1　数学特論２ー「Chapter ２」線形微分方程式の解法

1.1　線形微分方程式の解の性質

次の n 階の**定数係数線形常微分方程式**を考える。

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=f(x)...(1)$$

ここで各係数は定数であるとする。上の式は $\frac{d^k y}{dx^k}=y^{(k)}$ と簡単に書けば

$$a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_n y=f(x)...(2)$$

と書ける。以下 (2) の形で取り扱う。(2) に対して、右辺の $f(x)$ を 0 としてできる

$$a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_n y=0...(3)$$

を考える。この (3) は**定数係数線形斉次常微分方程式**と呼ばれる。この時に、次の事実が大切である。

定理 1 方程式 (3) の解 $y_1(x),y_2(x)$ について $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ は (3) の解である。但し、c_1,c_2 は定数。

定理 2 (2) の一般解 $y(x)$ は、(3) の一般解 $y_1(x)$ と (2) の特殊解（*1* つの解）$y_0(x)$ を用いて $y(x)=y_1(x)+y_0(x)$ と書ける。

従って、我々は、*(i)*(3) **の一般解**$y_1(x)$ **を求めること**、*(ii)*(2) **の特殊解（***1* **つの解）**$y_2(x)$ **を求めること**、の 2 つを実行すれば良い。

（注意）ここで、(3) の方程式の一般解のことについて触れておこう。(3) の方程式の一般解 $y_1(x)$ は n 個の独立な解 $Y_1(x),...,Y_n(x)$ と任意定数 $C_1,...,C_n$ を用いて $y_1(x)=C_1Y_1(x)+...+C_nY_n(x)$ と表される。ここで、n 個の解

$Y_1(x),...,Y_n(x)$ が独立であるとは、ベクトルの場合と同様に、どの 1 つも残りの一次結合で表すことが出来ないことであるとする。独立かどうかの判定の仕方は、ロンスキー行列と呼ばれる次の行列式 $W(Y_1(x),...,Y_n(x))$ の値が 0 でないことで判定出来る。

$$W(Y_1(x),...,Y_n(x))=\begin{vmatrix} Y_1(x) & ... & Y_n(x) \\ Y_1'(x) & ... & Y_n'(x) \\ . & ... & . \\ Y_1^{(n-1)}(x) & ... & Y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

1.2 定数係数線形斉次常微分方程式の一般解の求め方

方程式 (3) の一般解を求める為に、一番簡単な一階の場合を考える。この時は、y' の係数でわり算をしておけば、

$$y' - ay = 0...(4)$$

となる。この方程式は変数分離形なので次ぎのよう解が求まる。(4) を丁寧に書けば、

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

従って、

$$\frac{dy}{y} = ax$$

両辺を積分して、

$$\int \frac{dy}{y} = \int adx、\log y = ax + c$$

よって、

$$y = e^{ax+c} = Ce^{ax}, (C = e^c)$$

となる。◀

但し、ここで、関数 e^{ax} の意味は定数 a が

(i) 実数の時には普通の指数関数

$$e^{ax}$$

であるが、

(ii) 複素数の時には、$a = \alpha + \beta i$ として、**オイラーの公式**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を用いて

$$e^{ax} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

とする。

次に、一般に n 階の方程式 (3) に対しては、$y = e^{\rho x}$ が解になると仮定して代入すれば、ρ は次の代数方程式を満たすことがわかる。

$$a_0\rho^n + a_1\rho^{n-1} + ... + a_{n-1}\rho + a_n = 0...(5)$$

この方程式 (5) を (3) の**特性方程式**といい、この解（根）を**特性解（根）**という。特性解を、$\rho_1, ..., \rho_n (\rho_i \neq \rho_j, i \neq j)$ として、各 $\rho_i (i = 1, ..., n)$ に対して、

$(i)\rho_i$ が実数の時には、

$$\text{指数関数}\ y = e^{\rho_i x}$$

が得られ、

(ii) 複素数 $\rho_j = \alpha_j \pm \beta_j i$ の時には、$y_{\pm} = e^{\alpha_j x}(\cos\beta_j x \pm i \sin\beta_j x)$ が得られるが、これらの関数の和、差及び定数倍も解だから、

$$y = e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x$$

が解であることがわかる。

それでは、特性方程式が重解を持つ場合はどのようになるであろう。最初に、特性方程式が重解を持つ最も簡単な場合について、未定係数法と呼ばれる方法で解いてみよう。

例題 *1.*$y'' - 2ay' + a^2 y = 0$ の２つの独立な解を求めよ。

(解法) 先ず、特性方程式は $\rho^2 - 2a\rho + a^2 = (\rho - a)^2 = 0$ で、特性解は $\rho = a$（二重解）だから、１つの解は $y = e^{ax}$ であるが、それと独立な解を $y = u(x)e^{ax}$ の形で求める。この時に、

$$y' = u'(x)e^{ax} + au(x)e^{ax},$$

$$y'' = u^{''}(x)e^{ax} + 2au'(x)e^{ax} + a^2 u(x)e^{ax}$$

だから、最初の方程式に代入して、

$$u^{''}(x)e^{ax} + 2au'(x)e^{ax} + a^2 u(x)e^{ax} - 2a(u'(x)e^{ax} + au(x)e^{ax}) + a^2 u(x)e^{ax} = 0,$$

となる。従って、

$$u^{''}(x)e^{ax} = 0$$

から ,

$$u^{''}(x) = 0$$

となり、

$$u(x) = Ax + B$$

を得る。

だから、

$$e^{ax}, xe^{ax}$$

が求める独立な解の組である。◀

（注意） ここで用いた方法は、定数変化法とよばれ、微分方程式を解くのに有効な方法の１つで良く用いられる。

今後の取り扱いを簡単にするために、ここで新しい記号を導入しておく。方程式 (4) は丁寧に書くと、

$$\frac{dy}{dx} - ay = 0$$

であるが、これを

$$(\frac{d}{dx} - a)y = 0$$

更に、$D = \frac{d}{dx}$ と書いて、

$$(D - a)y = 0$$

と書く。この記号を用いると、(2) 及び (3) はそれぞれ次のように簡単に書ける。

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = f(x)...(2)'$$

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = 0...(3)'$$

(3)′ の形にすれば、(5) は見やすい。

この表現の使い易さを例で示す.

例題 *2.*$y'' - y' - 2y = 0$ の独立な解を求めよ。

（解法）$(D^2 - D - 2)y = (D - 2)(D + 1)y = (D + 1)(D - 2)y$ が成り立つ。

このことから、$(D+1)y = 0$ 及び $(D-2)y = 0$ の解は何れも $(D^2-D-2)y = 0$ の解であるが、方程式 $(D + 1)y = 0$ と $(D - 2)y = 0$ はどちらも (4) の形をしているので、それぞれの解は，e^{-x}, e^{2x} である．従って，$(D^2 - D - 2)y = 0$ は 2 つの独立な解 e^{-x}, e^{2x} を持つ．◀

以下の計算では、次の関係式を良く使う。

$$(D - a)(e^{ax}y) = e^{ax}Dy$$

この関係式を用いると上の例題 1 の場合も含めて次の**例題**が簡単に解ける。

例題 *3.*$(D - a)^ny = 0$ の独立な解を求めよ.

*(***解法）**

$$(D - a)^ny = (D - a)^n(e^{ax}e^{-ax}y) = (D - a)^{n-1}(D - a)(e^{ax}e^{-ax}y)$$

$$= (D - a)^{n-1}e^{ax}D(e^{-ax}y) = (D - a)^{n-2}e^{ax}D^2(e^{-ax}y)$$

$$= ... = e^{ax}D^n(e^{-ax}y)$$

だから、最初の方程式は

$$e^{ax}D^n(e^{-ax}y) = 0$$

に変る。従って、

$$D^n(e^{-ax}y) = 0$$

だから、上の式で n 回積分すれば、

$$e^{-ax}y = (n-1) \text{ 次の多項式}$$

となって、

$$y = x^{n-1}e^{ax}, x^{n-2}e^{ax}, ..., xe^{ax}, e^{ax}$$

の n 個の独立な解を得る。◀

（注意）例題 1 は上の例題 3 で $n = 2$ の場合である。

上の例題 3 から、微分方程式 (3) の一次独立な解は、その特性方程式の解のようすによって次ぎのようにまとめることが出来る。

(i) 実数 ρ_i が m_i 重解の時には、

$$\{x^{m_i-1}e^{\rho_i x}, x^{m_i-2}e^{\rho_i x}, ..., xe^{\rho_i x}, e^{\rho_i x}\}$$

の m_i 個が独立な解である.

更に,

(ii) 複素数 $\rho_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ が m_j 重解の時には、

$$\{x^{m_j-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, x^{m_j-2}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, ..., xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x\},$$

$$\{x^{m_j-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, x^{m_j-2}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, ..., xe^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x\}$$

の $2m_j$ 個が独立な解である。これらは何れも独立であることに注意しておこう。

1.3 定数係数線形非斉次常微分方程式の特殊解の求め方

以下は方程式 (2) または $(2)'$ の特殊解（1 つの解）を求める。右辺の関数がそれぞれ以下のような具体的な形の時に解法を与える。

1.3.1 $f(x) = e^{kx}$ の場合

最初に一番簡単な場合を考える。

例題 *4.*

$$(D-a)y = e^{kx}$$

の特殊解は

$$(i)k \neq a \text{ の場合は } y = \frac{1}{k-a}e^{xk}, (ii)k = a \text{ の場合は } y = xe^{xk}$$

となる。

（解法）$(i)(D-a)y = (D-a)(e^{ax}e^{-ax}y) = e^{ax}D(e^{-ax}y)$ だから、方程式

$$(D-a)y = e^{kx}$$

は

$$e^{ax}D(e^{-ax}y) = e^{kx}$$

即ち、

$$D(e^{-ax}y) = e^{(k-a)x}$$

となる。ここで両辺を積分すれば、$k \neq a$ だから

$$e^{-ax}y = \int e^{(k-a)x}dx = \frac{1}{k-a}e^{(k-a)x}$$

ここで、解を 1 つ求めれば良いので、積分定数は省略してある。これからの計算も同様である。

よって、

$$y = \frac{1}{k-a}e^{kx}$$

を得る。◀

(ii) 上と同様にして方程式

$$(D-a)y = e^{ax}$$

は

$$e^{ax}D(e^{-ax}y) = e^{ax}$$

即ち、

$$D(e^{-ax}y) = 1$$

となる。ここで両辺を積分すれば、

$$e^{-ax}y = \int 1dx = x$$

よって、

$$y = xe^{kx}$$

◀

一般の場合については、次の例題を考えよう。

例題 *5.* 微分方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx}$$

の解は、

$$F(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n$$

としたときに、

$$F(k) \neq 0 \text{ ならば、} y = \frac{1}{F(k)}e^{kx}$$

で与えられる。

*(***解法）** 作用素 D を普通の文字のように扱って

$$a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n = a_0(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)...(D-\alpha_n)$$

のように因数分解する。但し、α_i は実数または、複素数とする。この時に、方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx}$$

は

$$a_0(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)...(D-\alpha_n)y = e^{kx}$$

