

(i)$1, x, x^2, ..., x^{n-1}$ は、一次独立であることを示せ。

(ii)$Ker(T), \mathrm{Im}(T)$ を求め、それぞれの次元を答えよ。

４．A を n 次正方行列、$\vec{x}$ を n 次元ベクトルとする。ある正の整数 k に対して、$A^{k-1}\vec{x} \neq 0, A^k\vec{x} = 0$ とする。このときに、k 個のベクトル $\{\vec{x}, A\vec{x}, A^2\vec{x}, ..., A^{k-1}\vec{x}\}$ は一次独立であることを示せ。

５．$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 & b \\ a & 0 & \sqrt{2}c & c \\ a & -\sqrt{2}b & 0 & b \\ a & 0 & -\sqrt{2}c & c \end{pmatrix}$、基本ベクトルを $\vec{e}_j (j = 1, 2, 3, 4)$ とする。以下に答えよ。

（１）$A\vec{e}_j (j = 1, 2, 3, 4)$ が一次独立であるときに、関係式を導け。

（２）任意の $\vec{x}$ について、$|A\vec{x}| = |\vec{x}|$ のときに a, b, c の値を計算せよ。

６．n 次正方行列 A について、以下の命題の中で１つだけ他の命題と同値でないものがある。それを指摘せよ。（技術士一次試験 H13）

(1)A は直交行列である。

(2)A と A の転置行列 ${}^tA$ との績は単位行列である。

(3)A の転置行列と A の逆行列とは一致する。

(4)A の逆行列は A 自身である。

(5)A の列ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ は、n 次元実ベクトル空間 R^n の正規直交基底である。◀

例. 平面上で x 軸に関する対称移動を行列で書け。

（解） ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ に写すので、$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$。よって、$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおけばよい。◀

例題_3-1._ 平面上で直線 $y = mx$ に関する対称移動を行列で書け。

（解法） 平面上の点を $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として、$y = mx$ に関して対称移動した点を $P\prime = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおき、$x\prime, y\prime$ の満たす方程式を２つ考える。先ず、２

つの点の中点が直線上にあることから、$y+y'=m(x+x')$...(1) が成り立つ。次に、線分 PP' はもとの直線に直交するから、$\frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{1}{m}$...(2) が成り立つ。この 2 つの方程式を $x\prime, y\prime$ について解くと、$\begin{cases} y'-mx'=-y+mx \\ y'+\frac{1}{m}x'=y+\frac{1}{m}x \end{cases}$ $.x'=\frac{1-m^2}{1+m^2}x+\frac{2m}{1+m^2}y, y'=\frac{2m}{1+m^2}x-\frac{1-m^2}{1+m^2}y,$ を得る。従って、行列で表すと、$A=\begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}$ が得られる。◀

例題$\mathit{3\text{-}2}$**.** 空間で平面 $x+y+z=0$ に関する対称移動を行列で書け。

（解法） 空間の点を $P=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とし、平面 $x+y+z=0$ に関して対称移動して得られる点を $P'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とする。最初に PP' の中点が平面 $x+y+z=0$ 上にあることから、$\frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}=0$...(1) 次に線分 PP' が平面 $x+y+z=0$ に垂直であるから、ベクトル PP' が平面の垂線の方向と平行になるので、$x'-x=y'-y=z'-z$...(2).

従って、連立方程式 $\begin{cases} \frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}=0 \\ x'-x=y'-y=z'-z=k \end{cases}$ を x', y', z' について解く。$x'=k+x, y'=k+y, z'=k+z,$ これらを $\frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}=0$ に代入して、$\frac{x+k+x}{2}+\frac{y+k+y}{2}+\frac{z+k+z}{2}=0, k=\frac{-2x-2y-2z}{3}$ を得る。これから、$\begin{cases} x'=\frac{x-2y-2z}{3}, \\ y'=\frac{-2x+y-2z}{3} \\ z'=\frac{-2x-2y+z}{3} \end{cases}$ が得られる。このことを行列で書けば、$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ である。◀

例. xy 平面上で点 $P(x,y)$ を原点 $O(0,0)$ の周りに θ 回転して得られる点を $P'(X,Y)$ とする時に、点 P を点 P' に写す変換 $T(\theta)$ は行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ で表される。

（証明） $P(x,y)$ が x 軸の正の方向となす角を α とし、$P'(X,Y)$ の X 軸の正の方向となす角を β とすれば、それぞれ

$\begin{cases} x=r\cos\alpha \\ y=r\sin\alpha \end{cases}, \begin{cases} X=r\cos\beta \\ Y=r\sin\beta \end{cases}$ が成り立つ。

ここで、r は原点 $O(0,0)$ と点 $P(x,y)$ 及び点 $P'(X,Y)$ との間の距離であり、$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{X^2+Y^2}$ となる。ところが、$\beta=\alpha+\theta$ だから、加法定理により $\begin{cases} \cos\beta=\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta \\ \sin\beta=\sin(\alpha+\theta)=\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta \end{cases}$ なので、関係式

$\begin{cases} X = r\cos\beta = r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta \\ Y = r\sin\beta = r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$ が成立する。

この関係をベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$、行列 $T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を使って書けば、$\vec{X} = T(\theta)\vec{x}$ となる。◀

例題 *3-3.* 次の 2 つの規則で点 (x, y) を (x'', y'') に写すとする。以下の問に答えよ。

(i)$x' = x + y, y' = 3x + 2y$

(ii)(x', y') を原点の周りに $\frac{\pi}{4}$ 左廻りに回転して (x'', y'') に写す

１．(x, y) を (x'', y'') に写す変換を行列で表せ。

２．直線 $y = ax + b$ 上の点が全て再びこの直線上に移される時に、a, b の条件をいえ。

（解法）１． 変換 (i) は、$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であり、変換 (ii) は、$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ だから、$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

２． この変換で直線 $y = ax + b$ 上は、$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ax + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}a)x - \frac{\sqrt{2}}{2}b \\ (2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}a)x + \frac{3\sqrt{2}}{2}b \end{pmatrix}$ に移る。この点が再び $y = ax + b$ 上にあるためには、$(2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}a)x + \frac{3\sqrt{2}}{2}b = a\{(-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}a)x - \frac{\sqrt{2}}{2}b\} + b$ が成り立てば良い。この式は、$\frac{\sqrt{2}}{2}(a^2 + 5a + 4)x + (\frac{3\sqrt{2}}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}ab - b) = 0$ と変形され、この式が全ての x について成り立つ為には、$\begin{cases} a^2 + 5a + 4 = 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}ab - b = 0 \end{cases}$ が成り立つことが必要である。$a^2 + 5a + 4 = 0$ より $a = -1, -4$、この時に $b = 0.$ ◀

（類題） $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ とする。直線 $y = mx$ 上の全ての点が行列 A による一次変換で再び直線 $y = mx$ 上に移る為の m の値は何か。

例題 *3-4.* 変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(a > 0)$ を考える。この変換で点 P が P' に写るとする。この時に、問に答えよ。

１．原点を O として常に関係式 $2OP = OP'$ が成り立っているとするときに、a, b を決めよ。

２．このときに、ある直線 l が再び同じ直線 l に移るとするとき、直線 l の式を求めよ。

（解法）１． $x' = -x + ay, y' = bx + y$ だから、関係式 $2OP = OP'$ に代入して両辺を自乗すると、$4(x^2 + y^2) = (-x + ay)^2 + (bx + y)^2, (1 + b^2)x^2 +$

$(1+a^2)y^2+2(b-a)xy=4(x^2+y^2)$ が得られる。この式が全ての x,y について成り立つから、$\begin{cases}(1+b^2)=4\\(1+a^2)=4\\b-a=0\end{cases}$ が成り立てばよい。$a>0$ に注意して $a=b=\sqrt{3}$ を得る。

2. 求める直線の方程式を $y=mx+n$ として直線上の任意の点 $\begin{pmatrix}x\\mx+n\end{pmatrix}$ を与えられた変換で移すと、$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\mx+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+\sqrt{3}(mx+n)\\\sqrt{3}x+mx+n\end{pmatrix}$ となる。これが再び同じ直線の上にあることから、次の関係式 $\sqrt{3}x+mx+n=m(-x+\sqrt{3}(mx+n))+n$ が成り立つ。よって、$(\sqrt{3}m^2-2m-\sqrt{3})x+\sqrt{3}mn=0$ が全ての x について成り立てば良い。連立方程式 $\begin{cases}\sqrt{3}m^2-2m-\sqrt{3}=0\\3mn=0\end{cases}$ を解いて解 $m=\sqrt{3},-\frac{1}{\sqrt{3}},n=0$ を得る。◀

例題*3-5.* 3 次元ベクトル空間で行列 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\-1&0&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}$ が表す一次変換を f とする。以下に答えよ。

（1）$f(\vec{x}_0)=\vec{0}$ となるベクトル $\vec{x}_0$ を求めよ。

（2）2 つのベクトル $\vec{x}_1,\vec{x}_2$ について、$\vec{x}_1-\vec{x}_2$ が $\vec{x}_0$ に平行ならば、$f(\vec{x}_1)=f(\vec{x}_2)$ であることを示せ。

（3）原点を通り、$\vec{x}_0$ に垂直な平面 α 上にあるベクトル $\vec{z}$ の満たす方程式を求めよ。

（4）平面 α 上にある異なる 2 つのベクトル $\vec{z}_1,\vec{z}_2$ は f によって、異なるベクトルに写されることを示せ。

（解法）（1） $\begin{pmatrix}3&1&1\\-1&0&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}\overset{(1)-(3)\to(1)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&-1\\-2&-1&4\end{pmatrix}\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$
$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\-1&-1&4\end{pmatrix}\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&-1\\0&-1&4\end{pmatrix}$

従って、$rankA=2.$ ここで、$f(\vec{x}_0)=\vec{0}$ となるベクトルを $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ と置いて、$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ は方程式 $\begin{pmatrix}3&1&1\\-1&0&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ から、

$x=-z,y=2z,z;free.$ 即ち、$\vec{x}_0=c\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

（2）仮定から、$\vec{x}_1-\vec{x}_2=k\vec{x}_0$ となり、f の線形性によって、$f(\vec{x}_1-\vec{x}_2)=f(k\vec{x}_0)=kf(\vec{x}_0)=\vec{0}$. つまり、$f(\vec{x}_1)-f(\vec{x}_2)=\vec{0}$ よって、$f(\vec{x}_1)=f(\vec{x}_2)$ が成り立つ。

（3）$\vec{z}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ と置けば、$\vec{z}\cdot\vec{x}_0=0$ によって、$-X+2Y+Z=0$ が求める方程式である。

（4）$f(\vec{z}_1)=f(\vec{z}_2)$ とすると、f の線形性によって、$f(\vec{z}_1-\vec{z}_2)=\vec{0}$ が成り立つ。つまり、$\vec{z}_1-\vec{z}_2\in Ker(f)$ である。よって、$\vec{z}_1-\vec{z}_2=k\vec{x}_0$ と書けるが、$\vec{z}_1\cdot\vec{x}_0=0$、及び $\vec{z}_2\cdot\vec{x}_0=0$ なので、$(\vec{z}_1-\vec{z}_2)\cdot\vec{x}_0=0$. 即ち $k\vec{x}_0\cdot\vec{x}_0=0$ となり、$\vec{x}_0=\vec{0}$ となり、これは、矛盾である。◀

3.0.2　問題 *3-2*

1．f を R^3 から R^3 への線形写像とし、$f(\vec{e}_1)=\vec{a}_1, f(\vec{e}_2)=\vec{a}_2, f(\vec{e}_3)=\vec{a}_3$ とする。ここで、

$\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。このときに、以下の（1）と（2）は同値であることを示せ。

（1）$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が独立である。

（2）f が逆写像 $g;R^3\to R^3$ を持つ。

2．R^4 から R^3 への線形写像 $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y+u \\ x+2y+z+u \\ x-z+u \end{pmatrix}$ について以下に答えよ。

（1）f の像空間 $\mathrm{Im}(f)=\{f(\vec{x})\in R^3, \vec{x}\in R^4\}$ の基底 $(bases)$ を一組求めよ。

（2）f の核空間 $Ker(f)=\{\vec{x}\in R^4; f(\vec{x})=\vec{0}\}$ の基底 $(bases)$ を一組求めよ。

3．R^3 の部分集合 $V=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in R^3; x+y+z=0\right\}$ について以下に答えよ。

（1）V は R^3 の部分空間であることを示せ。

（2）V の正規直交基底を一組求めよ。

（3）写像 $f:V\to V$ を $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ と定める。f は線形写像であることを示せ。

（4）（2）で求めたの一組の基底を $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ とする。$f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)$ を $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ を用いて表せ。

4． 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される線型写像 $R^3 \to R^2$ を考える。

1). 空間 R^3 の中の平面 $x - 3y - 2z = 0$ をパラメターを使って表せ。

2)1) の平面はこの線型写像で何に写されるか。

3) この線型写像で R^2 内の直線 $2x + 5y = 0$ に写るもとの空間 R^3 の図形（即ち原像）を求めよ。

5． 平面上の一次変換が任意の直交するベクトルを直交するベクトルに移すとする。そのときに、２つのベクトルのなす角は変わらないことを示せ。

6． 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について以下に答えよ。

(1)A を正則行列 P によって対角化せよ。

(2)A^n を計算せよ。

(3)A による一次変換 $f : \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$ は、任意の直線を直線に移し、平行な 2 直線を平行な 2 直線に移すことを示せ。

(4) 頂点が $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ である正方形の写像 f による像の面積を求めよ。

7． n 次元実ベクトル空間で長さを変えない線形変換は直交行列で表されることを示せ。

4　固有値と固有ベクトル

4.1　固有値と固有ベクトル

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ . & ... & . \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対して

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} (\vec{x} \neq \vec{0}) ...(4.1)$$

を満たす $\lambda, \vec{x}$ をそれぞれ行列 A の固有値、固有ベクトルという。

(4.1) は

$$(A - \lambda E_n)\vec{x} = \vec{0} ...(4.2)$$

と同じである。但し、$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ でこれは n 次の単位行列とよばれる。

さて、(4.2) が解 $\vec{x}=\vec{0}$ 以外の解を持つためには連立方程式 (4.2) が $type(2) \sim type(4)$ の形にならないといけない。従って λ は次の方程式の解でなければいけない。

$$|A-\lambda E_n| = 0...(4.3)$$

この λ についての n 次方程式を行列 A の**特性方程式（固有方程式）**という。

方程式 (4.1) 又は、(4.2) を詳しく書くと、以下のようになる。

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad .... \\ \qquad\qquad .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases} ...(4.4)$$

実際の問題を解くときには、この式から書き始めるのが良い。

更に、(4.3) は以下になる。

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & .. & .. & a_{2n} \\ . & . & .. & .. & . \\ . & . & .. & .. & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & .. & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0...(4.5)$$

（注意）固有値の概念は**作用素**に対しても考えることが出来て、**「解析学」**では重要な役割を果たすことがある。

4.2 固有値、固有ベクトルの性質

以下行列を $A=(a_{ij})$ と簡単に書き表すことにする。$A=(a_{ij})$ に対して $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$ とする。但し $\bar{a}_{ij}$ は複素数 a_{ij} の複素共役を表す。また、$A=(a_{ij})$ に対して $A^t=(a_{ji})$ と書いて行列 A の**転置行列**という。次に $A^*=\bar{A}^t$ とする。行列 A が $A^*=A$ を満たす時に A は**エルミート行列**という。成分を実数に限ればエルミート行列であることは、行列が**対称行列**であることと同じである。

「性質１」行列A がエルミート行列ならばその固有値は実数である。

（証明）行列 A はエルミート行列であるとし、$A\vec{x}=\lambda\vec{x}(\vec{x}\neq\vec{0})$ と仮定する。$(\vec{x},\lambda\vec{x})=(\vec{x},A\vec{x})=(A\vec{x})^*\vec{x}=\vec{x}^*A^*\vec{x}=\vec{x}^*A\vec{x}$(行列 A がエルミート行列だから）$=\vec{x}^*\lambda\vec{x}=\lambda\vec{x}^*\vec{x}=\lambda(\vec{x},\vec{x})$ ところが、$(\vec{x},\lambda\vec{x})=(\lambda\vec{x})^*\vec{x}=\bar{\lambda}\vec{x}^*\vec{x}=\bar{\lambda}(\vec{x},\vec{x})$。

よって、$\bar{\lambda}(\vec{x},\vec{x})=\lambda(\vec{x},\vec{x})$ が成り立つ。$\vec{x}\neq\vec{0}$ だから $\bar{\lambda}=\lambda$ となって λ は実数になる。

ここでは、内積の定義 $(\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}^*\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j\bar{y}_j$ に注意。

「性質２」行列A がエルミート行列ならば次が成り立つ。$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, A\vec{y} = \mu\vec{y}, \lambda \neq \mu$ ならば$(\vec{x},\vec{y}) = 0$. 従って、ベクトル$\vec{x},\vec{y}$ は一次独立である。

（証明）$(\lambda\vec{x},\vec{y}) = (A\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},A^*\vec{y})$（check すること）

$= (\vec{x},A\vec{y}) = (\vec{x},\mu\vec{y}) = \bar{\mu}(\vec{x},\vec{y}) = \mu(\vec{x},\vec{y})$（$\mu$ が実数だから）, また $(\lambda\vec{x},\vec{y}) = \lambda(\vec{x},\vec{y})$ なので、$\lambda(\vec{x},\vec{y}) = \mu(\vec{x},\vec{y})$ となる。従って、$\lambda \neq \mu$ ならば $(\vec{x},\vec{y}) = 0$ となり証明ができた。

（check　point）$(\vec{x},A^*\vec{y}) = (A^*\vec{y})^*\vec{x} = (\vec{y})^*(A^*)^*\vec{x} = (\vec{y})^*A\vec{x} = (A\vec{x},\vec{y})$

「性質３」一般には、異なる固有値に対する固有ベクトルはお互いに一次独立である。

（１）２個の場合。$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, A\vec{y} = \mu\vec{y}, \lambda \neq \mu$ として、$\vec{y} = c\vec{x}$ とする。$A(c\vec{x}) = \mu(c\vec{x})$ だから $cA\vec{x} = c\mu\vec{x}$. 一方では、$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ から $cA\vec{x} = c\lambda\vec{x}$ よって $c\mu\vec{x} = c\lambda\vec{x}$ だから $\lambda \neq \mu$ ならば $c = 0$.

（２）３個の場合。$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, A\vec{y} = \mu\vec{y}, A\vec{z} = \nu\vec{z}, \lambda \neq \mu, \lambda \neq \nu, \mu \neq \nu$ とし、$\vec{z} = c_1\vec{x} + c_2\vec{y}$ とする。

(i)$c_1 \neq 0, c_2 = 0$、または $c_2 \neq 0, c_2 = 0$ の時には、（１）の場合から $\lambda = \nu$ または $\mu = \nu$ となりいずれも矛盾。

(ii)$c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ とすると $A(c_1\vec{x} + c_2\vec{y}) = \nu(c_1\vec{x} + c_2\vec{y})$ から $c_1A\vec{x} + c_2A\vec{y} = c_1\nu\vec{x} + c_2\nu\vec{y}$ よって $c_1\lambda\vec{x} + c_2\mu\vec{y} = c_1\nu\vec{x} + c_2\nu\vec{y}$ が成り立つ。従って、$c_1(\lambda - \nu)\vec{x} = c_2(\mu - \nu)\vec{y}$ これは矛盾。

（３）一般の場合。帰納法で証明する。$A\vec{x}_j = \lambda_j\vec{x}_j, (j = 1,2,...,k), \lambda_i \neq \lambda_j, (i \neq j)$ のときに、$\vec{x}_j, (j = 1,2,...,k-1)$ は独立であると仮定して、$\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{k-1} c_j\vec{x}_j$ とする。両辺に A を作用させて、$\begin{cases} A\vec{x}_k = \lambda_k\vec{x}_k = \lambda_k\sum_{j=1}^{k-1} c_j\vec{x}_j \\ A\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{k-1} c_jA\vec{x}_j = \sum_{j=1}^{k-1} c_j\lambda_j\vec{x}_j \end{cases}$ から、$\lambda_k\sum_{j=1}^{k-1} c_j\vec{x}_j = \sum_{j=1}^{k-1} c_j\lambda_j\vec{x}_j, \sum_{j=1}^{k-1} c_j(\lambda_j - \lambda_k)\vec{x}_j = \vec{0}$ が成立して、帰納法の仮定から、$c_j = 0, (j = 1,2,...,k-1)$ となり、$\vec{x}_k = \vec{0}$ が得られて矛盾である。

「性質 4」以上のことから、特に、行列A が実数を成分とする対称行列の時には、$A^* = A^t = A$ となって上の「性質１」、「性質２」から全ての固有値は実数になってしかも異なる固有値に対応する固有ベクトルはお互いに直交している。

その時には、各固有ベクトル $\vec{X}_j(j = 1,...,n)$ の長さが１になるようにしておけば、$(\vec{X}_i,\vec{X}_j) = \begin{cases} 1, (i = j) \\ 0, (i \neq j) \end{cases}$ となる。この時に、行列 $P = (\vec{X}_1,...,\vec{X}_n)$ は $P^tP = E_n$ を満たしいわゆる直交行列になる。一般に $T^*T = E_n$ となる行列 T をユニタリ行列という。直交行列 P 及びユニタリ行列 T の逆行列はそれぞれ P^t, T^* であることは明らかであろう。

例題4-1 行列 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&2&-1\\-4&0&4\end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求めよ。

（解法） 先ずこの行列は対称行列であることに注意しておこう。この場合 (4.2) は、$\begin{pmatrix}3&2&1\\2&2&-1\\-4&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ...$(*)$ となり、$A-\lambda E_3=\begin{pmatrix}3-\lambda&2&1\\2&2-\lambda&-1\\-4&0&4-\lambda\end{pmatrix}$ である。従って、固有方程式 $|A-\lambda E_3|=0$ は、$\begin{vmatrix}3-\lambda&2&1\\2&2-\lambda&-1\\-4&0&4-\lambda\end{vmatrix}=0$ となる。以下サラスの方法で展開して、$-\lambda^3+9\lambda^2-26\lambda+24=0$ を解けばよい。それには $f(\lambda)=\lambda^3-9\lambda^2+26\lambda-24$ とおいて $f(2)=0$ に注意して因数定理を用いると、$f(\lambda)=\lambda^3-9\lambda^2+26\lambda-24=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-2)$ と因数分解できるので固有値は $\lambda=2,3,4$。

次に各固有値に対する固有ベクトルを求める。

(i)$\lambda=2$ に対する固有ベクトルは $(*)$ で $\lambda=2$ を代入すると $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&-1\\-4&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

となる。これから x,y,z は次の連立方程式の解となる。$\begin{cases}x+2y+z=0...(1)\\2x-z=0....(2)\\-4x+2z=0....(3)\end{cases}$、

$2(2)=-(3)$ だから例えば、$\begin{cases}x+2y+z=0...(1)\\2x-z=0....(2)\end{cases}$ を解けば良い。方程式は、$z=2x, y=-\frac{3}{2}x, z;free$ の解を持つ。従ってベクトルで表せば $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}c_1\\-\frac{3}{2}c_1\\2c_1\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ が固有ベクトルになる。

(ii)$\lambda=3$ に対する固有ベクトルは $(*)$ で $\lambda=3$ を代入すると、$\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&-1\\-4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ となる。これから x,y,z は次の連立方程式の解となる。$\begin{cases}2y+z=0...(1)\\2x-y-z=0....(2)\\-4x+z=0....(3)\end{cases}$

方程式は、$x=\frac{1}{4}z, y=-\frac{1}{2}z, z;free$ の解を持つ。従ってベクトルで表せば

$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}c_2 \\ -\frac{1}{2}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルになる。

(iii)$\lambda = 4$ に対する固有ベクトルは $(*)$ で $\lambda = 4$ を代入すると、$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。これから x, y, z は次の連立方程式の解となる。$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 ...(1) \\ 2x - 2y - z = 0....(2) \\ -4x = 0....(3) \end{cases}$

方程式は、$x = 0, z = -2y, y; free$ の解を持つ。従ってベクトルで表せば

$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \\ -2c_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルになる。◀

4.2.1 問題 *4-1*

1 . 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

（1）$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ 固有値の和と積

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

（4）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 固有値に対する固有空間、その基底

2 . $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ のときに、以下に答えよ。

（1）行列 A の固有多項式を求めよ。

（2）行列 A の固有値、固有ベクトルを求めよ。

（3）$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を A の固有ベクトルで表せ。

（4）$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(n = 1, 2, ...)$ を n で表せ。

３．行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について、以下の問に答えよ。

(1)A の固有値は常に実数であることを示せ。

(2) 二次元のベクトル $\vec{u},\vec{v}$ に対して、$\vec{u}\cdot A\vec{v}=A\vec{u}\cdot\vec{v}$ が成り立つことを示せ。

(3)A の２つの固有値が等しい時に、その固有値を求めよ。

(4)A の２つの固有値 λ,υ が相異なる時に、それぞれに対応する固有ベクトル $\vec{U},\vec{V}$ は直交することを示せ。

(5) ２つの単位固有ベクトル $\vec{U}_0,\vec{V}_0$ を並べて出来る行列を $P=(\vec{U}_0\vec{V}_0)$ とする。この時に、$P^T=P^{-1}$ であることを示せ。また、P^TAP を計算せよ。

(6) 関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定義する。行列 A の２つの固有値が共に正になることが、$(x,y)=(0,0)$ でない任意の実数 x,y に対して $f(x,y)>0$ となるための必要十分条件であることを示せ。

４．正方行列 A について以下に答えよ。

（１）$A\neq O$ で、$A^2=O$ を満たすならば (即ち、A がベキ零行列ならば)、$A+E$ は正則であることを示せ。

（２）行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。

（３）（２）での固有値が重根である条件を示し、これに対応する規格化された固有ベクトルを求めよ。

（４）（２）で行列 A がベキ零行列である為の条件を求めよ。この条件のもとでは（３）により、A の固有値が重根 0 になることを示し、これに対応する規格化された固有ベクトルを求めよ。

5　行列の対角化とその応用

5.1　行列の対角化

与えられた行列 A について前節の方法で固有値と固有ベクトルを求める。

$$A\vec{x}_j=\lambda_j\vec{x}_j,(j=1,...,n)...(5.1)$$

これらの固有ベクトル $\vec{x}_j,(j=1,...,n)$ を用いて行列 P を以下のように決める。

$$P=(\vec{x}_{1,}...,\vec{x}_n)...(5.2)$$

つまり求めた固有ベクトルを左から順に並べて出来る行列を P とする。

そこで n 個の関係式 (5.1) を上で作った行列 P と下で決める行列 D を用いて表すと

$$AP=A(\vec{x}_{1,}...,\vec{x}_n)=PD...(5.3)$$

となることがわかる。ここで、行列 D は次で与えられる対角行列である。

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0... & \lambda_n \end{pmatrix} ...(5.4)$$

(5.1) から $A(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n) = (\lambda_1 \vec{x}_1, ..., \lambda_n \vec{x}_n) = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0... & \lambda_n \end{pmatrix} =$ PD となるからである。(5.3) でもし行列 P が正則である（$|P| \neq 0$）ならば P の逆行列 P^{-1} があるのでそれを左から両辺にかけると

$$P^{-1}AP = D, (D \text{ は対角行列})...(5.5)$$

となる。このことを**行列の対角化**という。

（注意）固有値が互いに異なるときには、**固有値・固有ベクトルの性質**から行列 P は正則であり対角化できる。固有値が重複する時は、対角化できないこともある（**Jordan の標準形**の項参照)。**対称行列は対角化できる**ことが知られている。

以下、具体的な例題で対角化の手順を示す。

行列の対角化の例題　**例題** *5-1.* 行列 A を対角化せよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

（解法）固有値と固有ベクトルを求める。$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ...(*)$ となるような $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 及び実数 λ を求めることになる。$(*)$ を書き直すと、ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は、方程式 $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ...(**)$ の解で、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることになる。方程式 $(**)$ が、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるような解を持つには、連立方程式 $(**)$ の係数行列の行列式がゼロになることから、先ず固有値 λ は固有方程式 $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$ の解である。だから、固有値は、$\lambda = 1, 2, 3$ である。次に各固有値に対応する固有ベクトルを順次求める。

(i)$\lambda = 1$ のときは連立方程式 $(**)$ が $\begin{cases} -z = 0...(1) \\ x+y+z = 0...(2) \\ 2x+2y+2z = 0...(3) \end{cases}$ であり、$(3) = 2 \times (2)$ だから、解は $(1), (2)$ から $y = -x, z = 0, y; free$ となる。これをベクトルで表すと、$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii)$\lambda = 2$ のときは連立方程式 $(**)$ が $\begin{cases} -x-z = 0...(1) \\ x+z = 0...(2) \\ 2x+2y+z = 0...(3) \end{cases}$ であり、$(2) = -(1)$ だから、解は $(1), (3)$ から、$x = -z, y = \frac{z}{2}, z; free$ となる。これをベクトルで表すと、$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -c_2 \\ \frac{c_2}{2} \\ c_2 \end{pmatrix} = \acute{c}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii)$\lambda = 3$ のときは連立方程式 $(**)$ が、$\begin{cases} -2x-z = 0...(1) \\ x-y+z = 0...(2) \\ 2x+2y = 0...(3) \end{cases}$ であり、$(1)+(2) = -\frac{1}{2} \times (3)$ だから、解は $(1), (2)$ から、$x = -y, z = 2y, y; free$ となる。これをベクトルで表すと、$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -c_3 \\ c_3 \\ 2c_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

任意に取れる定数 $c_i (i = 1, 2, 3)$ を全て 1 として固有ベクトルを順に左から並べて行列 P を作ると、$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ となる。先に説明したようにこの時に、$P^{-1}AP = D.$ 但し、$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる。また念の為に行列 P の逆行列 P^{-1} は、$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ となる。◀

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(解法) 方程式 $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ...$(*)$ の解で、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるようにする。この方程式 $(*)$ が、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるような解を持つには、連立方程式 $(*)$ の係数行列 $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ の行列式がゼロになることから、先ず固有値 λ は固有方程式 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-3)0.$ 固有値は、$\lambda = 0, 2, 3$ である。

次に各固有値に対応する固有ベクトルを順次求める。

(i)$\lambda = 0$ のときは連立方程式 $(*)$ が $\begin{cases} 2x + z = 0...(1) \\ 2y - z = 0...(2) \\ x - y + z = 0...(3) \end{cases}$ で、$(1) - (2) = \frac{1}{2} \times (3)$ となり、解は $x = y, z = 2y, y; free$ となる。これをベクトルで表すと $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ - \\ 2 \end{pmatrix}$。ここで特に、$|\vec{x}_1| = 1$ となるように $c_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ とり、$\vec{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と書く。

(ii)$\lambda = 2$ のときは連立方程式 $(*)$ が $\begin{cases} z = 0...(1) \\ -z = 0...(2) \\ x - y - z = 0...(3) \end{cases}$ で、$(1) = -(2)$ となり、解は $x = y, z; free$ となる。これをベクトルで表すと $\vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ここで、$|\vec{x}_2| = 1$ となるように $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とり、$\vec{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と書く。

(iii)$\lambda = 3$ のときは連立方程式 $(*)$ が $\begin{cases} -x + z = 0...(1) \\ -y - z = 0...(2) \\ x - y - 2z = 0...(3) \end{cases}$ で、$(2) -$

$(1) = (3)$ となり、解は $x = z, y = -z, z; free$ となる。これをベクトルで表すと $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} c_3 \\ -c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ここで特に、$|\vec{x}_3| = 1$ となるように $c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ と取り、$\vec{X}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書く。

固有ベクトル $\vec{X}_i (i = 1, 2, 3)$ を順に左から並べて行列 T を作ると、$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ となる。この行列 T は先の説明により直交行列である $(T^t T = E_3)$. 従ってこの場合は、$T^t A T = D$ が成り立つ。但し、$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる。◀

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(解法) 固有方程式 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0$. 固有値は、$\lambda = 1$(重解), 2 である。

固有ベクトル；

(i)$\lambda = 1$ のときは連立方程式が $\begin{cases} x - y + z = 0 ...(1) \\ z = 0 ...(2) \\ -x + y - z = 0 ...(3) \end{cases}$ で、$(1) = -(3)$ となり、解は $x = y, z = 0, y; free$ となる。これをベクトルで表すと $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii)$\lambda = 2$ のときは連立方程式が $\begin{cases} -y + z = 0 ...(1) \\ -y + z = 0 ...(2) \\ -x + y - z = 0 ...(3) \end{cases}$ で、$(1) = (2)$ となり、解は $z = y, x = 0, y; free$ となる。これをベクトルで表すと $\vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ この場合固有ベクトルが 2 個しかなく行列 P が作れないので対角化は出来ない。◀

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(解法) 固有値・固有ベクトルを求める。固有方程式 $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$ $(\lambda-2)^2(\lambda+4) = 0$ から固有値は、$\lambda = 2($ 重解 $), -4$ である。固有ベクトルは、

(i)$\lambda = -4$ のときは連立方程式が $\begin{cases} 5x+2y-z=0...(1) \\ 2x+2y+2z=0...(2) \\ -x+2y+5z=0...(3) \end{cases}$ で、$(1)-2\times(2) = -(3)$ となり、解は、$x = z, y = -2z, z; free$ となる。これをベクトルで表すと $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ -2c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$。ここで特に、$|\vec{x}_1| = 1$ となるように $c_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ とり、$\vec{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書く。

(ii)$\lambda = 2$ のときは連立方程式が $\begin{cases} -x+2y-z=0...(1) \\ 2x-4y+2z=0...(2) \\ -x+2y-z=0...(3) \end{cases}$ で、$(1) = (3), (2) = -2\times(3)$ となり、解は $z = -x+2y, x, y; free$ となる。これをベクトルで表すと $\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ -c_2+2c_3 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. となるが、ここで、$\vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と置くと、ベクトル $\vec{x}_1$ はベクトル

$\vec{x}_2$、$\vec{x}_3$ のどちらにも直交しているが、$\vec{x}_2$ と $\vec{x}_3$ は直交していない。そこで、先ず $\vec{x}_2$ の長さが 1 になるように $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ として $\vec{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ おき、次にベクトル $\vec{x}_3$ の替わりに $\lambda = 2$ の固有ベクトルで $\vec{x}_2$ に直交する単位ベクトルを次の何れかの手順で作る。

「手順１」ベクトル $m\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\\n\\-m+2n\end{pmatrix}$ がベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ に直交すれば良いのだから２つのベクトルの内積が０になるように m,n を決めればよい。だから、m,n は $m+(m-2n)=0.$ 即ち、$m=n$ であればよい。だから求めるベクトルは、$m\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ である。これを長さ１にするには $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ とすれば良いから、$\vec{X}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を選ぶ。

「手順２」ベクトル $\vec{x}_3$ とベクトル $\vec{x}_2$ からベクトル $\vec{x}_2$ に垂直なベクトル

を作る幾何学的な方法（幾何の得意な人はこの方法で）。先ず、ベクトル $\vec{x}_3$ のベクトル $\vec{x}_2$ への

正射影の長さ$=|\vec{x}_3|\cos\theta($ ここで θ は２つのベクトルのなす角 $)=|\vec{x}_3|\frac{(\vec{x}_3,\vec{x}_2)}{|\vec{x}_3||\vec{x}_2|}=\frac{(\vec{x}_3,\vec{x}_2)}{|\vec{x}_2|}.$

だから、**ベクトル**$\vec{x}_3$ **のベクトル** $\vec{x}_2$ **への正射影**$=\frac{(\vec{x}_3,\vec{x}_2)}{|\vec{x}_2|}\frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|}=\frac{(\vec{x}_3,\vec{x}_2)}{|\vec{x}_2|^2}\vec{x}_2.$

従ってベクトル $\vec{x}_3-\frac{(\vec{x}_3,\vec{x}_2)}{|\vec{x}_2|^2}\vec{x}_2$ が、ベクトル $\vec{x}_2$ に垂直なベクトルであり、求

めるベクトルである。今の場合は、上の (ii) で定数 c_1,c_2 をいずれも１にすると $|\vec{x}_2|=\sqrt{2},(\vec{x}_3,\vec{x}_2)=-2$ なので、$\vec{x}_3-\frac{(\vec{x}_3,\vec{x}_2)}{|\vec{x}_2|^2}\vec{x}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ が得られる。以下は「手順１」と同様に長さを１にすれば良い。

以上の結果によって３つのベクトル $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ が得られた。これらの３つのベクトルを左から順に並べて T を作る。即ち、

$T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ と置く。この時に前に述べたことから行列 T は直交行列（つまり $T^tT=E_3$）になっている。

この行列 T を用いて、$T^tAT = D$ と出来る。但し、行列 D は、$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である。◀

（注意）上の例題で「手順２」で示した方法は、**シュミットの方法**と呼ばれている。この方法は、ベクトルの個数が増えた場合にも適用される。以下に示しておこう。ベクトル $\{x_i\}_{i=1}^N$ から、**正規直交系**（ここで、**正規**とはそれぞれのが１であることをいい、**直交系**とはお互いのベクトルが直交することである）$\{X_i\}_{i=1}^N$ を作る方法.