となる。

ここで、例題 1 の方法によって上の方程式は、$\alpha_1 \neq k$ だから、

$$(D-\alpha_2)...(D-\alpha_n)y = \frac{1}{a_0(k-\alpha_1)}e^{kx}$$

になる。以下順にこれを繰り返すと、$\alpha_1 \neq k, \alpha_2 \neq k, ...\alpha_n \neq k$ だから

$$(D-\alpha_n)y = \frac{1}{a_0(k-\alpha_1)(k-\alpha_2)...(k-\alpha_{n-1})}e^{kx}$$

従って、

$$y = \frac{1}{a_0(k-\alpha_1)(k-\alpha_2)...(k-\alpha_{n-1})(k-\alpha_n)}e^{kx} = \frac{1}{F(k)}e^{kx}$$

を得る。◀

例題 *6.* 微分方程式

$$(D-k)^n y = e^{kx}$$

の解は

$$y = \frac{x^n}{n!}e^{kx}$$

で与えられる。

（解法）方程式

$$(D-k)^n y = e^{kx}$$

を

$$(D-k)^{n-1}(D-k)y = e^{kx}$$

と書き直して例題４で用いた方法を使うと

$$(D-k)^{n-1}e^{kx}D(e^{-kx}y) = e^{kx}$$

となる。以下この方法を繰り返し用いて

$$(D-k)e^{kx}D^{n-1}(e^{-kx}y) = e^{kx}$$

最後に

$$e^{kx}D^n(e^{-kx}y) = e^{kx}$$

を得るが、両辺を e^{kx} で割って

$$D^n(e^{-kx}y) = 1$$

となり、両辺を n 回積分して、

$$e^{-kx}y = \frac{x^n}{n!}$$

となり、

$$y = \frac{x^n}{n!}e^{kx}$$

が得られる。◀

まとめ 3 微分方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx}$$

の解は

$$F(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n$$

として、

$$F(D) = (D-k)^m G(D), G(k) \neq 0$$

と因数分解したときに、

$$y = \frac{x^m}{G(k)m!}e^{kx}$$

の特殊解を持つ。但し、$0! = 1$ とする。

例題 *7.* 次の微分方程式の特殊解を求めよ。

(1)$y'' + y' - 2y = e^{2x}$(2)$y'' - y' - 2y = e^{2x}$(3)$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

(解法)(1)$F(D) = D^2 + D - 2, F(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4 \neq 0$ だから、$y = \frac{1}{4}e^{2x}$

(2)$F(D) = D^2 - D - 2 = (D-2)(D+1)$ だから、$y = \frac{x}{(2+1)}e^{2x} = \frac{x}{3}e^{2x}$

(3)$F(D) = D^2 - 4D + 4 = (D-2)^2$ だから、$y = \frac{x^2}{2!}e^{2x} = \frac{x^2}{2}e^{2x}$ ◀

(注意)上のまとめからもわかるように、微分方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx}$$

の解は

$$F(\rho) = a_0\rho^n + a_1\rho^{n-1} + ... + a_{n-1}\rho + a_n$$

として、

$$F(k) \neq 0$$

ならば、

$$y = Ae^{kx}$$

の形の解を持ち、

$$F(\rho) = (\rho-k)^m G(\rho), G(k) \neq 0$$

と因数分解したときには、

$$y = Ax^m e^{kx}$$

の形の解を持つので、それぞれ $y = Ae^{kx}$ または、$y = Ax^m e^{kx}$ と置いて、方程式に代入して係数 A を決めることも出来る。

上の例題をその方法でやって見よう。

（別の解法）（１）$F(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4 \neq 0$ だから、$y = Ae^{2x}$ の形の解を持つので $y = Ae^{2x}$ から、$y' = 2Ae^{2x}, y'' = 4Ae^{2x}$ となるので、これらをもとの方程式に代入して、$4Ae^{kx} = e^{2x}$. よって、$A = \frac{1}{4}$

(2)$F(\rho) = \rho^2 - \rho - 2 = (\rho - 2)(\rho + 1)$ だから、$y = Axe^{2x}$ の形の解を持つので $y = Axe^{2x}$ から、$y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}, y'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$ となるので、これらをもとの方程式に代入して、$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} -$（$Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$）$- 2Axe^{2x} = e^{2x}, 3Ae^{2x} = e^{2x}$. よって、$A = \frac{1}{3}$

(3)$F(\rho) = \rho^2 - 4\rho + 4 = (\rho - 2)^2$ だから、$y = Ax^2e^{2x}$ の形の解を持つので $y = Ax^2e^{2x}$ から、$y' = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}, y'' = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x}$ となるので、これらをもとの方程式に代入して、$2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} - 4(2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}) + 4Ax^2e^{2x} = e^{2x}.2Ae^{2x} = e^{2x}$. よって、$A = \frac{1}{2}$ ◀

1.3.2 $f(x) = \sin\omega x($ または $\sin\omega x)$ の場合

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

に注意して、方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = \cos\omega x(\text{または}\sin\omega x)...(1)$$

が与えられた時には、方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)Y = e^{i\omega x}...(2)$$

を考える。この方程式の解 Y の実部と虚部をそれぞれ y_1, y_2 と置き、右辺をオイラーの公式で書き直すと、

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)(y_1 + iy_2) = \cos\omega x + i\sin\omega x...(3)$$

となる。両辺の実部と虚部をそれぞれ比較すれば、y_1, y_2 はそれぞれ次の 2 つの方程式の解になっていることがわかる。

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y_1 = \cos\omega x...(4)$$
$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y_2 = \sin\omega x....(5)$$

以下で方程式 (2) の解法を考える。しかし、この方程式の特殊解の求め方は、前節でやった

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx}; k \text{ は実数}$$

の場合の結果がそのまま適用出来る。即ち、

まとめ 4 微分方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)Y = e^{i\omega x}$$

の解は

$$F(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n$$

として

$$F(D) = (D - i\omega)^m G(D), G(i\omega) \neq 0$$

と因数分解したときに、

$$Y = \frac{x^m}{G(i\omega)m!}e^{i\omega x}$$

の特殊解を持つ。以下、(4), (5) の解を求めるには、$Y = \frac{x^m}{G(i\omega)m!}e^{i\omega x}$ でオイラーの公式

$$e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x$$

を用い、

$$\frac{x^m}{G(i\omega)m!}(\cos\omega x + i\sin\omega x)$$

全体の実部と虚部を計算することになる。

以下に具体的な例題で方法を示そう。

例題 *8.* 次の方程式の特殊解を求めよ。

１．$y'' - 3y' + 2y = \cos x$(又は $\sin x$)

２．$y'' + 4 = \cos 2x$ (又は $\sin 2x$)

(解法) １．$F(D) = D^2 - 3D + 2$ と置いて、$F(i) = i^2 - 3i + 2 = 1 - 3i \neq 0$ だから、方程式

$y'' - 3y' + 2y = e^{ix}$ の解は、$Y = \frac{1}{1-3i}e^{ix} = (\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i)(\cos x + i\sin x) =$

$\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x + i(\frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x)$ である。従って、

$$y_1 = \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x,$$
$$y_2 = \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$$

がそれぞれ

$$y'' - 3y' + 2y = \cos x,$$
$$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

の解である。◀

2．$F(D) = D^2 + 4$ と置いて、$F(2i) = 0$ だから、$F(D) = D^2 + 4 = (D + 2i)(D - 2i)$ と因数分解して、方程式 $y'' + 4y = e^{i2x}$ の解は、$Y = \frac{x}{4i}e^{i2x} = -\frac{1}{4}ix(\cos 2x + i\sin 2x) = \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}ix\cos 2x$ である。従って、

$$y_1 = \frac{1}{4}x\sin 2x,$$
$$y_2 = -\frac{1}{4}x\cos 2x$$

がそれぞれ

$$y'' + 4 = \cos 2x,$$
$$y'' + 4 = \sin 2x$$

の解である。◀

（注意） この例のように、純虚数 $i\omega$ が $F(D) = 0$ の解であるとは、$F(D)$ が $D^2 + \omega^2$ の因子を持つことであり、一般には

$$F(D) = (D^2 + \omega^2)^k G(D)$$

$G(i\omega) \neq 0$ と因数分解出来ることである。

(注意） 上のまとめからもわかるように、微分方程式

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = \cos\omega x(\text{または}\sin\omega x)$$

の解は

$$F(\rho) = a_0\rho^n + a_1\rho^{n-1} + ... + a_{n-1}\rho + a_n$$

として、

$$F(i\omega) \neq 0$$

ならば、

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

の形の解を持ち、

$$F(\rho) = (\rho - i\omega)^m G(\rho), G(i\omega) \neq 0$$

と因数分解したときには、

$$y = x^m(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$$

の形の解を持つので、それぞれ $y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ または、$y = x^m(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ と置いて、方程式に代入して係数 A, B を決めることも出来る。

上の例題をこの方法でやって見よう。

(別の解法) 1．$F(D) = D^2 - 3D + 2$ と置いて、$F(i) = i^2 - 3i + 2 = 1 - 3i \neq 0$ だから、$y = A\cos x + B\sin x$ の形の解を持つ、$y\prime = -A\sin x + B\cos x, y'' = -A\cos x - B\sin x$ これらをもとの方程式に代入して、$-A\cos x - B\sin x - 3(-A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x + B\sin x) = \cos x($ 又は $\sin x)$.

よって、

$$(A - 3B)\cos x + (B + 3A)\sin x = \cos x(\text{又は}\sin x),$$

故に、、連立方程式

$$\begin{cases} A - 3B = 1 \\ B + 3A = 0 \end{cases}, \text{又は} \begin{cases} A - 3B = 0 \\ B + 3A = 1 \end{cases}$$

を解けば、それぞれ

$$A = \frac{1}{10}, B = -\frac{3}{10}, \text{又は } B = \frac{1}{10}, A = \frac{3}{10}$$

となる。だから、求める解はそれぞれ

$$y = \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x, \text{又は } y = \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x$$

を得る。◀

2．$F(\rho) = \rho^2 + 4 = (\rho + 2i)(\rho - 2i)$、だから $y = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$ の形の解を持つ、$\begin{cases} y\prime = -2Ax\sin 2x + A\cos 2x + 2Bx\cos 2x + B\sin 2x \\ y'' = -4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x + 4B\cos 2x - 4Bx\sin 2x \end{cases}$ をもとの方程式に代入して、

$$-4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x + 4B\cos 2x - 4Bx\sin x + 4(Ax\cos 2x + Bx\sin 2x) = \cos 2x(\text{又は}\sin 2x),$$

よって

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \cos 2x(\text{又は}\sin 2x),$$

だから、連立方程式

$$\begin{cases} A = 0 \\ 4B = 1 \end{cases}, \text{又は} \begin{cases} -4A = 1 \\ 4B = 0 \end{cases}$$

を解けば、それぞれ

$$A = 0, B = \frac{1}{4}, \text{又は } B = 0, A = -\frac{1}{4}$$

となる。だから、求める解はそれぞれ

$$y = \frac{1}{4}x\sin 2x, \text{又は } y = -\frac{1}{4}x\cos 2x$$

を得る。◀

1.3.3　$f(x)=e^{kx}\cos\omega x$(**または** $e^{kx}\sin\omega x$) **の場合**

この場合も前の 2 つの場合と同様に出来る。
詳しく書けば、

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+...+a_{n-1}D+a_n)y=e^{kx}\cos\omega x(\text{または}\, e^{kx}\sin\omega x)$$

の特殊解を求めるには、

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+...+a_{n-1}D+a_n)Y=e^{(k+i\omega)x}$$

の解 Y を求めて、$Y=y_1+iy_2$ としたときに、y_1,y_2 はそれぞれ次の方程式の特殊解になっている。

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+...+a_{n-1}D+a_n)y_1=e^{kx}\cos\omega x$$

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+...+a_{n-1}D+a_n)y_2=e^{kx}\sin\omega x$$

従って、前節と同様な結果が得られる。

まとめ 5 微分方程式

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+...+a_{n-1}D+a_n)Y=e^{(k+i\omega)x}$$

の解は

$$F(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+...+a_{n-1}D+a_n$$

として

$$F(D)=(D-(k+i\omega))^mG(D),G(k+i\omega)\neq 0$$

と因数分解したときに、

$$Y=\frac{x^m}{G(k+i\omega)m!}e^{(k+i\omega)x}$$

の特殊解を持つ。以下、y_1,y_2 を求めるには $\frac{x^m}{G(k+i\omega)m!}e^{(k+i\omega)x}$ に再びオイラーの公式

$$e^{i\omega x}=\cos\omega x+i\sin\omega x$$

用い、として $\frac{x^m}{G(k+i\omega)m!}e^{kx}(\cos\omega x+i\sin\omega x)$ 全体の実部と虚部を計算することになる。

具体的な例題で実際の計算を示す。
例題 *9.*$y''-3y'+2y=e^{3x}\cos 2x$(又は $\sin 2x$) の特殊解を求めよ。

（解法）$F(D)=D^2-3D+2$ と置いて、$F(3+2i)=(3+2i)^2-3(3+2i)+2=-2+6i\neq 0$ だから、方程式 $y''-3Y'+2Y=e^{(3+2i)x}$ の解は、

$$Y=\frac{1}{-2+6i}e^{(3+2i)x}$$

であるが、これを計算すると、$Y=(-\frac{1}{20}-\frac{3}{20}i)e^{3x}(\cos 2x+i\sin 2x)=-\frac{1}{20}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{20}e^{3x}\sin 2x+i\left(-\frac{3}{20}e^{3x}\cos 2x-\frac{1}{20}e^{3x}\sin 2x\right)$ となるので、

$$y_1=-\frac{1}{20}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{20}e^{3x}\sin 2x=-\frac{1}{20}e^{3x}\left(\cos 2x-3\sin 2x\right)$$

または

$$y_2=-\frac{3}{20}e^{3x}\cos 2x-\frac{1}{20}e^{3x}\sin 2x=-\frac{1}{20}e^{3x}\left(3\cos 2x+\sin 2x\right)$$

が求める解である。◀

（注意）上のまとめからもわかるように、微分方程式

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+...+a_{n-1}D+a_n)y=e^{kx}\cos\omega x(e^{kx}\sin\omega x)$$

の解は

$$F(\rho)=a_0\rho^n+a_1\rho^{n-1}+...+a_{n-1}\rho+a_n$$

として、

$$F(k+i\omega)\neq 0$$

ならば、

$$y=e^{kx}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$$

の形の解を持ち、

$$F(\rho)=(\rho-(k+i\omega))^mG(\rho),G(k+i\omega)\neq 0$$

と因数分解できる時は、

$$y=x^me^{kx}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$$

の形の解を持つので、それぞれ $y=e^{kx}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$ または、$y=x^me^{kx}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$ と置いて、方程式に代入して係数 A,B を決めることも出来る。

上の例題をこの方法でやって見よう。

（別の解法）$F(D)=D^2-3D+2$ と置いて、$F(3+2i)=(3+2i)^2-3(3+2i)+2=-2+6i\neq 0$ だから、方程式は

$$y=e^{3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$$

形の解を持つ。

$y = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ から、$\begin{cases} y' = 3e^{3x}A\cos 2x + 3e^{3x}B\sin 2x - 2e^{3x}A\sin 2x + 2e^{3x}B\cos 2x \\ y'' = 5e^{3x}A\cos 2x + 5e^{3x}B\sin 2x - 12e^{3x}A\sin 2x + 12e^{3x}B\cos 2x \end{cases}$

となり、これらをもとの方程式に代入して、

$5e^{3x}A\cos 2x + 5e^{3x}B\sin 2x - 12e^{3x}A\sin 2x + 12e^{3x}B\cos 2x$

$-3(3e^{3x}A\cos 2x + 3e^{3x}B\sin 2x - 2e^{3x}A\sin 2x + 2e^{3x}B\cos 2x) + 2e^{3x}(A\cos 2x +$
$B\sin 2x) = e^{3x}\cos 2x($ 又は $\sin 2x)$.

従って,

$$-2e^{3x}(A-3B)\cos 2x - 2e^{3x}(B+3A)\sin 2x = e^{3x}\cos 2x(\text{又は}\sin 2x),$$

よって連立方程式

$$\begin{cases} A - 3B = -\frac{1}{2} \\ B + 3A = 0 \end{cases}, \text{又は} \begin{cases} A - 3B = 0 \\ B + 3A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

を解けば、それぞれ

$$A = -\frac{1}{20}, B = \frac{3}{20}, \text{又は } B = -\frac{1}{20}, A = -\frac{3}{20}$$

となる。だから、求める解はそれぞれ

$$y = e^{3x}(-\frac{1}{20}\cos 2x + \frac{3}{20}\sin 2x), \text{又は } y = e^{3x}(-\frac{3}{20}\cos 2x + -\frac{1}{20}\sin 2x)$$

を得る。◀

1.3.4 $f(x) =$ 多項式の場合

右辺 $f(x)$ が多項式の場合は山辺の方法といわれるわり算で解を求めることが出来る。例題でその方法を紹介する。

例題 *10.* 1. $y'' - y' - 2y = -48x^2 - 76x + 44$

2. $y'' - y' = 48x^2 - 76x + 44$ の特殊解を求めよ。

(解法) 方程式を $(D^2 - D - 2)y = -48x^2 - 76x + 44$ と書いて、形式的に $y = (D^2 - D - 2)^{-1}(-48x^2 - 76x + 44)$ と置き、

$$(-48x^2 - 76x + 44) \div (-2 - D + D^2)$$

のわり算を実行すると、

$$(-48x^2 - 76x + 44) \div (-2 - D + D^2) = 24x^2 + 14x - 5$$

となる。◀

２．方程式 $(D^2-D)y=-48x^2-76x+44$ を

$$(D-1)Dy=-48x^2-76x+44$$

と書いて、

$$Dy=Y$$

と置くと、Y は

$$(D-1)Y=-48x^2-76x+44$$

の解だから１．と同じようにわり算をして、

$$Y=(D-1)^{-1}(-48x^2-76x+44)$$

$$=(-48x^2-76x+44)\div(-1+D)=48x^2+172x+128$$

だから、

$$Dy=48x^2+172x+128$$

積分して、

$$y=16x^3+86x^2+128x$$

◀

(注意）上の例から推測されるように、微分方程式

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+...+a_{n-1}D+a_n)y=(x\text{ の }n\text{ 次の多項式})$$

の解は、

$$F(\rho)=a_0\rho^n+a_1\rho^{n-1}+...+a_{n-1}\rho+a_n$$

と置いた時に、

$$\begin{cases} (i)F(0)\neq 0\text{ の場合は、}y=x\text{ の }n\text{ 次の多項式} \\ (ii)F(0)=0,F(D)=D^mG(D),G(0)\neq 0(0\text{ が }m\text{ 重解})\text{ の場合は、}y=x\text{ の }(n+m)\text{ 次の多項式} \end{cases}$$

の形の解をそれぞれ持つ。このことを用いて係数を決める方法がある。

例題 *11.*$y''-y'-2y=x^2+x+1$

(解法）求める解を $y=Ax^2+Bx+C$ とおいて、$y'=2Ax+B,y''=2A$ を代入すると、

$$2A-(2Ax+B)-2(Ax^2+Bx+C)=x^2+x+1,$$

つまり

$$-2Ax^2-(2A+2B)x+(2A-B-2C)=x^2+x+1,$$

両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases} -2A=1 \\ -2A-2B=1 \\ 2A-B-2C=1 \end{cases}$$

この方程式を解くと、$A=-\frac{1}{2}, B=0, C=-1$ を得る。従って、求める解は

$$y=-\frac{1}{2}x^2-1$$

である。◀

1.3.5 $f(x)=e^{kx}\times(x$ の多項式 $)$

最初に簡単な例で解法を示そう。

例題 *1* 2. 方程式

$$(D-a)y=xe^{kx}$$

の解は、$(i)k\neq a$ のとき、

$$y=\frac{1}{k-a}(xe^{kx}-\frac{1}{k-a}e^{kx})$$

$(ii)k=a$ のとき、

$$y=\frac{1}{2}x^2e^{ax}$$

(解法) $(D-a)(e^{ax}e^{-ax}y)=e^{ax}D(e^{-ax}y)$ から、

$$e^{ax}D(e^{-ax}y)=xe^{kx}$$

よって、方程式は

$$D(e^{-ax}y)=xe^{(k-a)x}$$

となる。

$(i)k\neq a$ のとき、両辺を積分して

$$\begin{aligned} e^{-ax}y&=\int xe^{(k-a)x}dx=\frac{1}{k-a}\{xe^{(k-a)x}-\int e^{(k-a)x}dx\} \\ &=\frac{1}{k-a}(xe^{(k-a)x}-\frac{1}{k-a}e^{(k-a)x})...(*) \end{aligned}$$

から、

$$y = \frac{1}{k-a}(xe^{kx} - \frac{1}{k-a}e^{kx})$$

を得る。

$(ii)k = a$ のとき、$(*)$ 式は、

$$e^{-ax}y = \int xdx = \frac{1}{2}x^2 ...(**)$$

よって、

$$y = \frac{1}{2}x^2 e^{ax}$$

を得る。◀

（注意）１． 方程式

$$(D-a)y = x^n e^{kx}$$

の場合には、上の計算で、式 $(*), (**)$ は、それぞれ

$$e^{-ax}y = \int x^n e^{(k-a)x}dx ...(*)^{'}$$

$$e^{-ax}y = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} ...(**)'$$

となる。$(*)^{'}$ で、$\int x^n e^{(k-a)x}dx$ を計算するには、

$$I_n = \int x^n e^{(k-a)x}dx$$

と置き、部分積分の計算によって、n に関する漸化式

$$\begin{aligned} I_n &= \int x^n e^{(k-a)x}dx \\ &= \frac{x^n}{k-a}e^{(k-a)x} - \frac{n}{k-a}\int x^{n-1}e^{(k-a)x}dx \\ &= \frac{x^n}{k-a}e^{(k-a)x} - \frac{n}{k-a}I_{n-1} \end{aligned}$$

を得る。この漸化式から、I_n を求めて $(*)^{'}$ に代入すれば、$k \neq a$ の場合の特殊解が得られる。また、$k = a$ のときには、$(**)'$ から、特殊解 $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}e^{ax}$ が得られる。◀