以下で示すような手順で $\{X_i\}_{i=1}^N$ を作る。

(1)$X_1 = \frac{x_1}{|x_1|}$,

(2)$x_2' = x_2 - (x_2, X_1)X_1, X_2 = \frac{x_2'}{|x_2'|}$

(3)$x_3' = x_3 - (x_3, X_1)X_1 - (x_3, X_2)X_2, X_3 = \frac{x_3'}{|x_3'|}$

...

(j)$x_j' = x_j - \sum_{k=1}^{j-1}(x_j, X_k)X_k, X_j = \frac{x_j'}{|x_j'|}$

...

(n)$x_n' = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n, X_k)X_k, X_n = \frac{x_n'}{|x_n'|}$

5.1.1 問題 *5-1*

１．次の行列を対角化せよ。

（１）$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ T も

（２）$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 直交行列 T で

（３）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ P も

（４）$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, 0 を固有値に持つような a に対して

（5）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 正則行列 P で、固有値・固有ベクトルも

5.1.2　Jordan の標準形

全ての行列が対角化できるとは限らない。具体的な例で示そう。

例題 5-2. 実正方行列A の固有値は全て実数とする。以下に答えよ。

（1）行列A の異なる固有値に対する固有ベクトルは一次独立であることを示せ。

（2）ベクトル$\vec{v}$ が$(A-\lambda E)\vec{v} \neq \vec{0}, (A-\lambda E)^2\vec{v} = \vec{0}$ を満たすときに、ベクトルの組$\{\vec{v}, (A-\lambda E)\vec{v}\}$ は一次独立であることを示せ。

（3）行列$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ。

（4）（3）の行列A について、$P^{-1}AP = D + N$ となる行列を求めよ。但し、行列D は対角行列、N はべき零行列。

（解）（1）$A\vec{u}_1 = \lambda\vec{u}_1, A\vec{u}_2 = \mu\vec{u}_2$ のときに、$\vec{u}_2 = c\vec{u}_1, (c \neq 0)$ とすると、$\begin{cases} A\vec{u}_2 = A(c\vec{u}_1) = cA\vec{u}_1 = c\lambda\vec{u}_1 \\ A\vec{u}_2 = \mu\vec{u}_2 \end{cases}$ から、$c\lambda\vec{u}_1 = \mu\vec{u}_2 = \mu c\vec{u}_1$ となり、$\lambda = \mu$.

（2）$(A-\lambda E)\vec{v} = c\vec{v}, (c \neq 0)$ とすると、$(A-\lambda E)^2\vec{v} = c(A-\lambda E)\vec{v}, \vec{0} \neq \vec{0}$ が成り立ち矛盾である。

（注意）$A\vec{u}_j = \lambda_j\vec{u}_j, (j = 1, 2, ..., n), (\lambda_j \neq \lambda_i, i \neq j)$ **のときに、ベクトルの組**$\{\vec{u}_j\}_{1 \leq j \leq n}$ **は一次独立である。**

（3）特性多項式は、$X^3 - 12X + 16 = (X+4)(X-2)^2$.

固有ベクトルは、$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 e_1 \leftrightarrow -4, c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_2 e_2 \leftrightarrow 2.$

拡大固有ベクトル；$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 1 & -7 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 36 & -36 \\ 0 & 36 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$(A-2E)^2\vec{v} = \vec{0}$ から、$\vec{v} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-6&6\\1&-5&7\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

行列 $J=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ を **Jordan の標準形**と呼ぶ。

（注意）拡大固有空間の求め方について、次の二つは同値である。

（１）ベクトル$\vec{v}$ が$(A-\lambda E)\vec{v}\neq\vec{0},(A-\lambda E)^2\vec{v}=\vec{0}$ を満たす。

（２）ベクトル$\vec{v}$ が固有値λ に対する固有ベクトル$\vec{u}(\neq\vec{0})$ について関係式$(A-\lambda E)\vec{v}=\vec{u}$ を満たす。

（解）（１）→（２）；$(A-\lambda E)\vec{v}=\vec{u}$ とすると、$\vec{u}\neq\vec{0}$ で $(A-\lambda E)\vec{u}=(A-\lambda E)^2\vec{v}=\vec{0}$ だから、ベクトル $\vec{u}$ は固有値 λ に対する固有ベクトルである。

（２）→（１）$(A-\lambda E)\vec{v}=\vec{u}\neq\vec{0},(A-\lambda E)^2\vec{v}=(A-\lambda E)\vec{u}=\vec{0}.$

（Jordan の標準形）このときに、（２）から $\begin{cases}A\vec{v}=\lambda\vec{v}+\vec{u}\\A\vec{u}=\lambda\vec{u}\end{cases}$ だから、

$A(\vec{u},\vec{v})=(\lambda\vec{u},\lambda\vec{v}+\vec{u})=(\vec{u},\vec{v})\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}$ となる。

5.1.3　問題 5-2

１．行列 $A=\begin{pmatrix}5&-3&6\\1&1&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$ について以下に答えよ。

（１）特性多項式、固有値を求めよ。

（２）正則行列 P により A を Jordan の標準形に直せ。

（３）自然数について A^n を求めよ。

（４）e^A を計算せよ。

２．3 次正方行列 A に対して、関係式 $\begin{cases}(A-\lambda E)\vec{p}_3=\vec{p}_2\\(A-\lambda E)^2\vec{p}_3=\vec{p}_1\\(A-\lambda E)^3\vec{p}_3=0\end{cases}$ を満たす実数 λ とゼロでない 3 次元ベクトル $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3$ が存在するとする。以下に答えよ。

$(i)\lambda,\vec{p}_1$ は A の固有値、固有ベクトルであることを示せ。

$(ii)\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ の関係を示せ。

$(iii)A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ に対して、上の関係を満たす実数 λ を求めて、ベクトル $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3$ の例を挙げよ。

３．行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について以下に答えよ。

（１）行列 A の固有値 λ とその固有ベクトル $\vec{p}$ の組 $(\lambda,\vec{p})$ の中で $(A-\lambda E)\vec{q}=\vec{p},(\vec{q}\neq 0)$ が成り立つベクトル $\vec{q}$ が存在するような組を求めよ。

（２）（１）を用いて $AP=PB$ が成り立つような上三角行列 B と正則行列 P を求めよ。

（３）（２）を用いて A^n を求めよ。

４．行列 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について以下に答えよ。

(I) ベクトル $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ について関係式 $B\vec{v}_1=2\vec{v}_1$ が成立する。$\vec{v}_1$ と一次独立な単位ベクトル $\vec{v}_2$ を求めて、$B\vec{v}_2=a\vec{v}_1+2\vec{v}_2$ としたいこのようなベクトル $\vec{v}_2=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定数 a の組を求めよ。

(II)$P=\begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{pmatrix}$ とするときに、$BP=PC$ と表される。行列 C を求めよ。

(III)B^n を求めよ。

5.2 対角化の応用

5.2.1 A^n の計算

例題１．次の行列A **について**A^n **を計算せよ。**$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

（解法）例題 *5-1(1)* の結果から、行列 A は正則行列 $P=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ によって次のように対角化される。$P^{-1}AP=D, D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P^{-1}=$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

上の結果から $A=PDP^{-1}$ となるので、

$A^n=(PDP^{-1})^n=(PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1})=PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1}=PDD...DP^{-1}=PD^nP^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2^{1+n} - 3^n & -1 + 2^{1+n} - 3^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}3^n \\ -2^n + 3^n & 1 - 2^n + 3^n & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n \\ -2^{1+n} + 2 \cdot 3^n & -2^{1+n} + 2 \cdot 3^n & 3^n \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

類題. **行列**$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **の**n **乗を計算せよ。**

（解）(i)$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = PDP^{-1} \rightarrow$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \cdot 3^n & 2 \cdot (2^n - 3^n) \\ -2^n + 3^n & 2 \cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix}$$

(ii)$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$

$= PDP^{-1} \rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}(-1)^n + \frac{4}{9}2^n + \frac{1}{9}5^n & -\frac{4}{9}(-1)^n \\ -\frac{4}{9}(-1)^n + \frac{2}{9}2^n + \frac{2}{9}5^n & \frac{4}{9}(-1)^n + \\ -\frac{2}{9}(-1)^n + \frac{4}{9}2^n - \frac{2}{9}5^n & \frac{2}{9}(-1)^n + \end{pmatrix}$$

（注意） 2 次の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対しては A^n を計算するのに関係式 **（ケーリー・ハミルトン）** $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = 0$ を用いる方法がある。

例$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

（解） $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ から、$A^2 - 5A + 6E = 0, A^2 = 5A - 6E.$

$A^3 = 5A^2 - 6A = 5(5A - 6E) - 6A = (25 - 6)A - 30E.$

一般に、$A^n = a_nA - b_nE$ として、$A^{n+1} = a_nA^2 - b_nA = a_n(5A - 6E) - b_nA = (5a_n - b_n)A - 6a_nE.$

よって、係数の間に漸化式 $\begin{cases} a_{n+1} = (5a_n - b_n) \\ b_{n+1} = 6a_n \end{cases}$ が成立する。

(I)a_n の計算；$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ から、$(a_{n+1} - 2a_n) = 3(a_n - 2a_{n-1}) = 3^2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) = ... = 3^{n-1}(a_2 - 2a_1) = 3^n$

よって、$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} = 3^{n-1} \\ 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) = 2 \cdot 3^{n-2} \\ 2^2(a_{n-2} - 2a_{n-3}) = 2^2 \cdot 3^{n-3} \\ . \\ 2^{n-2}(a_2 - 2a_1) = 2^{n-2} \cdot 3 \end{cases}.$

故に、

$a_n = 3^{n-1} + 2\cdot 3^{n-2} + 2^2\cdot 3^{n-3} + ... + 2^{n-2}\cdot 3 + 2^{n-1}\cdot 1 = 3^{n-1}(1+\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2 + ... + (\frac{2}{3})^{n-1}) = 3^{n-1}\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = 3^n - 2^n$

(II) 従って、$b_n = a_{n+1} + 5a_n = (3^{n+1} - 2^{n+1}) - 5(3^n - 2^n) = 3\cdot 2^n. - 2\cdot 3^n$

以上の結果から、$A^n = a_n A - b_n E = A^n = (3^n - 2^n)A + (3\cdot 2^n. - 2\cdot 3^n)E$

$= (3^n - 2^n)\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (3\cdot 2^n. - 2\cdot 3^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 2\cdot 3^n & 2\cdot(2^n - 3^n) \\ -2^n + 3^n & 2\cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix}$ ◀

更に、次の問題のように A^2, A^3 を計算し一般項 A^n を予測し帰納法で証明する方法がある。

（参考問題）１．行列$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ **について以下に答えよ。但し、定数**a, b **は実数。**

(I)A^2, A^3 **を求めよ。**

(II)A^n **を求めよ。**

（解） (I)$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}, ...$

(II)$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

帰納法で証明する。[STEP1]$n = 1;$ 明らか。

[STEP2]$n; o.k. A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^n & a^n b + a^n bn \\ 0 & aa^n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n b \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$ ◀

5.2.2 二次曲線の標準化

例題１．二次曲線$x^2 - 2y^2 + 4xy = 1$ **は何を表すか。**

（解法）二次形式 $x^2 - 2y^2 + 4xy$ はベクトルと行列を用いて次のように書ける。$x^2 - 2y^2 + 4xy = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x}^t A\vec{x}$。但し、$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{x}^t = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$。

以下では、行列 A の固有値、固有ベクトルを求めて、直交行列による対角化を行う。

先ず、固有値は固有方程式 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$ から求める固有値は、$\lambda = 2, -3$ となり、

$\lambda = 2$ の時の固有ベクトルの満たす連立方程式は、$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$ であ

り、従って固有ベクトルは、$\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

同様に、$\lambda = -3$ の時の固有ベクトルの満たす連立方程式は、$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$
であり、従って固有ベクトルは、$\vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ となる。それぞれの固有ベクトルの長さが 1 になるように $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ と選んで、それらを左から順に並べて求める直交行列 T は、$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ となる。この時に、$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ となる角度を θ とおけば、行列 T は、$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となり、原点の周りの角度 θ だけの回転を表すことに注意しておく。さて、ここで、$\vec{x} = T\vec{X}$ 詳しくいえば、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ の変数変換をおこない x, y の二次形式 ${}^t\vec{x}A\vec{x}$ を X, Y の二次形式に変換する。${}^t\vec{x}A\vec{x} = 1$ に $\vec{x} = T\vec{X}$ を代入すれば、${}^t(T\vec{X})AT\vec{X} = 1$ となるが、関係式 ${}^t(T\vec{X}) ={}^t \vec{X}{}^tT$ を用いると、${}^t\vec{X}{}^tTAT\vec{X} = 1$ となる。ここで、${}^tTAT = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ であることに注意すると X, Y の二次形式としては、$2X^2 - 3Y^2 = 1$ となることがわかる。従って、この曲線は双曲線であることがわかる。◀

(注意) 二次形式 $ax^2{+}2hxy{+}by^2$ を標準形に直すのに、変数変換 $\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$ を行い、X, Y の二次形式に変換すると、$ax^2 + 2hxy + by^2 = a(X\cos\theta -$

$Y\sin\theta)^2 + 2h(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) + b(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 = ($
$a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta)X^2$
$+(a\sin^2\theta - 2h\cos\theta\sin\theta + b\cos^2\theta)Y^2$
$+(-2a\cos\theta\sin\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta))XY.$

これを、$AX^2{+}2HXY{+}BY^2$ と書くと、$\begin{cases} A = a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta = a\frac{1+\cos 2\theta}{2} + h\sin 2\theta + b \\ B = a\sin^2\theta - 2h\cos\theta\sin\theta + b\cos^2\theta = \frac{a+b}{2} - \\ 2H = -2(a-b)\cos\theta\sin\theta + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = - \end{cases}$

が得られて、関係式 $\begin{cases} A + B = a + b, \\ AB - H^2 = ab - h^2 \end{cases}$ が成立する。いま特に、$H = 0$ となるように角度 θ を選ぶには、$-(a-b)\sin 2\theta + 2h\cos 2\theta = 0, (a-b)\sin 2\theta = 2h\cos 2\theta, \tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$ となる角度 θ を選ぶ。そのときに、A, B は二次方程式 $\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - h^2 = 0$ の解であり、それは、行列の形で書けば、$\begin{vmatrix} a - \lambda & h \\ h & b - \lambda \end{vmatrix} = 0$ となり、それは、行列 $\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ の固有値である。◀

類題. 次の二次形式で表される曲線は何か答えよ.。(1) $2x^2 + 5y^2 - 4xy = 3$
(2) $3x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}xy - 4\sqrt{3x} + 4y = 1$

（解）（1）$x^2-2y^2+4xy=(x,y)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{-2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\to\to\to x^2-2y^2+4xy=3\to -3X^2+2Y^2=3$

（2）$\begin{pmatrix}3 & \sqrt3\\ \sqrt3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\to\to\to 3x^2+5y^2+2\sqrt3xy-4\sqrt3x+4y=1\to 2X^2+6Y^2-4\sqrt3(\frac{\sqrt3}{2}X-\frac12Y)+4(\frac12X+\frac{\sqrt3}{2}Y)=12X^2+6Y^2+2X+2\sqrt3Y-6X-2\sqrt3Y=1\to 2X^2+6Y^2-4X=1$

２．二次の正方行列$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$が直交行列であるための条件をいえ。

(解) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix}\to\begin{cases}a^2+b^2=1\\ c^2+d^2=1\\ ac+bd=0\end{cases}\to\to\to$
$\begin{cases}a=\cos\alpha\\ b=\sin\alpha\end{cases},\begin{cases}c=\cos\beta\\ d=\sin\beta\end{cases},\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$

$\to\cos(\alpha-\beta)=0\to\alpha-\beta=\pm\frac{\pi}{2}\to\alpha\pm\frac{\pi}{2}=\beta$

$\to\to\to\begin{pmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \sin\alpha & \sin\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin(\alpha\pm\frac{\pi}{2})\\ \sin\alpha & \sin(\alpha\pm\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \pm\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

5.2.3　二次曲面の標準化

例題１．二次形式$2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz=1$ **で表される二次曲面は何か。**

(解法) 前の例題と同様にして二次形式 $2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz$ は行列 A とベクトル $\vec{x}$ を用いると、$2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz={}^t\,\vec{x}A\vec{x}$ と書ける。但し、行列 A とベクトル $\vec{x}$ は次の式でで定義する。$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.
既に、**例題** *5-1(2)* で見るようにこの対称行列 A は直交行列 T によってのように対角化されている。${}^tTAT=D$. 但し、$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt6} & 0 & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix},D=$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. そこで、前の例題のように変数変換 $\vec{x} = T\vec{X}$ 詳しくいえば、