２．（１） 方程式

$$(D-a)^2 y = xe^{kx} (k \neq a)$$

の解を求めるには、$(D-a)^2 y = xe^{kx}$ を

$$(D-a)(D-a)y = xe^{kx}$$

と変形して、

$$(D-a)y = Y$$

と置けば、Y は、方程式

$$(D-a)Y = xe^{kx}(k \neq a)$$

を満たす。この方程式の解 Y は、上の主張により、

$$Y = \frac{1}{k-a}(xe^{kx} - \frac{1}{k-a}e^{kx})$$

と与えられる。よって、未知関数 y は、方程式

$$(D-a)y = \frac{1}{k-a}(xe^{kx} - \frac{1}{k-a}e^{kx})$$

の解である。この方程式を解くには、2つの方程式$\left\{\begin{array}{l}(D-a)y = \frac{1}{k-a}xe^{kx}...(1)\\ (D-a)y = \frac{1}{(k-a)^2}e^{kx}...(2)\end{array}\right.$
に分けて考える。方程式 (1) の解 y_1 は、**例題12.** *(ii)* により $y_1 = \frac{1}{k-a}\{\frac{1}{k-a}(xe^{kx} - \frac{1}{k-a}e^{kx})\} = \frac{1}{(k-a)^2}xe^{kx} - \frac{1}{(k-a)^3}e^{kx}$ であり、また、方程式 (2) の解 y_2 は、**例題4.** *(i)* により $y_2 = \frac{1}{(k-a)^3}e^{kx}$ である。以上によって、求める解 y は、
$y = y_1 - y_2 = \frac{1}{(k-a)^2}xe^{kx} - \frac{1}{(k-a)^3}e^{kx} - \frac{1}{(k-a)^3}e^{kx} = \frac{1}{(k-a)^2}xe^{kx} - \frac{2}{(k-a)^3}e^{kx}$
となる。

(2) 方程式

$$(D-a)^2y = xe^{ax}$$

の解を求めるには、(1)と同様に、

$$(D-a)y = Y$$

と置けば、Y は、方程式

$$(D-a)Y = xe^{ax}$$

を満たす。この方程式の解は、**例題12.** *(ii)* によって $Y = \frac{1}{2}x^2e^{ax}$ である。
従って、未知関数 y は、方程式

$$(D-a)y = \frac{1}{2}x^2e^{ax}$$

の解である。この方程式の解は、上の注意**1**によって、

$$y = \frac{1}{2}\frac{1}{2+1}x^{2+1}e^{ax} = \frac{1}{6}x^3e^{ax}$$

である。◀

例題13. $y'' - 4y = xe^{2x}$ の特殊解を求めよ。

(解法) $(D^2-4)y = (D+2)(D-2)y$ と因数分解すると、

$$(D+2)(D-2)y = xe^{2x}$$

の解は**例題１２．** *(i)* により先ず

$$(D-2)y = \frac{1}{4}(xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x})$$

となる。次に右辺を 2 つにわけて、最初に

$$(D-2)y_1 = \frac{1}{4}xe^{2x}$$

の解は**例題１２．** *(ii)* により

$$y_1 = \frac{1}{2\cdot 4}x^2e^{2x}$$

となり、また第 2 項については

$$(D-2)y_2 = \frac{1}{16}e^{2x}$$

の解を求めれば良いが、これは**例題４** *(ii)* によって、

$$y_2 = \frac{1}{16}xe^{2x}$$

となる。

よって、

$$y = y_1 - y_2 = \frac{1}{8}x^2e^{2x} - \frac{1}{16}xe^{2x}$$

が求める解である。◀

（注意）一般に右辺が $e^{kx} \times$ (x の n 次の多項式）となっている場合は、上の主張及びその後の注意にある計算を繰り返し行えば良い。このことから、次のような方法もある。

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx} \times (x \text{ の } n \text{ 次の多項式})$$

の解は、

$$F(\rho) = a_0\rho^n + a_1\rho^{n-1} + ... + a_{n-1}\rho + a_n$$

と置いた時に、

$$(i) F(k) \neq 0$$

の場合は、

$$y = e^{kx} \times (x \text{ の } n \text{ 次の多項式}),$$

$$(ii) F(\rho) = (\rho - k)^m G(\rho), (G(k) \neq 0, k \text{ が } m \text{ 重解})$$

の場合は、

$$y = e^{kx} \times (x\text{ の }(n+m)\text{ 次の多項式})$$

の形の解をそれぞれ持つ。このことを用いて係数を決める方法がある。

（注意）更に、右辺が $\cos\omega x$(または、$\sin\omega x) \times (x$ の n 次の多項式) の場合にも、オイラーの公式と上の手法を用いれば同様の結果が得られる。

1.4　取り上げなかった分野の代表的な問題

1.4.1　非線形の問題

例題１. 次の微分方程式について問に答えよ。 $\frac{dy}{dx}=y+xy^2$

（1）$z = \frac{1}{y}$ とおいて、z の満たす微分方程式を書け。

（2）もとの方程式の解を求めよ。

*(***解）***(***1** *)*$z = \frac{1}{y}$ から $y = \frac{1}{z}$ なので、$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$ よって、もとの方程式に代入して、$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + x\frac{1}{z^2}$ これから、$\frac{dz}{dx} = -(z+x)$ 従って、z の満たす方程式は、$\frac{dz}{dx} + z = -x$ これは線形の一階方程式だから、公式によって、$z = e^{-\int 1dx}\{\int e^{\int 1dx}(-x)dx + C\} = e^{-x}\{-\int e^x x dx + C\} = -e^{-x}(xe^x - \int e^x dx + C) = -e^{-x}(xe^x - e^x + C) = -x + 1 + Ce^{-x}$ ◀

*(***2** *)(***1** *)* の結果によって、$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-x+1+Ce^{-x}}$ を得る。◀

1.4.2　変数係数の問題

例題１. 微分方程式$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = R(x)$ について問に答えよ。

（1）$x = e^t$ と独立変数の変換を行った時に、$y(t)$ の満たす方程式を求めよ。

（2）方程式$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$ を解け。

*(***解）***(1)* 合成関数の微分の法則から、$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{e^t} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$, となる。更に、$x$ で微分して $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}e^{-t})e^{-t} = (\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t})e^{-t} = (\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})e^{-2t}$ となる。上の 2 式を最初の方程式に代入して、$e^{2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})e^{-2t} + pe^t\frac{dy}{dt}e^{-t} + qy = R(e^t)$, 簡単にすると、$(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + p\frac{dy}{dt} + qy = R(e^t)$, 即ち、$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = R(e^t)$, を得る。◀

*(***2** *)(1)* の結果により、$x = e^t$ と独立変数の変換を行うと、$\frac{d^2y}{dt^2}+(-3-1)\frac{dy}{dt}+4y = e^{2t}$. つまり、$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y = e^{2t}$ となるが、この方程式は前節の結果により、次の特殊解をもつ。$y = \frac{t^2}{2!}e^{2t} = \frac{t^2}{2}e^{2t}$. また、$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y = 0$ は、e^{2t}, te^{2t} の独立な解を持っている。従って、一般解は、$y = \frac{t^2}{2}e^{2t} + C_1e^{2t} + C_2te^{2t}$. 最後に変数を x に戻して、$y = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 + C_1x^2 + C_2x^2\log x$ が解である。◀

例題２．微分方程式$4x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0$ **について問に答えよ。**

（１）$x=t^2$ **と独立変数の変換を行った時に、**$y(t)$ **の満たす方程式を求めよ。**

（２）もとの方程式を解け。

（解） *(1)* 合成関数の微分の法則から、$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{2t}$ となる。更に、x で微分して、$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}\frac{1}{2t})\frac{1}{2t}=(\frac{1}{2t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{2t^2}\frac{dy}{dt})\frac{1}{2t}=(\frac{1}{4t^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{4t^3}\frac{dy}{dt})$ となる。上の２式を最初の方程式に代入して、$4t^2(\frac{1}{4t^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{4t^3}\frac{dy}{dt})+2\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}+y=0.$ 簡単にすると、$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+y=0.$ 即ち、$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$ を得る。

*(***2***)* 上の方程式は前節の結果によって、$y=C_1\cos t+C_2\sin t$ 最後に変数を x に戻して、$y=C_1\cos\sqrt{x}+C_2\sin\sqrt{x}$ が解である。◀

例題３．微分方程式$x^2y''+xy'+y=x...(a)$ **を変数変換**$x=e^t$ **を用いて解け。**

（解） 変数変換 $x=e^t$ により、$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\dot{y}\frac{1}{e^t}=\dot{y}\frac{1}{x}(\dot{y}=\frac{dy}{dt}),y''=\frac{d}{dx}\left(\dot{y}\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\dot{y}\cdot\frac{1}{x}+\dot{y}(\frac{1}{x})'=\frac{d}{dt}\dot{y}\cdot\frac{1}{x^2}+\dot{y}(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x^2}(\ddot{y}-\dot{y})(\ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2})$ だから、これらを方程式 (a) に代入して、$x^2\frac{1}{x^2}(\ddot{y}-\dot{y})+x\dot{y}\frac{1}{x}+y=e^t\ddot{y}+y=e^t...(b)$ を得る。方程式 (b) は、次のようにすれば解ける。特性方程式は $\rho^2+1=0$ だから、特性解は $\rho=\pm i.$ 従って、$\ddot{y}+y=0...(c)$ の一般解は $y_1=C_1\cos t+C_2\sin t$。次ぎに、方程式 (b) の特殊解は、$y=Ae^t$ とおいて、$2Ae^t=e^t$ から、$A=\frac{1}{2}$ となり、$y_2=\frac{1}{2}e^t$ が得られる。従って、方程式 (b) の一般解は $y=C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{1}{2}e^t$ となる。故に、方程式 (a) の一般解は $y=C_1\cos\log x+C_2\sin\log x+\frac{1}{2}x$ となる。

（注意） 方程式 (a) の解を $y=x^k$ の形で予測して代入すると、k の満たす二次方程式が $k^2+1=0$ となり $y=x^i$ が得られるが、$x^i=e^{i\log x}=\cos\log x+i\sin\log x$ と解釈することにより一般解 $y=C_1\cos\log x+C_2\sin\log x$ が得られる。

例題４．微分方程式$y''-(x^2-1)y=0...(*)$ **を以下の順序で解け。**

（１）$(*)$ **の解**$y(x)$ **に対して**$z(x)=y'(x)+xy(x)$ **と置いて、関数**$z(x)$ **の満たす方程式を求め、その一般解を求めよ。**

（２）（１）の結果を$y'(x)+xy(x)=z(x)$ **に代入して**$y(x)$ **に関する微分方程式の一般解を求めよ。**

（３）初期条件$y(0)=1,y'(0)=0$ **を満たす**$(*)$ **の解を求めよ。**

（解）（１）$z=y'+xy$ を微分して、$z'=y''+xy'+y$ である、よって、$z'-xz=y''+xy'+y-x(y'+xy)=y''-(x^2-1)y=0$ だから、求める方程式は、$z'-xz=0$ である。この方程式は、変数分離形であり、$\frac{dz}{dx}-xz=0.\frac{dz}{dx}=xz,\frac{dz}{z}=xdx,\int\frac{dz}{z}=\int xdx.\log z=\frac{x^2}{2}+cz=Ce^{\frac{x^2}{2}}$ のように解ける。