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ を行い x, y, z ついての二次形式 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz =^t \vec{x}A\vec{x}$ を X, Y, Z に関する二次形式に変換する。${}^t\vec{x}A\vec{x} = 1$ に $\vec{x} = P\vec{X}$ を代入して、${}^t(T\vec{X})A(T\vec{X}) = 1$ から、${}^t\vec{X}{}^tTAT\vec{X} = 1$ を得るが、${}^tTAT = D$ を代入して、${}^t\vec{X}D\vec{X} = 1$ となる。従って、X, Y, Z に関する二次形式として、$2Y^2 + 3z^2 = 1$ となり、元の曲面は楕円柱であることがわかった。◀

類題. **次の二次形式で表される曲面は何か。**

1. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2xz = 1$

2. $-x^2 - y^2 - z^2 + 4xy + 4yz + 4xz = 1$

（解）（1）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \to\to\to X^2 + 4Y^2 + Z^2 = 1$

（2）$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \to\to -3X^2 + 3Y^2 - 3Z^2 = 1$

5.2.4 正定値行列

例題 1. **$\vec{0}$ でない全ての実ベクトル$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して、$\vec{x}^tA\vec{x} > 0$ が成り立つようにa の値を決めよ。**

但し、$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^tA\vec{x} = \begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

（注意） このような性質を持つ行列を**正定値**であるという。

（解法）$A=\begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}$とし、行列$A$の固有値、固有ベクトルを求めて対角化を行う。先ず、固有値は固有方程式$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & -a \\ a & 1-\lambda & a \\ -a & a & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$から、$(1-\lambda)^3-2a^3-3(1-\lambda)a^2=0$、ここで$X=(1-\lambda)$とおくと、$X^3-3a^2X-2a^3=0$、因数分解して、$(X+a)(X^2-aX-2a^2)=0$、$(X+a)^2(X-2a)=0.$ 従って、固有値は、$\lambda=a+1,-2a+1$となる。

(i)$\lambda=a+1$のときは、連立方程式$\begin{cases} -ax+ay-az=0 \\ ax-ay+az=0 \\ -ax+ay-az=0 \end{cases}$から、$y=x+z, x, z; free$をえる。ベクトルで書けば、$\vec{x}_1=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$である。

(i)$\lambda=-2a+1$のときは、連立方程式$\begin{cases} 2ax+ay-az=0...(1) \\ ax+2ay+az=0...(2) \\ -ax+ay+2az=0...(3) \end{cases}$ ここで$(2)-(1)=(3)$に注意して、$\begin{cases} 2x+y=z...(1) \\ x+2y=-z...(2) \end{cases}$を解くと、$x=z, y=-z, z; free$をえる。ベクトルで書けば、$\vec{x}_2=c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$である。前と同様に$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$が$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$に直交するように$c_1$と$c_2$との関係を調べると、$c_1+(c_1+c_2)=0$から、$c_2=-2c_1$を得る。この時に、$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$は、$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}-2c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$はとなる。これら$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3個のベクトルをそれぞれ長さが1になるようにして、左から順に並べると次の行列Tを得る。$T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$こ

の時に、関係式 $T^tAT = D$ が成立する。$D = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a+1 \end{pmatrix}$.

変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, 簡単に $\vec{x} = T\vec{X}$ を行うと最初の条件式 $\vec{x}^tA\vec{x} > 0$ は、$\vec{x}^tA\vec{x} = (T\vec{X})^tA(T\vec{X}) = \vec{X}^tT^tAT\vec{X} = \vec{X}^tD\vec{X} > 0$ となる。即ち、$(a+1)X^2 + (a+1)Y^2 + (-2a+1)Z^2 > 0$ が全ての X, Y, Z について成り立てば良い。よって、求める条件は、$(a+1) > 0, (-2a+1) > 0$ となる。これから、不等式 $-1 < a < \frac{1}{2}$ を得る。◀

5.2.5　条件付き最大・最小

例題１. $x^2+y^2+z^2=1$ **の条件のもとで** $3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx$ **の最大値、最小値を求めよ。**

(解法) $3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx = \begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ $\vec{x}^tA\vec{x}$ となることに注意して行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求め、直交行列で対角化する。先ず、固有方程式 $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ から、$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20 = 0$. 数分解して、$(\lambda-5)(\lambda-2)^2 = 0$. よって固有値は、$\lambda = 2, 5$ である。

最初に $\lambda = 2$ の時の固有ベクトルは連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ を解いて、

$\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を得る。ここで、$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交するように c_1 と c_2 との関係を調べると、$c_1 + (c_1 + c_2) = 0$ から、$c_2 = -2c_1$ を得る。この時に、$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は、$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} -$

$2c_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ となる。

$\lambda=5$ の時の固有ベクトルは連立方程式 $\begin{cases}-2x+y+z=0\\x-2y+z=0\\x+y-2z=0\end{cases}$ を解いて、

$\vec{x}_2=c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を得る。これら $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 3個のベクトルをそれぞれ長さが1になるようにして、左から順に並べると次の行列 T を得る。$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$. この時に、関係式 $T^tAT=D$ が成立する。

$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$. 変数変換 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$, 簡単に書けば、$\vec{x}=T\vec{X}$ を行うと最初の二次形式 $3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx=\vec{x}^tA\vec{x}$ は、$\vec{x}^tA\vec{x}=\vec{X}^tT^tAT\vec{X}=\vec{X}^tD\vec{X}=2X^2+2X^2+5Z^2$ となる。この時に、T による変換は T が直交行列であるから、$x^2+y^2+z^2=1$ の条件は、$X^2+Y^2+Z^2=1$ になる（「一次変換と行列」参照）。この条件 $X^2+Y^2+Z^2=1$ のもとで二次形式 $2X^2+2X^2+5Z^2$ の最大値、最小値はそれぞれ5と2であることは明らかであろう。◀

（注意）条件付き最大・最小の問題は**「解析学」**$\rightarrow$**「多変数関数の導関数の応用」**$\rightarrow$**「多変数関数の極大・極小」**の項で学んだような**ラグランジェの未定乗数法**による解法がある。

類題1．$x^2+y^2+z^2=1$ の条件のもとで$x^2+3y^2+3z^2-2yz$ の最大値、最小値を求めよ。

（解）$x^2+3y^2+3z^2-2yz=\vec{x}^tA\vec{x}$ となることに注意して行列 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求め、直交行列で対角化すると、$T^tAT=D, T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ となる。このとき変数変換 $\vec{x}=T\vec{X}$ を行うと最初の二次形式は、$\vec{x}^tA\vec{x}=(T\vec{X})^tAT\vec{X}=\vec{X}^tT^tAT\vec{X}=\vec{X}^tD\vec{X}=X^2+2Y^2+4Z^2$ と変換され、条件 $x^2+y^2+z^2=1$ は条件 $X^2+Y^2+Z^2=1$ に変わる。従って、条件 $X^2+Y^2+Z^2=1$ のもとで、$X^2+2Y^2+4Z^2$ を最大・最小にする問題となる。故に、最大値は4、最小値は1である。

類題２.（１）行列$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **を対角化せよ。**

（２）関数$F(x,y,z)=(2x^2+2y^2+z^2+2yz+2zx)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ **の最大値・最小値、及びそれらと取る点を全て求めよ。**

(解法)（１）$T^tAT=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=D$

（２）座標変換 $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=T\vec{X}$ を行うと、$(2x^2+2y^2+z^2+2yz+2zx)=\vec{x}^tA\vec{x}=\vec{X}^tT^tAT\vec{X}=\vec{X}^tD\vec{X}=2Y^2+3Z^2$ であり、更に、$x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2$ に注意して、$F(X,Y,Z)=(2Y^2+3Z^2)e^{-(X^2+Y^2+Z^2)}$ を得る。

ここで、球面座標 $\begin{cases} X=r\sin\phi\cos\theta \\ Y=r\sin\phi\sin\theta \\ Z=r\cos\phi \end{cases}$ を導入して、$F=(2\sin^2\phi\sin^2\theta+3\cos^2\phi)r^2e^{-r^2}$.

以下、$G=2\sin^2\phi\sin^2\theta+3(1-\sin^2\phi)=3+\sin^2\phi(2\sin^2\theta-3)$ の最大は 3（$\sin^2\phi=0$）。最小は 0（$\sin^2\phi=1,\sin^2\theta=0$）。$H=r^2e^{-r^2}$ の最大は $\frac{1}{e}$（$r^2=1$）。最小は 0（$r^2=0$）。

以上により、F の最大は $\frac{3}{e}(\sin^2\phi=0,r^2=1)$、最小は $0(\sin^2\phi=1,\sin^2\theta=0)$。

5.2.6　ベクトル列（点列）の極限

例題１．次の問に順に答えよ。但し、行列A **は**$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **とする。**

(1)A **の固有値、固有ベクトルを求めよ。**

(2) 行列A **を対角化せよ。**

(3)A^n **を計算せよ。**

(4) 二次元のベクトル$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ **の間に距離**$d(\vec{x},\vec{y})=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ **を入れる。ベクトルの列**$\{\vec{x}_j\}_{j=1}^{\infty}$ **があるベクトル**$\vec{x}$ **に対して、**$\lim_{n\to\infty}d(\vec{x}_j,\vec{x})=0$ **となるときに、**$\{\vec{x}_j\}_{j=1}^{\infty}$ **は**$\vec{x}$ **に収束するという。**

今、$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ に対して、上の行列A を用いて、$\vec{x}_j = A^j\vec{a}$ と定める。この時に、a_1, a_2 の取り方に関係なく$\{\vec{x}_j\}_{j=1}^{\infty}$ は$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束することを示せ.

（解法）(1). 固有方程式は、$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ だから、$(\frac{1}{2}-\lambda)^2 = \frac{1}{36}$, よって $(\frac{1}{2}-\lambda) = \pm\frac{1}{6}$, 従って、$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}$。次に固有ベクトルは、

(i)$\lambda = \frac{2}{3}$ の時は、$\begin{cases} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{9}y = 0 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 0 \end{cases}$ から、$y = \frac{2}{3}x, x; free$ を得て、固有ベクトル $\vec{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が求まる。

(ii)$\lambda = \frac{1}{3}$ の時は、$\begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{1}{9}y = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 0 \end{cases}$ から、$y = -\frac{3}{2}x, x; free$ を得て、固有ベクトル $\vec{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ が求まる。

(2). (1) から、$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ とおけば、$P^{-1}AP = D$, 但し、$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ を得る。ここで、$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ である。

(3).(2) から $A = PDP^{-1}$ だから、$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1}) = PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1} = PDD...DP^{-1} = PD^nP^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\frac{2}{3})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\{(\frac{2}{3})^n + (\frac{1}{3})^n\} & \frac{1}{3}\{(\frac{2}{3})^n - (\frac{1}{3})^n\} \\ \frac{3}{4}\{(\frac{2}{3})^n - (\frac{1}{3})^n\} & \frac{1}{2}\{(\frac{2}{3})^n - (\frac{1}{3})^n\} \end{pmatrix}$$

(4).$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ に対して、A を用いて $\vec{x}_j = A^j\vec{a}$ と定めたので、(3) の結果から

$$\vec{x}_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\{(\frac{2}{3})^j + (\frac{1}{3})^j\} & \frac{1}{3}\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})^j\} \\ \frac{3}{4}\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})^j\} & \frac{1}{2}\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})j\} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1\{(\frac{2}{3})^j + (\frac{1}{3})^j\} + & \frac{1}{3}a_2\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})^j\} \\ \frac{3}{4}a_1\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})^j\} + & \frac{1}{2}a_2\{(\frac{2}{3})^j - (\frac{1}{3})j\} \end{pmatrix}$$

である。ここで、$(\frac{2}{3})^j, (\frac{1}{3})^j \to 0 (j \to \infty)$ に注意すると、a_1, a_2 の値に無関係に、言い換えればベクトル $\vec{a}$ の取り方に関係なく、$\vec{x}_j \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (j \to \infty)$ がわかる。◀

5.2.7　数列の極限

例題１. 数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **が**$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}....[1]$ **を満たしているときに、次に答えよ。**

(1)$a_0=a_1=1$ **として、極限値**$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ **を求めよ。**

(2) 与えられた式$[1]$ **は行列とベクトルを用いて**$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$ **とかける。このことを利用して極限値**τ **を求めよ。また一般項**a_n **も求めよ。**

(解法) (1). 条件の式 [1] の両辺を a_n で割って $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}$ を得る。ここで、$\alpha_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}$ とおけば数 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、$\alpha_{n+1}=1+\frac{1}{\alpha_n}$ を満たす。上の漸化式から、$\alpha_n>0$ は明らかで、それから、$\alpha_n\geq 1$ かわかる。従って、$\alpha_n\leq 2$ 、つまり、$1\leq\alpha_n\leq 2$ が従う。

だから、$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{\alpha_n}\leq 1$ となるので、上の関係式から。$\frac{3}{2}\leq\alpha_n\leq 2$ が得られる。このことを用いると以下の等式と不等式が成り立つ。$\alpha_{n+1}-\alpha_n=(1+\frac{1}{\alpha_n})-\left(1+\frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)=\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{\alpha_{n-1}}=\frac{1}{\alpha_n\alpha_{n-1}}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$

$\to|\alpha_{n+1}-\alpha_n|\leq(\frac{2}{3})(\frac{2}{3})|\alpha_n-\alpha_{n-1}|=(\frac{4}{9})|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\leq(\frac{4}{9})^2|\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}|\leq(\frac{4}{9})^3|\alpha_{n-2}-\alpha_{n-3}|....\leq(\frac{4}{9})^{n-1}|\alpha_2-\alpha_1|$

従って、$|\alpha_{n+p}-\alpha_n|\leq|\alpha_n-\alpha_{n+1}|+|\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}|+...+|\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}|$

$\leq(\frac{4}{9})^{n-1}|\alpha_2-\alpha_1|+(\frac{4}{9})^n|\alpha_2-\alpha_1|+...+(\frac{4}{9})^{n+p-3}|\alpha_2-\alpha_1|+(\frac{4}{9})^{n+p-2}|\alpha_2-\alpha_1|$

$\leq(\frac{4}{9})^{n-1}|\alpha_2-\alpha_1|(1+\frac{4}{9}+(\frac{4}{9})^2+...+(\frac{4}{9})^{p-1})\leq(\frac{4}{9})^{n-1}|\alpha_2-\alpha_1|(\frac{1}{1-\frac{4}{9}})=(\frac{4}{9})^{n-1}(\frac{5}{9})|\alpha_2-\alpha_1|$

が成り立って、数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ はいわゆるコーシー列になっている。だから、数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

次ぎに、$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ とおけば、関係式 $\alpha_{n+1}=1+\frac{1}{\alpha_n}$ から、$\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$ を得る。従って、α は二次方程式 $\alpha^2-\alpha-1=0$ の解であり、しかも $\alpha>0$ だから、$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

（注意）一般に数列が収束するための条件は次が良く使われる。

(i) **次の** *2* **つの条件** *[1]*、*[2]* **を同時に満たす数列は収束する。**

[1] 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界（$resp.$ 下に有界）である。つまり、ある定数 M があって全ての n に対して $a_n\leq M$（$rsp.M\leq a_n$）が成立する。。

[2] 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に増加（$resp.$ 減少）する。つまり、$a_n\leq a_{n+1}$（$resp.a_n\geq a_{n+1}$）が全ての n に対して成立する。

上の性質 [2] を満たす数列を**単調増大な数列**（$resp.$ **単調減少な数列**）という。

(ii) また、この例のように、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が十分に大きな自然数 n と任意の自然数 p に対して $|\alpha_{n+p}-\alpha_n|$ が幾らでも 0 に近く出来る時にその数列は**コーシー列**であるという。この性質を持つ数列は収束する。

(２) 最初に、行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求める。固

有方程式は、$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ だから、展開して、$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ より、$\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ が固有値となる。

次に、固有ベクトルは $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ の時に、連立方程式 $\begin{cases} -\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}x + y = 0 \\ x + \frac{1\mp\sqrt{5}}{2}y = 0 \end{cases}$ を解いて、$y = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}x$ を得る。固有ベクトルは、$\vec{x}_i = c_i \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} (i = 1, 2)$ を得る。この時に、$c_i = 2$ と置き、次の行列を考える。$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$

この行列の逆行列は、$P^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 \\ 1+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}$ であり、$P^{-1}AP = D, D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ が成立する。

ところで、$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$ は、ベクトル $\vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$、行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて $\vec{a}_n = A\vec{a}_{n-1}$ と表される。よって、$\vec{a}_n = A\vec{a}_{n-1} = AA\vec{a}_{n-2} = AAA\vec{a}_{n-3} = ... = A^n\vec{a}_0$.