（２）（１）の結果を $y'(x)+xy(x)=z(x)$ に代入すると、$y'(x)+xy(x)=Ce^{\frac{x^2}{2}}$ となる。これは、一階の線形方程式だから、$y=e^{-\int xdx}\{\int Ce^{\frac{x^2}{2}}e^{\int xdx}dx+$

$D\} = e^{-\frac{x^2}{2}}\{C\int e^{\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} dx + D\} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{x^2} dx + De^{-\frac{x^2}{2}}$ と解ける。

（３）初期条件 $y(0) = 1$ より、$D = 1$ また、$y' = C(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{x^2} dx + e^{-\frac{x^2}{2}} e^{x^2}) - xDe^{-\frac{x^2}{2}}$ だから、初期条件 $y'(0) = 0$ より、$C = 0.$ 従って、$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ を得る。◀

1.4.3　積分方程式

例題１. 方程式$y(x) = x + \int_0^x (t - y(t))dt$ **について問いに答えよ。**

（１）関数$y(x)$ **は微分可能であることを示せ。**

（２）方程式の解を求めよ。

*(***解）***(1)* 連続な関数 $f(x)$ に対して $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ は微分可能であって、$\frac{dF}{dx} = f(x)$ となること（**積分の基本定理**）が、次のようにしてわかる。

まず定義によって、$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$ となる。今、$M(x,h) = \max_{x-|h| \le s \le x+|h|} |f(s) - f(x)|$ と置けば、$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt$ だから、$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{h} hM(x,h) = M(x,h)$ となるが、$\lim_{h\to 0} M(x,h) = 0$ は明らかだから、$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ がいえる。◀

（２）*(1)* の結果を使って与えられた式の両辺を微分すると、$\frac{dy}{dx} = 1 + x - y$ が得られる。つまり、$\frac{dy}{dx} + y = x + 1$ を解けば良い。

先ず、方程式を斉次にして $\frac{dy}{dx} + y = 0$ の解は、$y = e^{-x}$ であり、最初の方程式の解を未定係数法で求める。即ち、$y = u(x)e^{-x}$ とおき、関数 $u(x)$ を求める。$y' = u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x}$ これらを代入して、$u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x} + u(x)e^{-x} = x + 1$ となり、$u'(x)e^{-x} = x + 1$ つまり、$u'(x) = (x+1)e^x$ を満たせばよい。部分積分を用いて積分すると、$u(x) = \int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x - \int e^x dx = (x+1)e^x - e^x = xe^x$ が得られる。従って、$y = u(x)e^{-x}$ から、$y = xe^x e^{-x} = x$

が特殊解である。よって、一般解は、$y = Ce^{-x} + x$ ◀

（注意）上の例題では、$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ は微分可能であって、$\frac{dF}{dx} = f(x)$ であることを示した。一般には、$F(x) = \int_{k(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$ は微分可能であって、$\frac{dF}{dx} = f(h(x))h'(x) - f(k(x))k'(x) + \int_{k(x)}^{h(x)} f_x(x,y)dy$ が成立する。

例題２. 次の方程式の解を求めよ。$x(t) + a\int_0^t x(s)ds = f(t) + b\int_0^t f(s)ds.$ **ここで、**$f(t) = \begin{cases} 1, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ **、但し、**$\lim_{t\to+0} x(t) = 1, \lim_{t\to-0} x(t) = 0.$

*(***解）***(i)*$t > 0$ のとき右辺が、$f(t) + b\int_0^t f(s)ds = 1 + b\int_0^t 1ds = 1 + bt$ となることに注意しておこう。

今、$X(t) = \int_0^t x(s)ds$ とおけば、前の例題から、$\frac{dX}{dt} = x(t).$ よって最初の積分方程式は、$\frac{dX}{dt} + aX = 1 + bt$ となる。この方程式の解は公式によって、$X(t) = e^{-a\int 1ds}(\int (bs+1)e^{a\int 1ds} ds + C) = e^{-at}(\int (bs+1)e^{as} ds + C) = e^{-at}(\frac{1}{a}e^{at}(bt+1) - \frac{b}{a}\int e^{as} ds + C)$

$= e^{-at}(\frac{1}{a}e^{at}(bt+1) - \frac{b}{a^2}e^{at} + C) = \frac{1}{a}(bt+1) - \frac{b}{a^2} + Ce^{-at}$. だから、$x(t) = \frac{dX}{dt}$ によって、$x(t) = \frac{1}{a}b - aCe^{-at}$ ここで初期条件 $\lim_{t\to+0} x(t) = 1$ によって、$\frac{1}{a}b - aC = 1$. 従って、$C = \frac{1}{a}(\frac{1}{a}b - 1)$. 故に、$x(t) = \frac{1}{a}b - (\frac{1}{a}b-1)e^{-at}$.

(ii)$t < 0$ のとき右辺が、$f(t) + b\int_0^t f(s)ds = 0$ となることに注意しておこう。よって最初の積分方程式は、$\frac{dX}{dt} + aX = 0$ となる。この方程式の解は公式によって、$X(t) = Ce^{-at}$ だから、$x(t) = \frac{dX}{dt}$ によって、$x(t) = -Ce^{-at}$ ここで初期条件 $\lim_{t\to-0} x(t) = 0$ によって、$C = 0$. 従って、$x(t) = 0$ ◀

1.4.4 連立微分方程式

例題１．以下に答えよ。

（１）微分方程式$z'' + m^2 z = 0$ **の一般解を求めよ。但し、**$m > 0$ **とする。**

（２）連立微分方程式$\begin{cases} x'' + 2x - y = 0 \\ y'' - x + 2y = 0 \end{cases} ...(*)$ **の解を以下のようにして求める。最初に未知関数**$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **に変数変換**$\begin{cases} x = X + Y \\ y = aX + bY \end{cases}$ **を行って、**X **に関する方程式には、**Y **を含まないように、また、**Y **に関する方程式には、**X **を含まないようにするには、定数**a, b **をどのようにきめれば良いか。但し、**$a \neq b$ **とする。**

（３）X, Y **の一般解を用いて、初期条件**$x(0) = 2, x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$ **を満たす解を求めよ。**

（解）（１）特性方程式 $\rho^2 + k^2 = 0$ を解くと、特性解は $\rho = \pm ki$、だから、一般解は、$C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ である。

（２）変数変換$\begin{cases} x = X + Y \\ y = aX + bY \end{cases}$ を行列を使ってかくと、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ であり、方程式 $(*)$ は、$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ...(**)$ であるが、変数変換した$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ の方程式に直すと、$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ であり、両辺に行列$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ の逆行列 $\frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} b & -1 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ を掛けると、$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} b & -1 \\ -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} -2b-1+(b+2)\,a & -2b-1+(b+2)\,b \\ 2a+1+(-a-2)\,a & 2a+1+(-a-2)\,b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ となる。従って、$\begin{cases} -2b-1+(b+2)\,b = 0 \\ 2a+1+(-a-2)\,a = 0 \end{cases}$ が成り立てばよい。よって、$a \neq b$ から、$a = \pm 1, b = \mp 1$ ととれば良い。

（３）（２）より $a = -1, b = 1$ として $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ の満たす方程式は、

$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ だから、$\left\{\begin{array}{l} X'' + 3X = 0 \\ Y'' + Y = 0 \end{array}\right. \quad ...(***)$

（１）の結果からこれらの方程式の一般解は、$\left\{\begin{array}{c} X = C_1\cos\sqrt{3}t + C_2\sin\sqrt{3}t \\ Y = D_1\cos t + D_2\sin t \end{array}\right.$

初期条件は、$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x-y) \\ \frac{1}{2}(-x+y) \end{pmatrix}$ から、

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ よって、$C_1 = 1, D_1 = -1, C_2 = D_2 = 0.$ だから、$\left\{\begin{array}{c} X = \cos\sqrt{3}t \\ Y = \cos t \end{array}\right.$ 故に、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{3}t \\ \cos t \end{pmatrix}$

から、$\left\{\begin{array}{c} x = \cos\sqrt{3}t + \cot t \\ y = -\cos\sqrt{3}t + \cot t \end{array}\right.$ ◀

（注意）上の計算は、行列 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ を正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ で対角化したことであり、-3、-1 は行列 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値である。また、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、固有値 -3、-1 に随伴する固有ベクトルである。

例題２．連立微分方程式の初期値問題$\left\{\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{l} u' = au + v \\ v' = av + e^{-bt} \end{array}\right. \quad ...(*) a, b, c > 0 \\ (u(0), v(0)) = (c, 0) \end{array}\right.$

を考える。以下の問に答えよ。

（１）$w(t) = u(t) - tv(t)$ **が満たす微分方程式を導け。**

（２）$w(t)$ **を求めよ。**

（３）十分に大きな数M **をとると、**$0 \leq t < \infty$ **において、不等式**$|w(t)| \leq M$ **が成立するように定数**c **を定めよ。**

（４）（３）のようにc **を定めたときに、関数**$w(t)$ **の**$0 \leq t < \infty$ **における最大値を求めよ。**

（解）（１）$w = u - tv$ から、$w' = u' - v - tv'$ ここで、関係式 $(*)$ を代入すると、$w' = au + v - v - t(av + e^{-bt}) = a(u - tv) - te^{-bt} = aw - te^{-bt}$

従って、w の満たす方程式は、$w' - aw = -te^{-bt} ...(**)$ である。

（２）$(**)$ は、一階の線形方程式だから公式を用いれば、解は以下のように解ける。$w = e^{\int a dt}\{\int -te^{-bt}e^{-\int a dt}dt + C\} = e^{at}\{\int -te^{-bt}e^{-at}dt + C\} = e^{at}\{\frac{1}{(b+a)^2}\left((b+a)te^{-(b+a)t} + e^{-(b+a)t}\right) + C\}$

$= \frac{1}{(b+a)^2}\left((b+a)te^{-bt} + e^{-bt}\right) + Ce^{at}.$ ここで、初期条件 $(u(0), v(0)) = (c, 0)$ から、$c = \frac{1}{(b+a)^2} + C$ よって、$C = c - \frac{1}{(b+a)^2}$ だから、$w = \frac{1}{(b+a)^2}\left((b+a)te^{-bt} + e^{-bt}\right) +$

$(c-\frac{1}{(b+a)^2})e^{at}$

（3）上で得られた関数 w が、区間 $0 \le t < \infty$ で有界になる為には、e^{at} の係数が０であれば良い。従って、$c-\frac{1}{(b+a)^2}=0$ だから、$c=\frac{1}{(b+a)^2}$

（4）（３）の条件を満たす関数 $w=\frac{1}{(b+a)^2}\left((b+a)te^{-bt}+e^{-bt}\right)$ の区間 $0 \le t < \infty$ における極値を求める。最初に、微分して $w'=0$ となる点を求めると、$w'=\frac{1}{(b+a)^2}((b+a)e^{-bt}-b(b+a)te^{-bt}-be^{-bt})=0$ から、$t=\frac{a}{b(b+a)}$ を得る。この点で、関数 w が極大値を取り、それは区間 $0 \le t < \infty$ での最大値であることは、増減表から容易にわかる。その時の w の値は、$w=\frac{1}{(b+a)^2}\left((b+a)\frac{a}{b(b+a)}e^{-b\frac{a}{b(b+a)}}+e^{-b\frac{a}{b(b+a)}}\right)=\frac{1}{b(b+a)^2}(a+b)e^{-\frac{a}{(b+a)}}$ である。

1.4.5 非線形連立微分方程式（線形化、平衡点、安定性）

例題１．次の連立微分方程式について問に答えよ。 $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x-2xy \\ \frac{dy}{dt}=-y+xy \end{cases}$

（1）平衡点を求めよ。

（2）平衡点の近くで線形化された連立微分方程式の解で初期条件$(x(0),y(0))=(1,2)$ **を満たすものについて調べよ。**

*(***解***)(***1***)* 連立微分方程式 $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=f(x,y) \\ \frac{dy}{dt}=g(x,y) \end{cases}$ の平衡点とは、連立方程式 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ の解の組

$(x=x_0, y=y_0)$ のことであり、定数関数の組 $(x=x_0, y=y_0)$ は、微分方程式の一組の解である。今の場合は、$\begin{cases} x-2xy=0 \\ -y+xy=0 \end{cases}$ を解いて、$(x,y)=(0,0),(1,\frac{1}{2})$ を得る。これが平衡点である。◀

*(***2***)(i)*$(x,y)=(0,0)$ では、線形化された連立微分方程式は、$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x \\ \frac{dy}{dt}=-y \end{cases}$ となり、この方程式の解は $x=Ce^t, y=De^{-t}$ である。

(ii)$(x,y)=(1,\frac{1}{2})$ では、$x=X+1, y=Y+\frac{1}{2}$ として未知関数の変換を行うと、$x-2xy=(X+1)(1-2Y-1)=-2Y(X+1)=-2Y-2XY,$

$-y+xy=(Y+\frac{1}{2})(X+1-1)=(Y+\frac{1}{2})X=\frac{1}{2}X+XY$ となり、線形化された方程式は、$\begin{cases} \frac{dX}{dt}=-2Y...(1) \\ \frac{dY}{dt}=\frac{1}{2}X...(2) \end{cases}$ となる。(1) から、$\frac{d^2X}{dt^2}=-2\frac{dY}{dt}$ これに (2) を代入すると、$\frac{d^2X}{dt^2}=-X$ 以下これを解く。この方程式の一般解は、$X=A\cos t+B\sin t$ である。これを (1) に代入して、$Y=-\frac{1}{2}\frac{dX}{dt}=-\frac{1}{2}(A\cos t+B\sin t)=\frac{1}{2}A\sin t-\frac{1}{2}B\cos t$ を得る。ここで、初期条件 $(x(0),y(0))=(1,2)$ は $(X(0),Y(0))=(0,\frac{3}{2})$ となる。従って、$A=0, B=-3$ となり、$X=-3\sin t, Y=-\frac{3}{2}\cos t$. 従って、$x=-3\sin t+1, y=-\frac{3}{2}\cos t+\frac{1}{2}$ が得られる。これらは何れも周期 2π の周期関数である。

また、$-2 \le x \le 4, -1 \le y \le 2$ は明らかであり、最後に、$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt = 1, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)dt = \frac{1}{2}$ が成り立つ。◀

例題２．連立微分方程式 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - xy \\ \frac{dy}{dt} = -y + xy \end{cases}$ **の解曲線は初期条件**$(x(0), y(0)) = (a, b)$ **を第一象限に与えると座標軸とは交わらないことを示せ。**

(解) 連立微分方程式から、$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-y+xy}{x-xy} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$ となり、これは変数分離形だから、$\left(\frac{1-y}{y}\right)dy = \left(\frac{x-1}{x}\right)dx$ と変形して、$\left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx$ を得る。両辺を積分して、$\log|y| - y = x - \log|x| + C, \log|xy| = x + y + C$ よって、$|xy| = Ce^{x+y}$ ここで、初期条件 $(x(0), y(0)) = (a, b)$ を代入すれば、$ab = Ce^{a+b}$ から、$C = \frac{ab}{e^{a+b}}$ となって、$|xy| = \frac{ab}{e^{a+b}}e^{x+y}$ が成立する。この式で、$x = 0$ または $y = 0$ とはならないので、この解曲線は両軸を切らない。◀

1.4.6　その他

例題１．次の境界条件を付けた微分方程式を考える。$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = f(x) ...(*), y(0) = y(l) = 0.$ **問に答えよ。**

（１）上の方程式に随伴する同次（斉次）方程式が同じ境界条件のもとで、恒等的に *0* **でない解を持つための定数**k **の条件をいえ。**

（２）k **が（１）の値と異なるときに、もとの方程式の一般解を求めよ。**

(解)（1）上の方程式に随伴する同次（斉次）方程式とは、$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0 ...(**)$ のことであり、この方程式の一般解は、

特性方程式 $\rho^2 + k^2 = 0$ を考えて、

(i)$k = 0$ のときには、$\rho = 0$ だから、方程式は $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ となるので、一般解は、$y = Ax + B$ であり、これが境界条件 $y(0) = y(l) = 0$ を満たすためには、$A = B = 0$ となり、$y = 0$ しか解はない。よってこの場合は条件に適わない。

(ii)$k \neq 0$ のときには、特性解が $\rho = \pm ik$ となり、一般解は、$y = C\cos kx + D\sin kx$ である。この解が境界条件 $y(0) = y(l) = 0$ を満たすためには、$C = 0, D\sin kl = 0$ が必要である。もし、$D = 0$ なら、再び $y = 0$ となり、$y = 0$ 以外の解は無い。従って $D \neq 0$ でなければいけない。その為には、$kl = n\pi (n = 0, \pm 1, ...)$. 即ち、$k = \frac{n\pi}{l}(n = 0, \pm 1, ...)$ でなければならない。この時には、$y = D\sin\frac{n\pi}{l}x (n = 0, \pm 1, ...)$ の形の解を持つ。◀

(2) 方程式 $(**)$ の一次独立な解は、$k \neq 0$ のときには、$y_1 = \cos kx, y_2 = \sin kx$ であり、この時の、ロンスキヤン $W(y_1, y_2)(x)$ は、$W(y_1, y_2)(x) =$

$\begin{vmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -k\sin kx & k\cos kx \end{vmatrix} = k \neq 0$ である。更に、方程式 $(*)$ の特殊解 y_0 は、公式 $y_0(x) = y_1(x)\int \frac{-R(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx + y_2(x)\int \frac{R(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx$ に代入して、$y_0(x) = \cos kx \int_0^x \frac{-f(y)\sin ky}{k}dy + \sin kx \int_0^x \frac{f(y)\cos ky}{k}dy$ となり、計算すると、$y_0(x) = \cos kx \int_0^x \frac{-f(y)\sin ky}{k}dy + \sin kx \int_0^x \frac{f(y)\cos ky}{k}dy = \int_0^x \frac{-f(y)\sin ky\cos kx}{k}dy + \int_0^x \frac{f(y)\cos ky\sin kx}{k}dy = \frac{1}{k}\int_0^x f(y)\{\cos ky\sin kx - \sin ky\cos kx\}dy$

$= \frac{1}{k}\int_0^x f(y)\sin k(x-y)dy$ を得る。従って、方程式 $(*)$ の一般解 $y(x)$ は、$y(x) = C_1\cos kx + C_2\sin kx + \frac{1}{k}\int_0^x f(y)\sin k(x-y)dy$ となる。

次ぎに、$k=0$ の場合には、$(**)$ の一次独立な解が、$y_1 = x, y_2 = 1$ であり、また、$(*)$ の特殊解 y_0 が、$y_0 = \int_0^x(\int_0^s f(y)dy)ds$ で与えられることは、容易にわかる。よって、この場合は、方程式 $(*)$ の一般解 $y(x)$ は、$y(x) = C_1x + C_2 + \int_0^x(\int_0^s f(y)dy)ds$ となる。◀

２．極座標(r,θ) **で表される二次元領域、**$1 < r, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ **で方程式**$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ **を満たし、境界条件**$u(1,\theta) = \cos 3\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ **を満たす解を以下の手順で解け。**

(1) **方程式の解として**$u(r,\theta) = f(r)g(\theta)$ **と表されるものを考える。これを方程式に代入し、左辺が**r **のみの関数、右辺が**θ **のみの関数であるような式を導け。**

(2) **この式が上の領域に対応する任意の**(r,θ) **に対して成立するためには，その両辺は**r,θ **によらない定数でなければいけない。そこで、この定数を**c **として関数**f **の**r **に関する微分方程式と関数**g **の**θ **に関する微分方程式を導け。**

(3)m **を整数として、**$f(r) = r^m$ **とおき、定数**c **を**m **で表せ。次にこれを**g **の**θ **に関する方程式に代入し、解で**$u_m(r,\theta) = f(r)g(\theta)$ **の形のものを求めよ。**

(4)d_m **を定数として、解で**$u(r,\theta) = \sum_m d_m u_m(r,\theta)$ **の形のものを考えて、それが境界条件を満たすようにして求める解**$u(r,\theta)$ **を決めよ。**

（解）（１）$f''(r)g(\theta) + \frac{1}{r}f'(r)g(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta) = 0 \to \frac{r^2f''(r)+rf'(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}$

（２）$\frac{r^2f''(r)+rf'(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = c \to\to\to \begin{cases} r^2f''(r) + rf'(r) - cf(r) = 0 \\ g''(\theta) + cg(\theta) = 0 \end{cases}$

（３）$f(r) = r^m, f'(r) = mr^{m-1}, f''(r) = m(m-1)r^{m-2}$

$\overset{r^2f''(r)+rf'(r)-cf(r)=0}{\to\to\to} m(m-1)r^m + mr^m - cr^m = 0 \to m^2 = c$

$\overset{g''(\theta)+cg(\theta)=0}{\to\to\to} g''(\theta) + m^2g(\theta) = 0 \to g_m(\theta) = A_m\cos m\theta + B_m\sin m\theta$

$\to\to\to u_m(r,\theta) = r^m(A_m\cos m\theta + B_m\sin m\theta)$

（４）$u(r,\theta) = \sum_m r^m(A_m\cos m\theta + B_m\sin m\theta) \overset{\lim_{r\to\infty} u(r,\theta)=0}{\to\to\to} m > 0 \to m = 1, 2, ...$

$\overset{u(1,\theta)=\cos 3\theta}{\to\to\to} A_3 = 1, A_j(j \neq 3) = 0, B_j(j = 0, 1, ...) = 0$

$\to\to\to u(r,\theta) = r^3\cos 3\theta$

1.5 編入試験問題から

1.5.1 非線形

１．微分方程式$2yy'' = (y')^2 - 1$ **について以下に答えよ。**

（１）$p = y'$ **とおいて**p **と**y **とに関する方程式に直せ。**

（２）（１）を解いてもとの方程式の解を求めよ。（北大 H18）

（解）$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

（１）$2yy'' = (y')^2 - 1 \to 2yp\frac{dp}{dy} = p^2 - 1$

（２）$\frac{2p}{p^2-1}dp = \frac{dy}{y} \to \log(p^2-1) = \log y + c \to p^2 - 1 = Cy, \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{Cy+1} \to \frac{dy}{\sqrt{Cy+1}} = \pm dx$