ここで、$A = PDP^{-1}$ から、$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1+5}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ により、

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1+5}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} & \frac{2}{4\sqrt{5}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} & -\frac{2}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これから一般項がわかる。$a_n = (\frac{1}{\sqrt{5}})\{(\frac{1+5}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}\}$. ◀

類題．数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **が**$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n, (n = 1, 2, ...)$ **を満たしているときに、次に答えよ。**

（1）与えられた数列は行列A **を用いて**$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ **とかける。行列**A **を求めて標準形に直せ。**

（2）一般項a_n **を求めよ。但し、**$a_1 = 1, a_2 = 0.$

（解）$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$ 特性多項式: $X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$ 固有値: 3

固有ベクトル $c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = ... = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$A^{n-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-9&6\end{pmatrix}^{n-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\1&3\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}-3&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^{n-1}&0\\n3^{n-2}&3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-(n-1)3^{n-1}&n3^{n-2}\\-n3^{n+1}&(n+1)\,3^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$\to\to\to\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(n-1)3^{n-1}&n3^{n-2}\\-n3^{n+1}&(n+1)\,3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\,(n-1)\,3^{n-1}\\-n3^{n+1}\end{pmatrix}$$

類題１．無限数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **全体のなすベクトル空間**V **で、漸化式**$a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$ **を満たす数列全体を**F **とすると、**F **は項別の和、スカラー倍で**V **の部分空間になる。この空間**F **の次元を求めよ。**

（解）$\vec{e}_1=\{1,0,a_3,...\},\vec{e}_2=\{0,1,a_3,...\},\vec{f}=\{a_1,a_2,a_3,...\}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2,\dim=2$

２．実定数k **に対して、数列**$\{a_n\}$ **を漸化式**$a_{n+2}+ka_{n+1}=a_n,(n=0,1,2,...)$ **で決める。**

（１）数列$\{a_n\}$ **の一般項**a_n **を求めよ。**

（２）整数$N(>1)$ **について、**$a_0=a_N=0$ **であり、**$a_j=0,(j=1,2,..,(N-1))$ **とならないような数列が存在する為の**k **の値を決めよ。**

（解）（１）$\vec{a}_n=\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix},\vec{a}_{n+1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-k\end{pmatrix}\vec{a}_n=A\vec{a}_n.\vec{a}_{n+1}=A\vec{a}_n=A^2\vec{a}_{n-1}=...=A^{n+1}\vec{a}_0$

A; 固有値･固有ベクトル、$a\begin{pmatrix}\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow-\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2},b\begin{pmatrix}\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow-\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}.$

$P=\begin{pmatrix}\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}&\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\\1&1\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{k^2+4}}&\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2\sqrt{k^2+4}}\\\frac{1}{\sqrt{k^2+4}}&\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2\sqrt{k^2+4}}\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}-\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}&0\\0&-\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\end{pmatrix},A=PDP^{-1}.$

$A^n=PD^nP^{-1}.\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=PD^nP^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}$

$(i)a_0=0,a_1=1;$

$$\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}&\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2})^n&0\\0&(-\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{k^2+4}}&\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2\sqrt{k^2+4}}\\\frac{1}{\sqrt{k^2+4}}&\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2\sqrt{k^2+4}}\end{pmatrix}($$

$a_n=\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}-\frac{1}{2}k\right)^n-\left(-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}\right)^n\}$

$(ii)a_0=1,a_1=0;$

$$\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}&\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2})^n&0\\0&(-\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{k^2+4}}\\\frac{1}{\sqrt{k^2+4}}\end{pmatrix}$$

$a_n=\frac{1}{\sqrt{k^2+4}}\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}-\frac{1}{2}k\right)^{n-1}-\left(-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}\right)^{n-1}\}$

$\Longrightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}}\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}-\frac{1}{2}k\right)^{n-1}-\left(-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}\right)^{n-1}\}a_0+\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}-\frac{1}{2}k\right)^n-\left(-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}\right)^n\}a_1$

（２）（１）から、$a_n = \{\left(\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}-\frac{1}{2}k\right)^n-\left(-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}\right)^n\}a_1.$

これから、$\left(\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}-\frac{1}{2}k\right)^N = \left(-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4}\right)^N$, $\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{k+\sqrt{k^2+4}} = e^{\frac{2\pi}{N}i} \to k-\sqrt{k^2+4} = (\sqrt{k^2+4}+k)e^{\frac{2\pi}{N}i}$

$\sqrt{k^2+4}(1+e^{\frac{2\pi}{N}i}) = k(1-e^{\frac{2\pi}{N}i}), (k^2+4)(1+e^{\frac{2\pi}{N}i})^2 = k^2(1-e^{\frac{2\pi}{N}i})^2, k^2\{-(1+e^{\frac{2\pi}{N}i})^2+(1-e^{\frac{2\pi}{N}i})^2\} = 4(1+e^{\frac{2\pi}{N}i})^2$

$k^2 = -\frac{(1+e^{\frac{2\pi}{N}i})^2}{e^{2i\frac{\pi}{N}}} = -\left(\frac{1+e^{\frac{2\pi}{N}i}}{e^{i\frac{\pi}{N}}}\right)^2 = -\left(e^{i\frac{\pi}{N}}+e^{-i\frac{\pi}{N}}\right)^2 = -(2\cos\frac{\pi}{N})^2 \Longrightarrow k = 2i\cos\frac{\pi}{N}$

5.2.8 微分方程式への応用

例題１．連立微分方程式 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x+2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x-2y \end{cases}$ **を解け。**

（解法）上の連立微分方程式は次のベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ を用いて次のように表される。$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$ この行列 A は既に「２」の例題で次のように対角化されていることに注意する。${}^tTAT = D, T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. ここで、そこと同様に $\vec{x} = T\vec{X}$ 詳しくいえば、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ の変数変換を行うと、$\vec{x}$ に関する微分方程式は $\vec{X}$ に関する微分方程式として、$T\frac{d\vec{X}}{dt} = AT\vec{X}$ が得られる。この両辺に左から ${}^tT$ を掛けて、$\frac{d\vec{X}}{dt} = {}^t TAT\vec{X} = D\vec{X}$. 即ち、$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = 2X \\ \frac{dY}{dt} = -3Y \end{cases}$ が得られる。この方程式は、$X = c_1e^{2t}, Y = c_2e^{-3t}$ の解を持つ。従って変換の式、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に、$X = c_1e^{2t}, Y = c_2e^{-3t}$ を代入すると、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1e^{2t}+c_2e^{-3t} \\ c_1e^{2t}-2c_2e^{-3t} \end{pmatrix}$ となって解が求まった。◀

（注意）連立微分方程式 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - x = 2y ...(1) \\ \frac{dy}{dt} + 2y = 2x ...(2) \end{cases}$ は次の方法でも解ける。

(1) から $y = \frac{1}{2}(\frac{dx}{dt}-x)$ として (2) に代入すると、$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\frac{dx}{dt}-x)+2\frac{1}{2}(\frac{dx}{dt}-x) = 2x$ これから x に関する二階の微分方程式 $\frac{d^2x}{dx^2}+\frac{dx}{dt}-6x = 0$ を得る。この二階線形同次微分方程式は特性方程式 $\rho^2+\rho-6 = 0$ から特性解 $\rho = 3, -2$ を得て一般解 $x = c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}$ を持つ。$y = \frac{1}{2}(\frac{dx}{dt}-x)$ に $x = c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}$ を代入すれば $y = -2c_1e^{-3t}+\frac{c_2}{2}e^{2t}$ を得る。

類題. 連立微分方程式 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$ **を解け。**

（解）上の連立微分方程式は次のベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

を用いて次のように表される。$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ($

PDP^{-1}

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P\vec{X} \to P\frac{d\vec{X}}{dt} = AP\vec{X} \to$

$\frac{d\vec{X}}{dt} = P^{-1}AP\vec{X} = D\vec{X} \to\to\to$

$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \to\to\to\to X = Ae^t, Y = Be^{4t}, Z =$

$Ce^t \to\to\to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^t \\ Be^{4t} \\ Ce^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}Ae^t\sqrt{6} + \frac{1}{6}Ce^t\sqrt{6} + \frac{1}{3}B\sqrt{6}e^{4t} \\ \frac{1}{3}Ae^t\sqrt{3} + \frac{1}{3}Ce^t\sqrt{3} - \frac{1}{3}B\sqrt{3}e^{4t} \\ \frac{1}{2}Ae^t\sqrt{2} - \frac{1}{2}Ce^t\sqrt{2} \end{pmatrix}$

5.2.9 図形への応用

例題１. 立体$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ **を平面**$\sqrt{2}x + 5z = 0$ **で切った切り口の図形は何を表すか答えよ。**

（解法）平面 α:$\sqrt{2}x + 5z = 0$ の法線ベクトルは $(\sqrt{2}, 0, 5)$ であるがこれを単位ベクトルに直して,

$\vec{e}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, 0, \frac{5}{3\sqrt{3}})$ とおく。次に α 上にこの $\vec{e}_1$ に直交していて互いに直交する単位ベクトルを選ぶ。例えば、$\vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (\frac{5}{3\sqrt{3}}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}})$（この求め方は以下の注意を見よ）

（注意）一般に空間の平面の方程式 $lx + my + nz = p$ に対してベクトル (l, m, n) はこの平面の法線の方向を表す。次に、$\vec{e}_2, \vec{e}_3$ の作り方は、求めるものを (x, y, z) として (x, y, z) は方程式 $\sqrt{2}x + 5z = 0$ を満たさなければならないので、1 つは $(0, 1, 0)$ 他は $\sqrt{2}x + 5z = 0$ から $z = -\frac{\sqrt{2}}{5}x$ から $x = 5$ とすれば $z = -\sqrt{2}$ となって $(5, 0, -\sqrt{2})$ を得るが、このベクトルの長さを 1 にして $\vec{e}_3 = (\frac{5}{3\sqrt{3}}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}})$ が得られる。

そこで座標変換、$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を行う。ここで、行列 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は直交行列であることに注意しておく。また、この逆変換は、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ となっている。これから $\begin{cases} x = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\sqrt{2}X + 5Z) \\ y = Y \\ z = \frac{1}{3\sqrt{3}}(5X - \sqrt{2}Z) \end{cases}$ となる。これらを最初の $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ に代入すると、$\frac{1}{25}(\frac{1}{3\sqrt{3}}(\sqrt{2}X + 5Z))^2 + \frac{Y^2}{9} + (\frac{1}{3\sqrt{3}}(5X - \sqrt{2}Z))^2 = 1 ...(*)$ となる。この時に、平面 $\sqrt{2}x + 5z = 0$ は、$X = 0$ に変換されるので、最後の式 (*) で $X = 0$ とおくと、$\frac{1}{25}\frac{1}{27}(5Z)^2 + \frac{Y^2}{9} + \frac{1}{27}(-\sqrt{2}Z)^2 = 1$ が得られ、$Z^2 + Y^2 = 9$ となるので、答えは半径 3 の円になる。◀

類題. 立体$z^2 = 4x^2 + y^2$ **を平面**$ax + z = 1$ **で切る。この時の切り口は何を表すか。**

（**略解**）例題と同じようにして 3 つのベクトル $(a, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -a)$ を選び、それぞれを長さ 1 にしてそれらを左から順に並べた行列を P とする。つまり、$P = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \end{pmatrix}$. この行列による変数変換を行う $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. 前と同様にこの変換は直交変換でしかも、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ 従って、$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(aX + Z) \\ y = Y \\ z = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(X - aZ) \end{cases}$ だから、$z^2 = 4x^2 + y^2$ に代入して、$\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(X - aZ)\right)^2 = 4\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(aX + Z)\right)^2 + Y^2$ 計算して纏めると、$(X - aZ)^2 = 4(aX + Z)^2 + (a^2 + 1)Y^2$ から、$(a^2 + 1)Y^2 + (4 - a^2)Z^2 + 10aXZ = (4a^2 - 1)X^2$ となる。ところが、$ax + z = 1$ は、$a\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(aX + Z) + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(X - aZ) = 1$ つまり、$X = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ に変換されるので、最後の式で $X = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ を代入して切り口の図形は、$(a^2 + 1)Y^2 + (4 - a^2)Z^2 + \frac{10a}{\sqrt{a^2+1}}Z = \frac{4a^2-1}{a^2+1}$ となる。従って、

$(a^2+1)=(4-a^2)$ の場合は円、$(a^2+1)(4-a^2)\geq 0$ で $(a^2+1)\neq(4-a^2)$ の場合は楕円、$(a^2+1)(4-a^2)<0$ の場合は双曲線となる。◀

5.2.10 確率への応用

例題１．１から６の目がある正６面体のサイコロがある。時刻が１進む毎に床に接している面の４つの辺の中の１つを選んでその辺を軸にしてサイコロを９０度回転させる。４つの辺の中から１つを選ぶ確率は等しいとする。但し、このサイコロは１の目の面と辺を共有する面は２から５の目の面で、１の目の裏側に６の目があるとする。以下に答えよ。(i) **時刻**t **のとき、１の目が出ている確率を**$p_1(t)$**、２から５の目が出ている確率を**$p_2(t)$**、６の目が出ている確率を**$p_3(t)$ **とする。いま、**$\begin{pmatrix} p_1(t+1) \\ p_2(t+1) \\ p_3(t+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$ **のようにしたときの、行列**A **を求めよ。**$(ii)(i)$ **の行列**A **の固有値と固有ベクトルを求めよ。**$(iii)A^n$ **を計算せよ。**(iv) **時刻０のときに、１の目が出ている状態から始めて時刻**t **に１の目が出ている確率**$p_1(t)$ **を求めよ。**

（解）(i) $\begin{pmatrix} p_1(t+1) \\ p_2(t+1) \\ p_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} 0 \leftrightarrow c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \leftrightarrow c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, -\frac{1}{2} \leftrightarrow c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii)$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = D, D =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to A = PDP^{-1}$

$\to A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(iv)) $\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_1(t-1) \\ p_2(t-1) \\ p_3(t-1) \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} p_1(t-2) \\ p_2(t-2) \\ p_3(t-2) \end{pmatrix} = ... = A^t \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \end{pmatrix} =$

$$A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^t & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t \\ \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^t & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t \\ \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{6} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{6}$

（類題） $1.$ **変数**x **は**$1, 2, 3$ **の何れかの値をとり、その値は単位時間ごとに表に示す確率に従って変化する。**

		いまの値		
		$x=1$	$x=2$	$x=3$
単位時間後にとる値	$x=1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
	$x=2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
	$x=3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

以下に答えよ。(i) **時刻**0 **で**$x=1$ **であったときに、その後**$x=2 \rightarrow x=3$ **と変化して時刻**3 **で再び**$x=1$ **となる確率を求めよ。**(ii) **時刻**0 **で**$x=1$ **であったときに、時刻**3 **で再び**$x=1$ **となる確率を求めよ。**(iii) **十分長い時間が経った後では、**x **が１、２、３を取る確率は、それぞれ初期状態に依らない値に収束する。これらの確率を求めよ。**

（解）(i)$x=1 \xrightarrow{\frac{1}{4}} x=2 \xrightarrow{\frac{1}{3}} x=3 \xrightarrow{\frac{1}{2}} x=1.\frac{1}{24}$

(ii)$x=1 \xrightarrow{\frac{1}{4}} x=2 \xrightarrow{\frac{1}{3}} x=2 \xrightarrow{\frac{1}{3}} x=1.\frac{1}{36}$

$x=1 \xrightarrow{\frac{1}{4}} x=2 \xrightarrow{\frac{1}{3}} x=1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} x=1.\frac{1}{24}$

$x=1 \xrightarrow{\frac{1}{4}} x=3 \xrightarrow{\frac{1}{4}} x=3 \xrightarrow{\frac{1}{2}} x=1.\frac{1}{32}$

$x=1 \xrightarrow{\frac{1}{4}} x=3 \xrightarrow{\frac{1}{4}} x=2 \xrightarrow{\frac{1}{3}} x=1.\frac{1}{48}$

$x=1 \xrightarrow{\frac{1}{4}} x=3 \xrightarrow{\frac{1}{2}} x=1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} x=1.\frac{1}{16}$

$x=1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} x=1 \xrightarrow{\frac{1}{4}} x=3 \xrightarrow{\frac{1}{2}} x=1.\frac{1}{16}$

$x=1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} x=1 \xrightarrow{\frac{1}{4}} x=2 \xrightarrow{\frac{1}{3}} x=1.\frac{1}{24}$

$x=1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} x=1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} x=1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} x=1.\frac{1}{8}$

(iii) 時刻 n で $i, (i=1,2,3)$ にある確率を $q_{n,i}$ とする。

$$\begin{pmatrix} q_{n+1,1} \\ q_{n+1,2} \\ q_{n+1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \\ q_{n,3} \end{pmatrix}, \vec{q}_n = \begin{pmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \\ q_{n,3} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$\vec{q}_{n+1} = A\vec{q}_n = A^2\vec{q}_{n-1} = ... = A^{n+1}\vec{q}_0.$

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 固有値・固有ベクトル $a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 0, b \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow$

$1, c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{12}.$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{8}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = D, D =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

$$A = PDP^{-1}, A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{12})^n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{8}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}$$
$$\stackrel{n\to\infty}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{8}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{5}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$
$$\vec{q}_\infty = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{5}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11}(a+b+c) \\ \frac{3}{11}(a+b+c) \\ \frac{3}{11}(a+b+c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} \\ \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

２．赤い玉が３個一列に並んでいる。この列に対して以下の操作を繰り返して行う。「列の先頭、２番目、３番目の３つの玉のうちから１つを等確率で選ぶ。選んだ玉が赤い玉なら、それをそのまま置いておき、列の先頭に白い玉を付加する。選んだ玉が白い玉なら、それを取り去り。玉が抜けたために間隙が生じたら、玉の順序が変わらないように玉を移動して間隙をなくする。」例として、１回目の操作と２回目の操作について述べる。１回目の操作では当然赤い玉を選ぶことになり、結果として白い玉が１つ列の先頭に付加され、赤い玉とあわせて４つの玉が並ぶことになる。２回目の操作では、これら４つの玉のうち先頭、２番目、３番目の３つの玉のうちから１つを等確率で選ぶ。この場合、確率$\frac{2}{3}$ で赤い玉が、確率$\frac{1}{3}$ で白い玉が選ばれる。赤い玉が選ばれると、白い玉が先頭に付加されるので、結果として、白い玉が２つ並び、その後に、赤い玉が３つ続いた列が出来る。また、白い玉が選ばれると、白い玉は取り去られるので、結果として、３つの赤い玉が並ぶことになる。n 回目の操作の終了時に列にある白い玉の個数を$k(n)$ で表すことにする。明らかに$k(n)$ は$0, 1, 2, 3$ の何れかの値を（それぞれある確率をもって）とる。特に、$n = 0$ の場合には、確率１で$k(0) = 0$ であると定義する。$i = 0, 1, 2, 3$ について、$k(n)$ がi である確率を$p_i(n)$ で表す。上で述べたことにより、$p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0, p_0(0) = 1$ である。以下に答えよ。