$\to \frac{\sqrt{Cy+1}}{2C} = \pm x + D, \sqrt{Cy+1} = 2C(\pm x + D) \to Cy + 1 = 4C^2(x+D), y = \frac{4C^2(x+D)-1}{C}$

２．t **の関数**$x(t)$ **が微分方程式**$x'(t) + x^2(t) + a(t)x(t) + b(t) = 0$ **を満たす時に、以下に答えよ。**

$(i) x(t) = \frac{u'(t)}{u(t)}$ **の時に、関数**$u(t)$ **の満たす微分方程式を求めよ。**

(ii) **微分方程式**$x' = x(1-x)$ **を解け。**

（解）$(i)x'(t) = \frac{u''(t)u(t) - u'(t)u'(t)}{u^2(t)}$ を代入すると、$\frac{u''(t)u(t)-u'(t)u'(t)}{u^2(t)} + \frac{(u'(t))^2}{u^2(t)} + a(t)\frac{u'(t)}{u(t)} + b(t) = 0$

$\to u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = 0$

$(ii)(i)$ で $a(t) = -1, b(t) = 0$ より、$u''(t) - u'(t) = 0 \stackrel{u'=U}{\to} \frac{dU(t)}{dt} - U(t) = 0$

$\to \frac{dU(t)}{U(t)} = dt \to \log U = t + c \to U = Ce^t, u' = Ce^t \to\to\to u(t) = Ce^t + D \to x(t) = \frac{Ce^t}{Ce^t + D}$

1.5.2 クレロー

１．以下に答えよ。

（１）$z = y^{-4}$ **のときに、**$\frac{dz}{dx}$ **を**y **及び**$\frac{dy}{dx}$ **で表せ。**

（２）変数変換$z = y^{-4}$ **をおこない微分方程式**$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^5Q(x)$ **を**z **に関する微分方程式に直せ。**

（３）微分方程式$\frac{dy}{dx} + xy = \frac{1}{2}y^5x$ **を解け。（東北大 H19）**

（解）（１）$z = y^{-4} \to \frac{dz}{dx} = -4y^{-5}\frac{dy}{dx}$

（２）$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^5Q(x) \to -\frac{y^5}{4}\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^5Q(x) \Longrightarrow -\frac{1}{4}\frac{dz}{dx} + zP(x) = Q(x), \frac{dz}{dx} - 4zP(x) = -4Q(x)$

（３）（２）から、$\frac{dy}{dx} + xy = \frac{1}{2}y^5x \to \frac{dz}{dx} - 4zx = -2x$; １階線形方程式で解の公式から、$z = e^{\int 4xdx}\{-2\int xe^{-\int 4xdx}dx + C\} = e^{2x^2}(-2\int xe^{-2x^2}dx + C) = e^{2x^2}(\frac{1}{2}e^{-2x^2} + C) = Ce^{2x^2} + \frac{1}{2}.y = \frac{1}{(Ce^{2x^2} + \frac{1}{2})^{\frac{1}{4}}}$

1.5.3 定数変化法

１．微分方程式$x^2y'' - xy' + y = f(x)...(*)$ **について、以下に答えよ。但し、**$x > 0$ **とする。**

（1）$f(x) = 0$ **の場合に、**$y = x$ **は**$(*)$ **の解であることを示せ。**

（2）$y = xu(x)$ **とするときに、関数**$w(x) = u'(x)$ **の満たす方程式を求めよ。**

（3）$f(x) = 0$ **の場合に、**$(*)$ **を解け。**

（4）$f(x) = x^2\sqrt{x}$ **の場合に、**$(*)$ **を解け。（H18）**

（解）（１）$y = x, y' = 1, y'' = 0 \to x^2y'' - xy' + y = 0$

（２）$y = xu(x), y' = xu'(x) + u(x), y'' = xu''(x) + 2u'(x)$

$\to x^2(xu''(x) + 2u'(x)) - x(xu'(x) + u(x)) + xu(x) = f(x) \to x^3u''(x) + x^2u'(x) = f(x) \Longrightarrow x^3w'(x) + x^2w(x) = f(x)$

（３）$x^3w'(x)+x^2w(x) = 0, x\frac{dw}{dx} + w = 0, \frac{dw}{w} = -\frac{dx}{x} \to \log w = -\log x + c \to w = \frac{C}{x}, i.e., u' = \frac{C}{x} \to u = C\log x + D$

$\to y = x(C\log x + D) = Cx\log x + Dx$

（４）$x^3w'(x)+x^2w(x) = x^2\sqrt{x} \to w'(x)+\frac{1}{x}w(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, w = e^{-\int\frac{1}{x}dx}\{\int e^{\int\frac{1}{x}dx}\frac{1}{\sqrt{x}}dx + C\} = \frac{1}{x}\{\int x\frac{1}{\sqrt{x}}dx + C\}$

$= \frac{1}{x}\{\int\sqrt{x}dx + C\} = \frac{1}{x}\{\frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C\} = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{C}{x} \to u = \int(\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{C}{x})dx = C\log x + \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + D$

$\to y = x(C\log x + \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + D) = \frac{4}{9}x^{\frac{5}{2}} + Cx\log x + Dx$

２．（1）微分方程式$y''(x) - ay(x) = 0$ **を解け。**

（2）区間$[0, l]$ **での、微分方程式**$y''(x)+a^2y(x) = 0$ **の解で、境界条件**$y(0) = 0, y(l) = 0$ **を満たす恒等的に**0 **ではないものを求めよ。また、**a **がどのような値の場合にそのような解が存在するか。**

（3）微分方程式$y''(x) + a^2y(x) = f(x)$ **の一般解を定数変化法で求める。最初に、同次形**$y''(x)+a^2y(x) = 0$ **の一般解は、**$y = A\sin ax+B\cos ax$ **であり、**A, B **を**x **の関数と考えて、特殊解を求めると、**$y(x) = \frac{1}{a}\{\sin ax\int f(x)\cos axdx - \cos ax\int f(x)\sin axdx\}$ **を示せ。（H18）**

（解）（1）特性方程式は、$\rho^2 - a = 0$ であり、

(i)$a = 0$ のときには、$\rho = 0$（重解）で一般解は $Ax + B$。

(ii)$a > 0$ のときは、$\rho = \pm\sqrt{a}$（実数）で、一般解は $Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{\sqrt{a}x}$。

(iii)$a < 0$ のときは、$\rho = \pm\sqrt{-a}i$（純虚数）で、一般解は $A\sin\sqrt{-a}x + B\cos\sqrt{-a}x$。

（２）（１）により、一般解は、$y = A\sin ax + B\cos ax$. 条件により、$B = 0, A\sin al = 0, A \neq 0 \to al = n\pi, n = 1, 2, ...$

故に、$a = \frac{n\pi}{l}, (n = 1, 2, ...)$

（３）$y = A\sin ax + B\cos ax$,

$$\begin{cases} A'\sin ax + B'\cos ax = 0...(1) \\ A'\cos ax - B'\sin ax = \frac{f(x)}{a}...(2) \end{cases} \to A' = \frac{f(x)}{a}\cos ax, B' = -\frac{f(x)}{a}\sin ax.$$

故に、$A = \frac{1}{a}\int f(x)\cos ax dx, B = -\frac{1}{a}\int f(x)\sin ax dx$. よって、$y(x) = \frac{1}{a}\{\sin ax \int f(x)\cos ax dx - \cos ax \int f(x)\sin ax dx\}$

（計算）$y' = A'\sin ax + aA\cos ax + B'\cos ax - aB\sin ax$

$\overset{y'=A(\sin ax)'+B(\cos ax)'=aA\cos ax - aB\sin ax}{\longrightarrow} A'\sin ax + B'\cos ax = 0...(1).$

$y'' \overset{y'=aA\cos ax - aB\sin ax}{=} aA'\cos ax - a^2A\sin ax - aB'\sin ax - a^2B\cos ax.$

$y''(x) + a^2y(x) = f(x)$

$\Longrightarrow aA'\cos ax - a^2A\sin ax - aB'\sin ax - a^2B\cos ax + a^2(A\sin ax + B\cos ax) = f(x)$

$aA'\cos ax - aB'\sin ax = f(x)...(2)$

1.5.4 級数解

１．定数a, bについて、微分方程式$(1-x^2)y'' - 2xy' = 0, y(0) = a, y'(0) = b$の解を考える。以下に答えよ。

（１）非負な整数nについて、$y^{(n)}(0)$を計算せよ。

（２）解yを求めよ。（H18）

（解）（１）$(1-x^2)y'' - 2xy' = 0,$ 両辺を n 回微分して、$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - 2(xy^{(n+1)} + ny^{(n)}) = 0.$

$x = 0$とすると、$y^{(n+2)}(0) - n(n-1)y^{(n)}(0) - 2ny^{(n)}(0) = 0 \to y^{(n+2)}(0) - n(n+1)y^{(n)}(0) = 0.$

故に、$y^{(n+2)}(0) = (n+1)ny^{(n)}(0)$

$= (n+1)n(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)$

$= (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)y^{(n-4)}(0)$

$= ...$

$= \begin{cases} (n+1)n(n-1)\cdot .... \cdot 2\cdot 1\cdot y^{(1)}(0) = (n+1)!b, n; odd \\ (n+1)n(n-1)\cdot .... \cdot 2\cdot y^{(2)}(0) = 0, n; even \end{cases}, y^{(2n+1)}(0) = (2n)!b$

（２）$y = b\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)!}x^{2n+1} = b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$

1.5.5 図形の問題

１．平面上の曲線で、任意の点Pにおける法線に原点から下ろした垂線の長さが点Pのy座標に等しいときには、この曲線は$x^2 + y^2 = cx, (c$は定数$)$であることを示せ。（静岡大 H18）

（解）点 P における法線；$Y - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(X - x), y'(x)Y + X - (y(x)y'(x) + x) = 0$

垂線の長さ；$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|y(x)y'(x)+x|}{\sqrt{1+(y')^2}} = |y(x)| \to (yy'+x)^2 = y^2(1+(y')^2), y^2(y')^2 + 2xyy' + x^2 = y^2 + y^2(y')^2$

$\Longrightarrow 2xyy'+x^2=y^2, \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}, y=xu, y'=u+xu', xu'=\frac{u^2-1}{2u}-u=-\frac{u^2+1}{2u}$

$\to \frac{2udu}{u^2+1}=-\frac{dx}{x}, \log(u^2+1)=-\log x+c \to \{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\}x=C \to x^2+y^2=Cx$

1.5.6 行列との関連（I）

１．連立微分方程式$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3x-4y \\ \frac{dy}{dt}=x-2y \end{cases}$ **について以下に答えよ。（北大 H19)**

（１）方程式の解が、ベクトル$\vec{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$**を用いて、**$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=e^{kt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ **と表されるとする。ここで、**$\vec{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$**はゼロベクトルでなく**$u+v=1$**を満たすとする。**$k$ **と**$\vec{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$**を全て求めよ。**