（1）$p_1(1), p_2(1), p_3(1), p_0(1)$ **の値を求めよ。**

（2）$p_1(2m) = p_3(2m) = 0$ **を示せ。但し、**m **は非負整数である。**

（3）m **を**1 **以上の整数とするときに、**$p_0(2m)$ **と**$p_2(2m)$ **を**$p_0(2m-2)$ **と**$p_2(2m-2)$ **を用いて表せ。**

（4）非負整数m **について、**$p_0(2m)$ **を求めよ。**

（解）（１）$p_0(1) = 0.$

◎◎◎ $\rightarrow$ ◯◎◎ $\rightarrow\rightarrow\rightarrow p_1(1) = 1, p_2(1) = 0, p_3(1) = 0$

（２）$p_1(2m) = p_3(2m) = 0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow$ ◎◎◎ or ◯◯◎,

(i) ◎◎◎ $\xrightarrow{1}$ ◯◎◎ $\begin{cases} \xrightarrow{\frac{1}{3}} ◎◎◎ \\ \xrightarrow{\frac{2}{3}} ◯◯◎ \end{cases}$

(ii)◯◯◎$\begin{cases} \xrightarrow{\frac{1}{3}} ◯◯◯ \xrightarrow{1} ◯◯◎ \\ \xrightarrow{\frac{2}{3}} ◯◎◎ \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\frac{1}{3}} ◎◎◎ \\ \xrightarrow{\frac{2}{3}} ◯◯◎ \end{cases} \end{cases}$ $\rightarrow p_1(2m+2) = p_3(2m+2) = 0$

（３）$p_2(2m+2) = \frac{2}{3}p_0(2m) + (\frac{1}{3} + \frac{4}{9})p_2(2m) = \frac{2}{3}p_0(2m) + \frac{7}{9}p_2(2m), p_0(2m+2) = \frac{1}{3}p_0(2m) + \frac{2}{9}p_2(2m)$

（４）$$\begin{pmatrix} p_0(n+1) \\ p_1(n+1) \\ p_2(n+1) \\ p_3(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(n) \\ p_1(n) \\ p_2(n) \\ p_3(n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_0(n) \\ P_1(n) \\ P_2(n) \\ P_3(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(n) \\ p_1(n) \\ p_2(n) \\ p_3(n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_0(n+1) \\ P_1(n+1) \\ P_2(n+1) \\ P_3(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(n) \\ P_1(n) \\ P_2(n) \\ P_3(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} P_0(n-1) \\ P_1(n-1) \\ P_2(n-1) \\ P_3(n-1) \end{pmatrix} =$$

$$... = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} P_0(0) \\ P_1(0) \\ P_2(0) \\ P_3(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_0(n) \\ p_1(n) \\ p_2(n) \\ p_3(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{3})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1+3^{1-n})(1+(-1)^n) \\ \frac{3}{8}(1+3^{1-n})(-1+(-1)^n) \\ \frac{3}{8}(1-3^{1-n})(1+(-1)^n) \\ \frac{1}{8}(1-3^{1-n})(-1+(-1)^n) \end{pmatrix}$$

３．３つの状態$s_j (j = 1, 2, 3)$ **をとる微生物がある。時刻**$t = n$ **で状態**s_i **であった微生物が時刻**$t = n + 1$ **で状態**s_j **に変化している確率が**p_{ij}**（各時刻、個体によらない定数）で与えられるとする。行列**$P = (p_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ **が**$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **で与えられるとして以下に答えよ。**

（１）時刻$t = 0$ **で状態**s_1 **であった微生物が時刻**$t = 2$ **で状態**s_1 **である確率を求めよ。**

（２）時刻$t = n$ **で状態**$s_j (j = 1, 2, 3)$ **にある確率を**$q_{n,j}$ **として、**$q_{n+1,j}$ **を**$q_{n,j}$ **で表せ。**

（３）$\lim_{n\to\infty} q_{n,1}$ **を求めよ。**

（解）（１）$(\frac{1}{3})^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

（２）$\begin{pmatrix} q_{n+1,1} \\ q_{n+1,2} \\ q_{n+1,3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \\ q_{n,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}q_{n,1} + \frac{2}{3}q_{n,2} \\ \frac{1}{3}q_{n,2} + \frac{2}{3}q_{n,3} \\ \frac{1}{3}q_{n,1} + \frac{2}{3}q_{n,3} \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 固有ベクトル: $1 \leftrightarrow c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1-i\sqrt{7}}{6} \leftrightarrow c_2 \begin{pmatrix} -\frac{3+i\sqrt{7}}{2} \\ -\frac{1-i\sqrt{7}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1+i\sqrt{7}}{6} \leftrightarrow c_3 \begin{pmatrix} -\frac{3-i\sqrt{7}}{2} \\ -\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = TDT^{-1}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{7}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+i\sqrt{7}}{6} \end{pmatrix} \to P^n = TD^nT^{-1}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} P^n = T(\lim_{n\to\infty} D^n)T^{-1} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1},$$

$$\vec{q}_n = \begin{pmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \\ q_{n,3} \end{pmatrix} = P\vec{q}_{n-1} = ... = P^n\vec{q}_0 \to \lim_{n\to\infty}\vec{q}_n = T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}\vec{q}_0$$

４．３つの状態A, B, C を取る系がある。一定時間間隔（ステップ）で状態の間を確率的に遷移するとする。遷移確率は各ステップで同一であり、状態X が状態Y に遷移する確率を$P(X \to Y)$ で表す。

（１）遷移確率が$\begin{cases} P(A\to A) = \frac{1}{4}, P(B\to A) = \frac{1}{4}, P(C\to A) = \frac{1}{2} \\ P(A\to B) = \frac{1}{4}, P(B\to B) = \frac{1}{2}, P(C\to B) = \frac{1}{4} \\ P(A\to C) = \frac{1}{2}, P(B\to C) = \frac{1}{4}, P(C\to C) = \frac{1}{4} \end{cases}$ **で与えられるときに、以下に答えよ。**

(i)n ステップ目で系が状態A, B, C にある確率をp_n^A, p_n^B, p_n^C で表す。$(n+1)$ ステップ目に系が状態A, B, C にある確率$p_{n+1}^A, p_{n+1}^B, p_{n+1}^C$ を $\begin{pmatrix} p_{n+1}^A \\ p_{n+1}^B \\ p_{n+1}^C \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} p_n^A \\ p_n^B \\ p_n^C \end{pmatrix}$ **で表すときに行列Q を求めよ。**

(ii) 行列Q の固有値・固有ベクトルを求めよ。

(iii) 十分に時間が経過した後、系が状態A, B, C である確率を求めよ。

（２）遷移確率が$P(X \to Y) = P(Y \to X)$ を満たすとして、系が十分時間が経過した後、初期状態によらず、系が状態A, B, C の各状態にある確率が一定の値に近づくとする。このときに、十分時間が経過した後の系が状態A, B, C の各状態にある確率に関して何が言えるか。

（解）（１）(i) $\begin{pmatrix} p_{n+1}^A \\ p_{n+1}^B \\ p_{n+1}^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n^A \\ p_n^B \\ p_n^C \end{pmatrix}$

(ii) 固有値･固有ベクトル: $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{4}$

(iii)$T^tAT = D, T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, T^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, A = TDT^t,$

$$A^n = TD^nT^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{4})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(a+b+c) \\ \frac{1}{3}(a+b+c) \\ \frac{1}{3}(a+b+c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

（2）$\begin{pmatrix} p_{n+1}^A \\ p_{n+1}^B \\ p_{n+1}^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a-b & a & b \\ a & 1-c-a & c \\ b & c & 1-b-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n^A \\ p_n^B \\ p_n^C \end{pmatrix}$

特性多項式、$(X-1)\left(-2X-2a-2b-2c+2Xa+2Xb+2Xc+3ab+3ac+3bc+X^2+1\right)$ $=0, X=1 \quad and$

$X^2+2(a+b+c-1)X+3ab+3ac+3bc-2a-2b-2c+1=0.$

$X=(1-(a+b+c))\pm\sqrt{a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2}=\mu,\nu.\begin{cases} \mu=(1-(a+b+c))+\sqrt{a^2-ab-ac+b^2-} \\ \nu=(1-(a+b+c))-\sqrt{a^2-ab-ac+b^2-} \end{cases}$

$T^tAT=D, D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.A=TDT^t.$

$A^n=TD^nT^t$

$\overset{n\to\infty}{\to} (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}=(\vec{e}_1\vec{0}\vec{0})\begin{pmatrix} \vec{e}_1^t \\ \vec{e}_2^t \\ \vec{e}_2^t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2e_2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3e_3 \end{pmatrix}, \vec{e}_1=$ $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2e_2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3e_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0^A \\ p_0^B \\ p_0^C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_1^2p_0^A+e_1e_2p_0^B+e_1e_3p_0^C \\ e_2^2p_0^B+e_1e_2p_0^A+e_2e_3p_0^C \\ e_3^2p_0^C+e_1e_3p_0^A+e_2e_3p_0^B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_1(e_1p_0^A+e_2p_0^B+e_3p_0^C) \\ e_2(e_1p_0^A+e_2p_0^B+e_3p_0^C) \\ e_3(e_1p_0^A+e_2p_0^B+e_3p_0^C) \end{pmatrix}$$

この値が p_0^A, p_0^B, p_0^C に依存しないから $e_1=e_2=e_3$. このときに、A,B,C にある確率は $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ だから全て等しい。

５．A,B 二人がそれぞれコインをa 枚、b 枚持っている。コインの合計は$N(=a+b, N>0))$ とする。中を見ることができない箱の中に、$p:(1-p),(0<p<1)$ の割合で赤いボールと白いボールが入っており、そこから1 個のボールを取り出す。赤いボールがでたらA がB からコインを1 枚受け取り、白いボールがでたらA がB にコインを1 枚渡す。コインの受け取りの後で、ボールは元に戻すとする。この操作を繰り返して何れか一方のコインが無くなったら、その時点で無くなった方の負けとする。A がn 枚のコインを持っているときにA が負ける確率を$R(n)$ とする。以下に答えよ。(H20)

（1）$R(0), R(N)$ を求めよ。

（2）A がn 枚のコインを持っている時に赤いボールを取り出せば$R(n)$ であったA の負ける確率$R(n+1)$ がとなり、白いボールを取り出せば、負ける確率が$R(n-1)$ となる。このことに注意して、$R(n)$ を$R(n+1), R(n-1), p$ で表せ。但し、$0 < n < N.$

（3）（1）で求めた$R(0)$ の値を利用して、更に$R(1) = r_1$ とするときに、（2）の関係から$R(n)$ を求めよ。

（4）（1）で求めた$R(N)$ の値と（3）の結果を用いてr_1 を求めよ。

（5）a を変えず$b \to \infty$ にとしたときに$R(a)$ を求めよ。

（解）（1）$R(0) = 1, R(N) = 0$

（2）$R(n) = pR(n+1) + (1-p)R(n-1)$

（3）、（4）$R(n) = pR(n+1) + (1-p)R(n-1), R(n+1) = \frac{1}{p}R(n) + (1-\frac{1}{p})R(n-1).$

$\vec{R}(n) = \begin{pmatrix} R(n+1) \\ R(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p}R(n) + (1-\frac{1}{p})R(n-1) \\ R(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & (1-\frac{1}{p}) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(n) \\ R(n-1) \end{pmatrix}$

$= A\vec{R}(n-1) = A^2\vec{R}(n-2) = ... = A^n\vec{R}(0), \vec{R}(0) = \begin{pmatrix} R(1) \\ R(0) \end{pmatrix}.$

最初に、行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & (1-\frac{1}{p}) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めて対角化する。固有値・固有ベクトルは、$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1, c_2 \begin{pmatrix} 1-p \\ p \end{pmatrix} \leftrightarrow -(1-\frac{1}{p}).$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & p \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p}{2p-1} & \frac{(p-1)}{2p-1} \\ -\frac{1}{2p-1} & \frac{1}{2p-1} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = D, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(1-\frac{1}{p}) \end{pmatrix}.$

$A = PDP^{-1}, A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-(1-\frac{1}{p}))^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p}{2p-1} & \frac{(p-1)}{2p-1} \\ -\frac{1}{2p-1} & \frac{1}{2p-1} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{p}{2p-1} + \frac{(p-1)}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n & \frac{(p-1)}{2p-1} - \frac{(p-1)}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \\ \frac{p}{2p-1} - \frac{p}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n & \frac{(p-1)}{2p-1} + \frac{p}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} R(n+1) \\ R(n) \end{pmatrix} = A^n\vec{R}(0) = \begin{pmatrix} \frac{p}{2p-1} + \frac{(p-1)}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n & \frac{(p-1)}{2p-1} - \frac{(p-1)}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \\ \frac{p}{2p-1} - \frac{p}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n & \frac{(p-1)}{2p-1} + \frac{p}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} r_1\left(\frac{p}{2p-1} + \frac{(p-1)}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n\right) + \frac{(p-1)}{2p-1} - \frac{(p-1)}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \\ r_1\left(\frac{p}{2p-1} - \frac{p}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n\right) + \frac{(p-1)}{2p-1} + \frac{p}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \end{pmatrix}. R(n) = r_1\left(\frac{p}{2p-1} - \frac{p}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n\right) + \frac{(p-1)}{2p-1} + \frac{p}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$

（4）$R(N) = r_1\left(\frac{p}{2p-1} - \frac{p}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^N\right) + \frac{(p-1)}{2p-1} + \frac{p}{2p-1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^N =$

$0, r_1 = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - \frac{1-p}{p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}$.

$R(n) = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - \frac{1-p}{p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}\left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n\right)\frac{p}{2p-1} + 1 + \frac{p}{2p-1}(\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1) = 1 - \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}$.

（5）$R(a) = 1 - \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} \overset{N\to\infty}{\to} \left(\frac{1-p}{p}\right)^a$

5.3 最近の編入学試験問題から

5.3.1 何故か良くでる (i)– 同じ形が

A, Y をn 次正方行列、E をn 次単位行列とし、$f(x, Y) = |xE - AY| - |xE - YA|$ とする。以下に答えよ。

（1）$f(x, Y)|Y| = \{|xE - AY| - |xE - YA|\}|Y| = 0$ を証明して、$|xE - AY| = |xE - YA|, (|Y| \neq 0)$ を示せ。

（2）n 次正方行列A, B について、AB の固有値とBA の固有値は同じである。

（3）$\begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & \dots & a_2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_na_n \end{pmatrix}$ のゼロでない固有値を求めよ。

（解）（1）$f(x, Y)|Y| = \{|xE - AY| - |xE - YA|\}|Y| = |Y| \cdot |xE - AY| - |xE - YA| \cdot |Y| = |Y - YAY| - |Y - YAY| = 0$.

故に、$|xE - AY| = |xE - YA|, (|Y| \neq 0)$.

（2）最初に一般に行列 C が 0 を固有値として持つ場合は、$|C| = 0$ が成り立つことに注意する。何故ならば、行列 C が 0 を固有値として持つなら方程式 $C\vec{x} = 0$ となる $\vec{x} \neq 0$ が存在するので、$|C| = 0$ が成り立つ。逆も明らかである。だから、AB が 0 を固有値として持てば $|AB| = 0$。よって、$|A| \cdot |B| = 0$ が成り立ち $|BA| = 0$. だから、BA は 0 を固有値として持つ。次に、$AB\vec{x} = \lambda\vec{x}$ とし、$\lambda \neq 0$ とする。このときに、$(BA)(B\vec{x}) = B(AB\vec{x}) = B(\lambda\vec{x}) = \lambda B\vec{x}$ が成り立つので、λ は BA の固有値で、$B\vec{x}$ が固有値 λ に随伴する固有ベクトルであり、主張が示せた。

（別法）（1）の結果から、行列 Y が正則行列 $(\det Y = |Y| \neq 0)$ であれば、$|xE - AY| = |xE - YA|$ により、行列 AY の固有値と行列 YA の固有値は同じである。また、行列 Y が正則行列でないときには、$\det Y = 0$ から、$\det AY = \det A \det Y = 0$ 及び、$\det YA = \det Y \det A = 0$ から、行列 YA, AY は共に 0 を固有値とする。

（3）$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} A = \overset{n\text{ 行}}{\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{0} & ... & \vec{0} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ a_2 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ a_n & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$

とおくと、$A^t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ だから、$AA^t = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ a_2 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ a_n & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & ... & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & ... & a_2a_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_na_1 & a_na_2 & ... & a_na_n \end{pmatrix}.$

また、$A^tA = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ a_2 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ a_n & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_j^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$

だから、$|xE - A^tA| = \det \begin{pmatrix} x - \sum_{j=1}^n a_j^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & x & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & x \end{pmatrix} = x^{n-1}(x - \vec{a}^t\vec{a})$

により、固有値は、$\vec{a}^t\vec{a} = |\vec{a}|^2, 0.$

よって、（2）の結果から、行列 AA^t の固有値は行列 A^tA の固有値と同じで、$0, |\vec{a}|^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2.$

5.3.2 何故かよくでる (ii)– 類似の形で

点$(1,0)$ を点$(a,0)$ に、点$(1,1)$ を点$(a+b, 1-a)$ にそれぞれ移す一次変換をf とする。但し、a,b は実数とし、変換f を表す行列をF で表す。

（1）行列F を求めよ。

（2）行列F が対角化できる条件を述べて、対角化できる場合に対角化せよ。

（3）一次変換f のn 回の積をf^n で表す。点(x,y) が一次変換f^n で移される点を求めよ。

（解）（1）$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b \\ 1-a \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} =$
$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\to A = \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$

（2）固有値・固有ベクトル: $c_1\begin{pmatrix}-b\\2a-1\end{pmatrix}\leftrightarrow 1-a, c_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\leftrightarrow a, P=$ $\begin{pmatrix}-b&1\\2a-1&0\end{pmatrix}, \det(P)=1-2a\neq 0$

$\to P^{-1}AP=D, D=\begin{pmatrix}1-a&0\\0&a\end{pmatrix}$

（3）$A=PDP^{-1}, P^{-1}=\frac{1}{1-2a}\begin{pmatrix}0&-1\\1-2a&-b\end{pmatrix}$,

$A^n=PD^nP^{-1}=\frac{1}{1-2a}\begin{pmatrix}-b&1\\2a-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1-a)^n&0\\0&a^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1-2a&-b\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}a^n&\frac{b\{a^n-(1-a)^n\}}{2a-1}\\0&(1-a)^n\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a^n&\frac{b\{a^n-(1-a)^n\}}{2a-1}\\0&(1-a)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^nx+\frac{b\{a^n-(1-a)^n\}}{2a-1}y\\y(1-a)^n\end{pmatrix}$

（類題）行列$A=\begin{pmatrix}1-p&p\\q&1-q\end{pmatrix}, 0<p,q<1$ **に対して、以下に答えよ。**

（1）固有値と固有ベクトルを求めよ。但し、固有ベクトルは単位ベクトルにせよ。

（2）A^n **を求めよ。**

（3）$\lim_{n\to\infty}A^n$ **を求めよ。**

（4）漸化式$\vec{v}_{n+1}=A\vec{v}_n$ **でベクトルの列**$\{\vec{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ **を作るときに、**$\lim_{n\to\infty}\vec{v}_n\neq 0$ **となるような**$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ **の条件を求めよ。**

（北大、名大）

（解）(1) 固有ベクトル: $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\leftrightarrow 1, \begin{pmatrix}-\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\\\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\end{pmatrix}\leftrightarrow 1-q-p$

（2）$A=\begin{pmatrix}1-p&p\\q&1-q\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-p-q+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{q}{p+q}\sqrt{2}&\frac{p}{p+q}\sqrt{2}\\-\frac{1}{p+q}\sqrt{p^2+q^2}&\frac{1}{p+q}\sqrt{p^2+q^2}\end{pmatrix}$ $=PDP^{-1}$

$\to A^n=PD^nP^{-1}$

$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&(-p-q+1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{q}{p+q}\sqrt{2}&\frac{p}{p+q}\sqrt{2}\\-\frac{1}{p+q}\sqrt{p^2+q^2}&\frac{1}{p+q}\sqrt{p^2+q^2}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}(-p-q+1)^n&\frac{p}{p+q}-\frac{p}{p+q}(-p-q+1)^n\\\frac{q}{p+q}-\frac{q}{p+q}(-p-q+1)^n&\frac{p}{p+q}+\frac{q}{p+q}(-p-q+1)^n\end{pmatrix}$

（3）$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}, (-1 < -p-q+1 < 1)$

（4）$\lim_{n\to\infty} \vec{v}_n = \lim_{n\to\infty} A^{n-1}\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\frac{y_1}{p+q} + q\frac{x_1}{p+q} \\ p\frac{y_1}{p+q} + q\frac{x_1}{p+q} \end{pmatrix} \neq 0$

$\to py_1 + qx_1 \neq 0$

5.3.3　一次変換と図形

行列$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$について以下に答えよ。

（1）A の固有値・固有ベクトルを求めよ。

（2）行列A が表す一次変換によって、直線；$x = 2y = 3z$ は何に移されるか。

（3）A が表す一次変換によって自分自身に移される直線で、どの２組も平行でないものを求めよ。

(解)（1）固有値･固有ベクトル:$c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -1, c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1, c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 3$

（2）$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6s \\ 3s \\ 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22s \\ -9s \\ 8s \end{pmatrix} \to \frac{X}{22} = -\frac{Y}{9} = \frac{Z}{8}$; 原点を通る直線

（3）$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} as \\ bs \\ cs \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7as+4bs-16cs \\ bs-6as+12cs \\ 2as+2bs-5cs \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 7a+4b-16c \\ b-6a+12c \\ 2a+2b-5c \end{pmatrix}$

$\to \frac{7a+4b-16c}{a} = \frac{b-6a+12c}{b} = \frac{2a+2b-5c}{c} = k \to \begin{cases} (7-k)a + 4b - 16c = 0 \\ -6a + (1-k)b + 12c = 0 \\ 2a + 2b - (5+k)c = 0 \end{cases}$

$\to \det\begin{pmatrix} 7-k & 4 & -16 \\ -6 & 1-k & 12 \\ 2 & 2 & -5-k \end{pmatrix} = -k^3+3k^2+k-3 = -(k-3)(k-1)(k+1) = 0 \to k = 1, -1, 3$

$(i) k = 1, \begin{cases} 6a + 4b - 16c = 0 \\ -6a + 12c = 0 \\ 2a + 2b - 6c = 0 \end{cases}, a = 2c, b = c \to \frac{x}{2} = y = z : L_1$

$$(ii)k=-1,\begin{cases}8a+4b-16c=0\\-6a+2b+12c=0\\2a+2b-4c=0\end{cases},a=2c,b=0\rightarrow y=0,\frac{x}{2}=z:L_2$$

$$(iii)k=3,\begin{cases}4a+4b-16c=0\\-6a-2b+12c=0\\2a+2b-8c=0\end{cases},a=c,b=3c\rightarrow x=\frac{y}{3}=z:L_3$$

求める組は、$(L_1,L_3),(L_2,L_3)$

5.3.4 平面幾何（余り授業では）

正六角形$ABCDEF$において$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AF}=\vec{b}$とし辺$CD$の中点を$P$辺$DE$の中点を$Q$とする。以下に答えよ。

（1）$\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}$を$\vec{a},\vec{b}$で表せ。

（2）線分CQと線分FPとの交点をRとして$\overrightarrow{AR}$を$\vec{a},\vec{b}$で表せ。

（3）線分ARと線分FCとの交点をSとして$CS:SF$を求めよ。

（解）（1）$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}\vec{b}=2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b},\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FQ}=\vec{b}+(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

（2）CQ上のベクトル；$t\overrightarrow{AC}+(1-t)\overrightarrow{AQ}=t(2\vec{a}+\vec{b})+(1-t)(\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b})=(\frac{1}{2}t+\frac{3}{2})\vec{a}+(2-t)\vec{b}$

FP上のベクトル；$s\overrightarrow{AF}+(1-s)\overrightarrow{AP}=s\vec{b}+(1-s)(2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b})=2(1-s)\vec{a}+(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}s)\vec{b}$

$$R;\begin{cases}(\frac{1}{2}t+\frac{3}{2})=2(1-s)\\(2-t)=(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}s)\end{cases},s=\frac{1}{9},t=\frac{5}{9}\rightarrow\overrightarrow{AR}=(\frac{5}{18}+\frac{3}{2})\vec{a}+(2-\frac{5}{9})\vec{b}=\frac{16}{9}\vec{a}+\frac{13}{9}\vec{b}$$

（3）FC上のベクトル；$(1-u)\overrightarrow{AF}+u\overrightarrow{AC}=(1-u)\vec{b}+u(2\vec{a}+\vec{b})=2u\vec{a}+\vec{b}=k\overrightarrow{AR}=k(\frac{16}{9}\vec{a}+\frac{13}{9}\vec{b})$

$$\rightarrow\begin{cases}k=\frac{9}{13}\\2u=\frac{16}{9}k=\frac{16}{9}\frac{9}{13}=\frac{16}{13},u=\frac{8}{13}\end{cases},u=\frac{8}{13}\Longrightarrow CS:SF=5:8$$

5.3.5 空間の図形（イメージがどうも...）

空間で、xz平面上の単位ベクトル$(u,0,w)$を考える。以下に答えよ。$(i)y$軸の周りの回転を表す行列のうちで、ベクトル$(0,0,1)$をベクトル$(u,0,w)$に変換するものを求めよ。$(ii)(i)$で求めた行列を用いて、ベクトル$(u,0,w)$を軸とする角度θの回転を表す行列を求めよ。$(iii)(ii)$で求めた行列の実数の固有値とその固有ベクトルを求めよ。

（解）$(i)\begin{pmatrix}w&0&u\\0&1&0\\-u&0&w\end{pmatrix}(u^2+w^2=1)$

$(ii)(ii)$ 座標軸を取り換える（座標変換する）。ベクトル $e_1 = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$ が新しい座標系の１つの座標軸になるように、３次元空間に新しい直交座標軸系を入れる。残りは例えば、$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$ とし、座標変換 $\begin{cases} \vec{x} = T\vec{x}' \\ \vec{x}' = T^t\vec{x} \end{cases}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & -u \end{pmatrix}$. 即ち、

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & -u \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ u & 0 & w \\ w & 0 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ をする。次に、この座標系 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ で、y' 軸を中心とする θ の回転を表す変換は、行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ で表現されるので、求める変換は、$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ u & 0 & w \\ w & 0 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ となる。

だから、変換を与える行列は元の座標系に戻して、$\begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ u & 0 & w \\ w & 0 & -u \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} u^2 + (\cos\theta)\, w^2 & w\sin\theta & uw - uw\cos\theta \\ -w\sin\theta & \cos\theta & u\sin\theta \\ uw - uw\cos\theta & -u\sin\theta & (\cos\theta)\, u^2 + w^2 \end{pmatrix} (u^2 + w^2 = 1)$ となる。

$(iii) A(u,w,\theta) = \begin{pmatrix} u^2 + (\cos\theta)\, w^2 & w\sin\theta & uw - uw\cos\theta \\ -w\sin\theta & \cos\theta & u\sin\theta \\ uw - uw\cos\theta & -u\sin\theta & (\cos\theta)\, u^2 + w^2 \end{pmatrix} (u^2 + w^2 = 1)$

特性多項式は、$X^3 - \left(\cos\theta(1 + u^2 + w^2) + 1\right) X^2 + \left(u^2 + w^2\right)\left(\cos\theta(1 + u^2 + w^2) + 1\right) X - \left(u^2 + w^2\right)^2$
$= X^3 - (2\cos\theta + 1)\, X^2 + (2\cos\theta + 1)\, X - 1 = (X - 1)\left(X^2 - 2(\cos\theta)\, X + 1\right)$
固有値:$X = 1, X = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

$\xrightarrow{\text{real}}$ $(a)\sin\theta\neq 0\rightarrow$ 実な固有値は $X=1$ だけで固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} u^2+(\cos\theta)\,w^2-1 & w\sin\theta & uw-uw\cos\theta \\ -w\sin\theta & \cos\theta-1 & u\sin\theta \\ uw-uw\cos\theta & -u\sin\theta & (\cos\theta)\,u^2+w^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} u \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$

$(b)\sin\theta=0\rightarrow$

$\cos\theta=1\rightarrow A(u,w,0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 固有値 1, 固有ベクトルは任意の

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\cos\theta=-1\rightarrow A(u,w,0)=\begin{pmatrix} u^2-w^2 & 0 & 2uw \\ 0 & -1 & 0 \\ 2uw & 0 & u^2-w^2 \end{pmatrix}$ 実な固有値は 3 つで、$-1, u^2\pm 2uw-w^2$.

固有ベクトルは、$-1\leftrightarrow a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u^2-2uw-w^2\leftrightarrow b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 2uw+u^2-w^2\leftrightarrow c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

（類題）$\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **として、以下に答えよ。**

(1) **ベクトル**$\vec{w}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **に対して、分解**$\vec{w}=\vec{w}_1+\vec{w}_2$ **で次の性質を満たすようにせよ。**

$(i)\vec{w}_1$ **と**$\vec{v}$ **は直交する。**$(ii)\vec{w}_2$ **は**$\vec{v}$ **のスカラー倍である。**

(2)$\vec{v}$ **と直交するベクトル全体は**R^3 **の部分空間をなす。その正規直交系を求めよ。**

(3) **ベクトル**$\vec{v}$ **を回転軸として** 120° **回転する変換を考える。これはどのような行列で表現できるか。**

（解）（1）$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \\ 3-z \end{pmatrix}(i)\rightarrow x+y+z=0(ii)\begin{cases} 1-x=s \\ 2-y=s \\ 3-z=s \end{cases}$

$1-s+(2-s)+(3-s)=0\ , s=2$

解は: $1 \to\to\to \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

（2）$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \to x + y + z = 0 \to \vec{w} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} c \\ d \\ -c-d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \to c + c + d = 0 \to d = -2c \to \begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}$

$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

（3）新しい座標軸として $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ を選ぶ。そのときに、座標変換は

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で与えられる。次に、新しい座標系で x' 軸を中心とした回転は $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ で与えられる。よって、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

5.3.6 多くの学校で（再び良くでる）

3 次元空間の原点をO, **点**A **の位置ベクトルを**$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ **で表す。点**A **を通り、方向ベクトルが**$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} (\neq \vec{0})$ **である直線**l **が与えられている。以下に答えよ。**

(1) 直線l の方程式を書け。

(2) 空間に位置ベクトルが$\vec{p}=\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ である点が与えられた時に、点P に最も近いl 上の点をQ とする。点Q の位置ベクトル$\vec{q}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ を、$\vec{q}=L\vec{p}+\vec{b}$ の形で表せ。但し、$L,\vec{b}$ は直線l だけで定まり、$\vec{q},\vec{p}$ には無関係な行列とベクトルである。

(3) 行列L の階数を求めよ。

(4) 行列L の固有値、固有ベクトルを求めよ。

（解）（１）$\vec{r}=t\vec{v}+\vec{a}$

（２）$\vec{q}=t\vec{v}+\vec{a},(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{v}=0 \rightarrow (\vec{p}-t\vec{v}-\vec{a})\cdot\vec{v}=0 \rightarrow t|\vec{v}|^2=(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{v} \rightarrow\rightarrow\rightarrow t=\frac{(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}$

$\rightarrow \vec{q}=\frac{(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}+\vec{a}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}+(\vec{a}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v})$

第１項;$\frac{\vec{p}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}=\frac{p_1v_1+p_2v_2+p_3v_3}{|\vec{v}|^2}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{|\vec{v}|^2}\begin{pmatrix} v_1(p_1v_1+p_2v_2+p_3v_3) \\ v_2(p_1v_1+p_2v_2+p_3v_3) \\ v_3(p_1v_1+p_2v_2+p_3v_3) \end{pmatrix}=\frac{1}{|\vec{v}|^2}\begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2v_3 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & v_3v_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{|\vec{v}|^2}\begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2v_3 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & v_3v_3 \end{pmatrix}\vec{p}$

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow L=\frac{1}{|\vec{v}|^2}\begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2v_3 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & v_3v_3 \end{pmatrix},\vec{b}=\vec{a}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$

（３）$L=\frac{1}{|\vec{v}|^2}\begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2v_3 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & v_3v_3 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{v_1v_2v_3}{|\vec{v}|^2}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{v_1^2v_2^2v_3^2}{|\vec{v}|^2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow\rightarrow rank(L)=1$

（４）$\begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2v_3 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & v_3v_3 \end{pmatrix}$ 固有ベクトル: $\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -v_3 \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 0,\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow v_1^2+v_2^2+v_3^2$（**問題１**参照）

（類題）１．s を実数、$\vec{v}$ を実数を成分とする３次元列ベクトルとして、$A_s = E - s\vec{v}\vec{v}^t$ と定義する。以下に答えよ。

(i)A_s が直交行列になるようにs の値を決めよ。

(ii) 必要なときには、A_s が対称行列であることを用いて、A_s の全ての固有値を求めよ。

(iii) 実数を成分とする３次元列ベクトル$\vec{x}_0$ に対して、$\vec{x}_{i+1} = A_s\vec{x}_i, i = 0, 1, ..., n, ...$ と定める。このときに、全てのベクトル$\vec{x}_0$ に対して、ベクトルの列$\{\vec{x}_i\}$ が収束する為のs の範囲を求めよ。また、その場合に、極限ベクトル$\vec{x}_\infty$ を$\vec{x}_0$ と$\vec{v}$ とで表せ。

（解）(i)$A_s = E - s\vec{v}\vec{v}^t \to A_s^t = (E - s\vec{v}\vec{v}^t)^t = E^t - s(\vec{v}\vec{v}^t)^t = E - s(\vec{v}^t)^t(\vec{v})^t = E - s\vec{v}\vec{v}^t$

$\to A_sA_s^t = (E - s\vec{v}\vec{v}^t)(E - s\vec{v}\vec{v}^t) = E - 2s\vec{v}\vec{v}^t + s^2\vec{v}\vec{v}^t\vec{v}\vec{v}^t = E - 2s\vec{v}\vec{v}^t + s^2|\vec{v}|^2\vec{v}\vec{v}^t$

$\to\to\to E = E - 2s\vec{v}\vec{v}^t + s^2|\vec{v}|^2\vec{v}\vec{v}^t \to s(s|\vec{v}|^2 - 2)\vec{v}\vec{v}^t = O \to s = \frac{2}{|\vec{v}|^2}$

(ii)$A_s = E - s\vec{v}\vec{v}^t = E - s\begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2v_3 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & v_3v_3 \end{pmatrix} = E - sL$

$|A_s - \lambda E| = |E - sL - \lambda E| = |(1-\lambda)E - sL| = |s(\frac{1-\lambda}{s}E - L)| = |s(\frac{1-\lambda}{s}E - L)| = s|\mu E - L|$

$\mu = \frac{1-\lambda}{s}$ が行列 L の固有値。

但し、$L = \begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2v_3 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & v_3v_3 \end{pmatrix}$; 固有値･固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -v_3 \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 0, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$

よって、$\frac{1-\lambda}{s} = 0, |\vec{v}|^2 \to\to\to 1 - \lambda = 0, s|\vec{v}|^2 \to\to\to \lambda = 1, 1 - s|\vec{v}|^2$

(iii)$\vec{x}_i = A_s\vec{x}_{i-1} = A_s^2\vec{x}_{i-2} = ... = A_s^n\vec{x}_0, P^{-1}A_sP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - s|\vec{v}|^2 \end{pmatrix}$

$\to\to\to A_s^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - s|\vec{v}|^2)^n \end{pmatrix}P^{-1} \to\to\to |1 - s|\vec{v}|^2| < 1, A_s^\infty = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$

$\vec{x}_\infty = A_s^\infty\vec{x}_0 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\vec{x}_0,$

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-v_2&-v_3&v_1\\v_1&0&v_2\\0&v_1&v_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-v_2&\frac{v_1^2+v_3^2}{v_1}&-\frac{v_2v_3}{v_1}\\-v_3&-\frac{v_2v_3}{v_1}&v_1^2+v_2^2\\v_1&v_2&v_3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-v_2&\frac{1}{v_1}\left(v_1^2+v_3^2\right)&-\frac{1}{v_1}v_2v_3\\-v_3&-\frac{1}{v_1}v_2v_3&v_1^2+v_2^2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（類題）２．行列$\begin{pmatrix}v_1v_1&v_1v_2&v_1v_3\\v_2v_1&v_2v_2&v_2v_3\\v_3v_1&v_3v_2&v_3v_3\end{pmatrix}$**の固有値を求め、その絶対値が最大なものに対する固有ベクトルを計算せよ。**

（解）上で済み

（類題）３．実数a,b,c**が条件**$a^2+b^2+c^2=1$**を満たすときに、行列**$A=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}$**は固有値として**$0($**重複度**$2),1$**を持つことを示し固有ベクトルを求めよ。逆に、対称行列**$A=\begin{pmatrix}l&a&b\\a&m&c\\b&c&n\end{pmatrix}$**が固有値として**$0($**重複度**$2),1$**を持つときに各要素（元）の間に成り立つ関係式を示せ。**

（解）$\begin{vmatrix}a^2-\lambda&ab&ac\\ab&b^2-\lambda&bc\\ac&bc&b^2-\lambda\end{vmatrix}$

$=(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(b^2-\lambda)+2a^2b^2c^2-b^2c^2(a^2-\lambda)-a^2b^2(c^2-\lambda)-c^2a^2(b^2-\lambda)$

$=-\lambda^3+(a^2+b^2+c^2)\lambda^2-(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)\lambda+a^2b^2c^2$

$+2a^2b^2c^2-3a^2b^2c^2+(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)\lambda$

$=\lambda^2(1-\lambda)$

固有ベクトルは、(i)$\lambda=0$ のとき、$\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{cases}a^2x+aby+acz=0\\abx+b^2y+bcz=0\\acx+bcy+c^2z=0\end{cases}\rightarrow if\quad c\neq0, ax+by+cz=0, z=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y, x;free, y;free$

(i)$\lambda=1$ のとき、$\begin{pmatrix}a^2-1&ab&ac\\ab&b^2-1&bc\\ac&bc&c^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{cases}(a^2-1)x+aby+acz=0\\abx+(b^2-1)y+bcz=0\\acx+bcy+(c^2-1)z=0\end{cases}\rightarrow if\quad c\neq0,\begin{vmatrix}a^2-1&ab\\ab&b^2-1\end{vmatrix}=1-b^2-a^2\neq0$

$\rightarrow x = \frac{acz}{1-b^2-a^2}, y = \frac{bcz}{1-b^2-a^2}, z; free$

逆に対称行列 $A = \begin{pmatrix} l & a & b \\ a & m & c \\ b & c & n \end{pmatrix}$ が 固有値として０（重複度２）、１を持つとする。この行列は、対角化され正規化された固有ベクトルを、それぞれ $1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, 0 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$ すると対角化直交行列 T は、$T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ となる。この場合に、$T^tAT = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が成り立っているので、$A = TDT^t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & a_1c_1 \\ a_1b_1 & b_1^2 & b_1c_1 \\ a_1c_1 & b_1c_1 & c_1^2 \end{pmatrix}$ であり主張が示された。

（類題）４．R^3 の原点O、長さ１のベクトル$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ について、平面π を$\pi = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \vec{a} \cdot \vec{x} = 0\}$ する。任意の点$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を端点とするベクトル$\overrightarrow{OP} = \vec{v}$ について、点P から平面π に下ろした垂線と平面π との交点をQ とする。以下に答えよ。

（１）$\overrightarrow{PQ}$ ベクトルを$\vec{a}, \vec{v}$ で表せ。

（２）ベクトル$\vec{v}$ について、平面π に関して$\vec{v}$ と対称なベクトル$\vec{v}'$ を考え、ベクトル$\vec{v}$ をベクトル$\vec{v}'$ に対応させる写像をϕ とする。このときに、$\vec{v}'$ を$\vec{v}, \vec{a}$ で表せ。

（３）ϕ は線形写像であることを示せ。

（４）ϕ の基本基底$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する行列表現A を求めよ。

（５）A を対角化せよ。

（解）（１）$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} = -$（ベクトル $\overrightarrow{OP}$ のベクトル $\vec{a}$ への正射影の長さ）$\vec{a} = -(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{a}$

（２）$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{a} \rightarrow \frac{\vec{v}+\vec{v}'}{2} = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{a} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{a}$

（３）$\vec{v}' = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{a}, \vec{u}' = \vec{u} - 2(\vec{u} \cdot \vec{a})\vec{a}$

$\rightarrow (\vec{u}+\vec{v})' = (\vec{u}+\vec{v}) - 2((\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{a})\vec{a} = \vec{u} - 2(\vec{u}\cdot\vec{a})\vec{a} + \vec{v} - 2(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{a} = \vec{u}' + \vec{v}'$,
$(k\vec{u})' = k\vec{u} - 2(k\vec{u}\cdot\vec{a})\vec{a} = k\vec{u}'$

（４）$\vec{e_1'} = \vec{e}_1 - 2(\vec{e}_1\cdot\vec{a})\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2a\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a^2 \\ -2ab \\ -2ac \end{pmatrix}$

$\vec{e_2'} = \vec{e}_2 - 2(\vec{e}_2\cdot\vec{a})\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2b\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ab \\ 1-2b^2 \\ -2bc \end{pmatrix}$

$\vec{e_3'} = \vec{e}_3 - 2(\vec{e}_3\cdot\vec{a})\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2c\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ac \\ -2bc \\ 1-2c^2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$

ここで、良く現れる行列 $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = C$ の固有値・固有ベクトル
及び対角化について調べると、

特性多項式 $X^3 - Tr(C)X^2 + \left(c^2\left(a^2+b^2\right) - a^2c^2 - b^2c^2\right)X + \det(C), Tr(A) = a^2+b^2+c^2 = 1, \det(C) = 0$

固有値: $1, 0.$ 固有ベクトル；$1 \leftrightarrow k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, 0 \leftrightarrow m\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, n\begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

$\rightarrow P = \begin{pmatrix} a & -b & -c \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}CP = D.$

以上を参考にすると、$P^{-1}AP = P^{-1}(1-2C)P = E - 2P^{-1}CP = E - 2D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.3.7 古くて新しい（ごく最近、本校専攻科でも、問題集にある）

以下に答えよ。

（１）R^3 内の平面$\pi; x+y+z=0$ の正規直交基底を組求めよ。

（２）ベクトル$\vec{v} \in R^3$ に対して、（１）の平面π への正射影を対応させる線形写像$R^3 \rightarrow R^3$ をf とする。f を与える行列A を求めよ。

（３）（２）の行列A の固有値を求めよ。

（解）（1）$\vec{x} \in \pi \to x+y+z=0, z=-x-y$

$$\Longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}\cdot\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2x+y=0, y=-2x, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{e}_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e}_{3,0} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（2）$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, 平面 π への正射影 $\vec{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$; $(i) v_1' + v_2' + v_3' = 0.$

$$(ii)(\vec{v}-\vec{v}') \perp \pi \to \frac{v_1-v_1'}{1} = \frac{v_2-v_2'}{1} = \frac{v_3-v_3'}{1} = -s, \begin{cases} v_1' = v_1 + s \\ v_2' = v_2 + s \\ v_3' = v_3 + s \end{cases} \xrightarrow{(i)}$$

$$v_1 + s + v_2 + s + v_3 + s = 0 \to s = -\frac{v_1+v_2+v_3}{3}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} v_1' = v_1 - \frac{v_1+v_2+v_3}{3} = \frac{2v_1-v_2-v_3}{3} \\ v_2' = v_2 - \frac{v_1+v_2+v_3}{3} = \frac{-v_1+2v_2-v_3}{3} \\ v_3' = v_3 - \frac{v_1+v_2+v_3}{3} = \frac{-v_1-v_2+2v_3}{3} \end{cases} \to \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}' = A\vec{v}, A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

（3）固有値: $1, 0$

5.3.8 関数ベクトル空間（最近流行の...）

２次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間をP とする。P からP への写像L を、実定数a について、$L(p) = \frac{1}{2}(x^2+1)\frac{d^2p}{dx^2} - (x+a)\frac{dp}{dx} + p, (p \in P)$ と定める。

（1）L は線形写像であることを示せ。

（2）L の基底$\{1, x, x^2\}$ に関するL の行列表示を求めよ。

（3）L の固有値を求めよ。

（4）$Ker(L) = \{p \in P; L(p) = 0\}$ **の次元を求めよ。**

（5）$\mathrm{Im}(L) = \{Lp; p \in P\}$ **の基底を求めよ。**

（解）（1）略

（2）$L(1) = 1, L(x) = -(x+a)+x = -a, L(x^2) = (x^2+1)-2x(x+a)+x^2 = -2ax+1$

$$\to \{1, -a, -2ax+1\} = \{1, x, x^2\}\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to L = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 固有値: $0, 1$

（4）$p = Ax^2+Bx+C \in Ker(L) \to A(x^2+1)-(x+a)(2Ax+B)+Ax^2+Bx+C = -2Aax+(A+C-Ba) = 0 \to \begin{cases} aA = 0 \\ A+C-Ba = 0 \end{cases}$

$(i) a \neq 0, A = 0, C = aB \to p = Bx+aB = B(x+a) \to \dim(Ker(L)) = 1$

$(ii) a = 0, C = -A, B; free \to p = Ax^2+Bx-A = A(x^2-1)+Bx \to \dim(Ker(L)) = 2$

（5）$Lp = -2Aax+(A+C-Ba)$

$(i) a \neq 0 \to \dim(\mathrm{Im}(L)) = 2$

$(ii) a = 0 \to Lp = (A+C) \to \dim(\mathrm{Im}(L)) = 1$

（類題）複素数を係数とするt **についての２次以下の多項式全体が作る複素数上のベクトル空間を**V **とする。**$V = \left\{a+bt+ct^2; a, b, c \in C\right\}$. **以下に答えよ。**

（1）$\left\{(1-t)^2, (1+t)^2, t^2\right\}$ **は**V **の基底かどうか。理由を付けて答えよ。**

（2）複素数α **について、**V **から**V **への線形写像**$\phi_\alpha : V \to V$ **を**$\phi_\alpha(f(t)) = (t+1)\frac{d^2f}{dt^2}(t)+(t-1)\frac{df}{dt}(t)+\alpha f(t), f(t) \in V$ **と定義する。このときに、**

(i)V **の基底**$\left\{1, t, t^2\right\}$ **に関する**ϕ_α **の表現行列を求めよ。**

(ii) 任意の$g(t) \in V$ **に対して、**$\phi_\alpha(f(t)) = g(t)$ **を満たす**$f(t) \in V$ **が存在する為の**α **に関する条件を求めよ。**

(iii)$\phi_\alpha(f(t)) = 2+t^2$ **を満たす**$f(t) \in V$ **が存在する為の**α **に関する条件を求めよ。**

（解）（1）$e_1 = (1-t)^2, e_2 = (1+t)^2, e_3 = t^2 \to e_1+e_2-2e_3 = 2, e_1-e_2 = 4t$

$\to a+bt+ct^2 = \frac{a}{2}(e_1+e_2-2e_3)+\frac{b}{4}(e_1-e_2)+ce_3$ となるから、基底である。

（2）(i)$\phi_\alpha(1) = \alpha, \phi_\alpha(t) = (t-1)+\alpha t = (\alpha+1)t-1,$

$\phi_\alpha(t^2) = 2(t+1)+2t(t-1)+\alpha t^2 = (\alpha+2)t^2+2$

$$\to\to\to \left(\phi_\alpha(1), \phi_\alpha(t), \phi_\alpha(t^2)\right) = \left(1, t, t^2\right)\begin{pmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix}$$

(ii)$\det\begin{pmatrix}\alpha & -1 & 2\\ 0 & \alpha+1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha+2\end{pmatrix}=\alpha\left(\alpha+2\right)\left(\alpha+1\right)\neq 0\rightarrow\alpha\neq 0,-1,-2$

(iii)$f(t)=A+Bt+Ct^2\rightarrow\phi_\alpha(f(t))=2C(t+1)+(t-1)(2Ct+B)+\alpha(Ct^2+Bt+A)$

$=(2C+\alpha C)t^2+(B+\alpha B)t+(2C-B+\alpha A)=t^2+2\rightarrow\begin{cases}(2+\alpha)C=1\\(1+\alpha)B=0\\(2C-B+\alpha A)=2\end{cases}$

$\rightarrow\alpha\neq 0,-2$

5.3.9 正射影（直交分解、シュミットの直交基底も関連...）

(i) ベクトル$\vec{x}$をベクトル$\vec{x}'$に対応させる変換Tがある。$\vec{x}'$がベクトル$\vec{a}$に平行で$\vec{x}-\vec{x}'$が$\vec{a}$と直交するときに、変換Tを$\vec{a}$への正射影作用素という。また、$\vec{x}'$を$\vec{x}$の$\vec{a}$への正射影という。$\vec{x}'=T\vec{x}$を$\vec{a}$と$\vec{x}$とを用いて表せ。

(ii)$\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix},|\vec{a}|=1$であるとして、$\vec{a}$への正射影作用素$T$を行列で表せ。

（解）(i)$\vec{x}'=c\vec{a},(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\vec{a}=(\vec{x}-c\vec{a})\cdot\vec{a}=\vec{x}\cdot\vec{a}-c|\vec{a}|^2=0\rightarrow c=\frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\rightarrow\vec{x}'=\frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

(ii)$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\vec{x}'=\frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=(\alpha x+\beta y+\gamma z)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(\alpha x+\beta y+\gamma z)\\ \beta(\alpha x+\beta y+\gamma z)\\ \gamma(\alpha x+\beta y+\gamma z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma\\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma\\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$\rightarrow T=\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma\\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma\\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2\end{pmatrix}$（またでた**此奴！**）

5.3.10 対角化できないときには、Jordan の標準形

実定数aに対して行列$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -3 & a & -1-a\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$を考える。以下に答えよ。

（1）行列Aの固有多項式を求めよ。

（2）行列Aが対角化可能でない定数aを全て求め、Jordan の標準形に直せ。

（解）（1）特性多項式: $X^3+(-a-3)X^2+(3a+2)X-2a=(X-1)(X-2)(X-a)$

（２）(i)$a=1; A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 固有値・固有ベクトル（拡大固有ベクトル）を求めると、

$(a)\lambda_1=2;$固有ベクトル、$(A-2E)\vec{x}_1=0 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_1=c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(b)\lambda_2=1;$固有ベクトル$\vec{x}_2$、$(A-E)\vec{x}_2=0 \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2=c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

拡大固有ベクトル $\vec{x}_3$；$(A-E)^2\vec{x}_3=0 \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3=c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（注意）拡大固有ベクトル $\vec{x}_3$ を求める替わりに方程式 $(A-E)\vec{x}_4=\vec{x}_2$ の解 $\vec{x}_4$ を求めると、$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x+z \\ -3x-2z \\ -2x-z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} 2x+z=0 \\ -3x-2z=1 \end{cases}$ 解は、$x=1, z=-2, y; free, \vec{x}_4=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. これは、上で求めた拡大固有ベクトル $\vec{x}_3$ と同じである。このベクトル $\vec{x}_4$ が $\vec{x}_2$ 及び $\vec{x}_1$ と独立なことは、$\vec{x}_4=c\vec{x}_2$ と

すると、$(A-E)(c\vec{x}_2)=\vec{x}_2, c(A-E)\vec{x}_2=\vec{x}_2, \vec{x}_2=0$ 矛盾。$\vec{x}_4=c\vec{x}_1$ とすると、$(A-E)(c\vec{x}_1)=\vec{x}_2, \vec{x}_2=cA\vec{x}_1-c\vec{x}_1=2c\vec{x}_1-c\vec{x}_1=c\vec{x}_1$ となり $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ が一次従属になり矛盾。

(ii)$a=2; A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 固有値・固有ベクトル: $c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1, c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2.$ 対角化可能

5.3.11 表現行列（言葉の意味を）

R^3 の部分集合$V=\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; x+y+z=0\}$、線形写像$\phi: R^3 \to R^3, \phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} -x \\ z \\ y+2x \end{pmatrix}$ を考える。以下に答えよ。

（1）V はR^3 の部分ベクトル空間であることを示せ。

（2）$\phi(V) \subset V$ を示せ。

（3）V の基底を１組求めよ。

（4）$\phi_V: V \to V$ を、ϕ をV に制限して得られる線形写像とする。このときに、（3）で求めたV の基底に関するϕ_V の表現行列を求めよ。

（解）（１）省略

（２）$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$ について、$\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} -x \\ z \\ y+2x \end{pmatrix}$ だから、$(-x)+z+(y+2x)=x+y+z=0$ が成り立ち $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \in V$ がいえた。

（３）$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ から、基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

（４）$\phi_V: e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \phi_V: e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow (\phi_V(e_1), (\phi_V(e_2)) = (e_1, e_2)\, A \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

5.4 最後に P.R.

この分野の問題は、**「分野別問題集ー線形代数」**にここで取り上げた問題を含めて全て解答付きで纏めてあります。

また、他の分野についても分野毎に纏めて解答を付けてあります。そこには、各節の問題の後に、**”発展問題”**が載せてあります。これらは、少し程度の高い問題を纏めてあります。一通り勉強を終えた人は挑戦して下さい。

更に、大学毎に過去に出題された問題を集めて解答が付けてあります。過去の問題を調べて対策を立てることは大切ですが、年毎に傾向が変わることもあるので余り分野や傾向を決め込んでしまうのは考えモノです。

付けてある解答は一つの例です。他の解法がある問題も多くあります。また、略解なので実際に答案に書くときには、接続詞に注意しましょう。