（２）$t=0$**における初期条件が**$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$**であるときに、解を求めよ。**

（解）（１）連立微分方程式$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3x-4y \\ \frac{dy}{dt}=x-2y \end{cases}$ はベクトルと行列を用いて、

$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

とかける。$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=e^{kt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$を代入すると、$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=ke^{kt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

だから、$ke^{kt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=e^{kt}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$により$\begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -2-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ここで、$\vec{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$はゼロベクトルでないから、$\det\begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -2-k \end{pmatrix}=k^2-k-2=(k+1)(k-2)=0 \to k=2,-1$

$(i)k=2 \to \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to u=4v \Longrightarrow \vec{u}=v\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, v=\frac{1}{5} \to \vec{u}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(ii)k=-1 \to \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to u=v \Longrightarrow \vec{u}=v\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v=\frac{1}{2} \to \vec{u}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

（2）（1）により、解は $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$. 初期条件により、$C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 4C_1 + C_2 = 6 \\ C_1 + C_2 = 3 \end{cases}, C_1 = 1, C_2 = 2$

1.5.7 行列との関連（II)

1．微分方程式の初期値問題 $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = 0 \\ x'(0) = 3, x(0) = 2 \end{cases}$ $...(*)$ **の解を以下の手順で求めよ。**

（1） $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{cases}$ **として、微分方程式** $(*)$ **を** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ **に関する微分方程式** $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ **に直したときの行列** A **を求めよ。**

（2）（1）の行列 A **の固有値・固有ベクトル** $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ **を求めよ。**

（3）行列 S **を** $S = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{pmatrix}$ **として、変数変換** $\vec{x} = S\vec{z}, \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ **をしたとき、** $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ **に関する微分方程式と初期条件を求めよ。**

（4）（3）を解け。

（5）（4）から方程式 $(*)$ **の解を求めよ。（岡山大 H19)**

（解）（1）$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

（2）固有値・固有ベクトル: $\vec{a}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1, \vec{a}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2, S^{-1}AS = D, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

（3）$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = S\vec{z} \to \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \Longrightarrow \frac{d}{dt}(S\vec{z}) = AS\vec{z}$.

$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = S^{-1}AS\vec{z} = D\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$

$\vec{z}(0) = S^{-1}\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

（4）$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 2z_2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} z_1' = z_1 \\ z_2' = 2z_2 \end{cases}, \begin{cases} z_1 = c_1 e^t, c_1 = 1 \\ z_2 = c_2 e^{2t}, c_2 = 1 \end{cases}$

（5）$\vec{x} = S\vec{z}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + e^{2t} \\ e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \to x =$

$e^t + e^{2t}$

1.5.8　非線形

１．微分方程式$y'' - \frac{1}{y}(y')^2 + y = 0$ **の初期値問題**$y(0) = 1, y'(0) = 1$ **を考える。以下に答えよ。**

（１）$z = \log y$ **として**z **の満たす方程式を求めよ。**

（２）（１）を解きを求めよ。

（解）（１）$z = \log y \to y = e^z, y' = e^z z', y'' = e^z z'' + e^z (z')^2 \to y'' - \frac{1}{y}(y')^2 + y = 0$

$\Longrightarrow e^z z'' + e^z (z')^2 - \frac{1}{e^z}(e^z z')^2 + e^z = 0 \to e^z z'' + e^z = 0 \to z'' + 1 = 0, z(0) = 0, z'(0) = 1$

（２）$z'' + 1 = 0$ から一般解は、$z = A\cos x + B\sin x$. 初期条件は、

$$\begin{cases} y(0) = 1 \text{ から } z(0) = \log y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \text{ から } y'(0) = e^{z(0)} z'(0) = z'(0) = 1 \end{cases}$$

なので、$\begin{cases} z = A\cos x + B\sin x \to A = 0 \\ z' = -A\sin x + B\cos x \to B = 1 \end{cases} \Longrightarrow z = \sin x \to y = e^{\sin x}$

２．（１）不定積分$\int \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}}$ **を求めよ。**

（２）$p\frac{dp}{dy} = y - 2y^3, (0 < y < 1), p(0) = 0$ **の解を求めよ。**

（３）（１）、（２）を用いて微分方程式$\begin{cases} y'' - y + 2y^3 = 0, 0 < y < 1, 0 < x < \infty \\ \lim_{x\to 0} y(x) = 1 \end{cases}$ **の解を求めよ。但し、**$y(x) = 0$ **のとき**$y'(x) = 0$ **とする。**

（解）（１）$\int \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}} \overset{y=\sin s, dy=\cos s ds}{=} \int \frac{\cos s ds}{\sin s \cos s} = \int \frac{ds}{\sin s} = \int \frac{\sin s ds}{\sin^2 s}$

$= \int \frac{\sin s ds}{1-\cos^2 s} \overset{\cos s=t, -\sin s ds=dt}{=} \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1})dt$

$= \frac{1}{2}\log|\frac{t-1}{t+1}| = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos s}{1+\cos s} = \frac{1}{2}\log\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{1+\sqrt{1-y^2}}$

（２）$pdp = (y - 2y^3)dy, p^2 = y^2 - y^4 + C, C = 0. p^2 = y^2 - y^4, p = \pm y\sqrt{1-y^2}$

（３）$p = \frac{dy}{dx}$ とすると、$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$.

故に、方程式 $y'' - y + 2y^3 = 0$ は、$p\frac{dp}{dy} = y - 2y^3$.（２）から解は、$p = \pm y\sqrt{1-y^2}$.

よって、$\frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}} = \pm dx$. この方程式の解は（１）から、$\frac{1}{2}\log\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{1+\sqrt{1-y^2}} = \pm x + C, \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{1+\sqrt{1-y^2}} = Ce^{\pm 2x}, C = 1$

３．$x(-1 - 2xy)y' = 2y(1 + xy)$ **を解け。**

(解) 未知関数について変数変換をして $xy = u, y = \frac{u}{x}$ とおくと、$y' = \frac{u'x-u}{x^2}$.

よって、方程式は $x(-1-2xy)y' = 2y(1+xy)$ より、$x(-1-2u)\frac{u'x-u}{x^2} = 2\frac{u}{x}(1+u) \to (-1-2u)(u'x-u) = 2u(1+u) \to u'x = -\frac{2u(1+u)}{2u+1} + u = \frac{u(2u+1)-2u(1+u)}{2u+1} = \frac{-u}{2u+1}$ と変形して、$\frac{(2u+1)du}{u} = -\frac{dx}{x}$ となる。両辺積分すると、$2u + \log u = -\log x + c \to xu = Ce^{-2u}$. 故に、$x^2 y = Ce^{-2xy}$

1.5.9 解曲線

1． 微分方程式 $y' = -2y + y^2$ について以下に答えよ。

（１）方程式を解け。

（２）$y(1) = 3$ を満たす特殊解を求めてそのグラフの概形を描け。軸との交点、漸近線を明示すること。

（解）（１）$\frac{dy}{y(y-2)} = dx, (\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y})dy = 2dx \to \log\frac{y-2}{y} = 2x + c, \frac{y-2}{y} = Ce^{2x} \Longrightarrow y = \frac{2}{1-Ce^{2x}}$

（２）$\frac{2}{1-Ce^2} = 3, C = \frac{e^{-2}}{3} \to y = \frac{2}{1-\frac{e^{-2}}{3}e^{2x}} = \frac{6}{3-e^{2(x-1)}}$.

軸との交点；$(0, \frac{6e^2}{3e^2-1})$. 漸近線；$\lim_{x\to\frac{\log 3}{2}+1-0} y = \infty, (3 \to e^{2(x-1)}), \lim_{x\to\frac{\log 3}{2}+1+0} y = -\infty, \lim_{x\to\infty} y = 0, \lim_{x\to-\infty} y = 2$

$y' = \frac{e^{2(x-1)}}{(3-e^{2(x-1)})^2} > 0 . y > 0, (x < \frac{\log 3}{2} + 1), y < 0, (x > \frac{\log 3}{2} + 1)$

グラフの概形（省略）

1.5.10 P.R.

1．微分方程式$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 7\cos 3x$ を$(\frac{d}{dx} + 3i)(\frac{d}{dx} - 3i)y = 7\cos 3x$ とかく$z = (\frac{d}{dx} - 3i)y$ と置くことにより、上の方程式は$(\frac{d}{dx} + 3i)z = 7\cos 3x$ となる。これを用いて、最初の方程式の一般解を次の手順で求めよ。

(1)$(\frac{d}{dx} + 3i)z = 7\cos 3x$ の解z を求めよ。

(2) 上のz を使って、$(\frac{d}{dx} - 3i)y = z$ の解y を求めよ。

(解)（１）オイラーの公式により、$(\frac{d}{dx} + 3i)z = 7\cos 3x = \frac{7}{2}(e^{3ix} + e^{-3ix})$.

この方程式は一階の線形方程式だから公式を用いて解けるが、関係式 $(\frac{d}{dx} + 3i)z = (D + 3i)[z] = (D + 3i)[e^{-3ix}e^{3ix}z] = e^{-3ix}D[e^{3ix}z]$ を用いると、$e^{-3ix}D[e^{3ix}z] = \frac{7}{2}(e^{3ix} + e^{-3ix}), D[e^{3ix}z] = \frac{7}{2}(e^{6ix} + 1) \to e^{3ix}z = \int\frac{7}{2}(e^{6ix} + 1)dx = \frac{7}{2}x - \frac{7}{12}ie^{6ix}$.

故に、$z = \frac{7}{2}xe^{-3ix} - \frac{7}{12}ie^{3ix}$

（２）（１）と同様に、$(\frac{d}{dx} - 3i)y = \frac{7}{2}xe^{-3ix} - \frac{7}{12}ie^{3ix}$. この方程式も一階の線形方程式だから公式を用いて解いても良いが、関係式 $(\frac{d}{dx} - 3i)y = (D - 3i)[y] = (D - 3i)[e^{3ix}e^{-3ix}y] = e^{3ix}D[e^{-3ix}y]$ により、

$e^{3ix}D[e^{-3ix}y] = \frac{7}{2}xe^{-3ix} - \frac{7}{12}ie^{3ix}, D[e^{-3ix}y] = \frac{7}{2}xe^{-6ix} - \frac{7}{12}i$

$\to e^{-3ix}y = \int(\frac{7}{2}xe^{-6ix} - \frac{7}{12}i)dx = \frac{7}{72}e^{-6ix} - \frac{7}{12}ix + \frac{7}{12}ixe^{-6ix}$.

故に、$y = (\frac{7}{72}e^{-6ix} - \frac{7}{12}ix + \frac{7}{12}ixe^{-6ix})e^{3ix} = \frac{7}{72}e^{-3ix} - \frac{7}{12}ix(e^{3ix} - e^{-3ix}) \underset{\text{オイラー}}{=} \frac{7}{72}(\cos 3x - i\sin 3x) - \frac{7}{12}ix(2i\sin 3x)$

$= \underset{\text{これが求める解}}{\frac{7}{6}x\sin 3x} + \underset{\text{これは、「}\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0\text{」の解}}{\frac{7}{72}(\cos 3x - i\sin 3x)}$

1.5.11　最後に

１．**微分方程式**$y''+4y=f(x)$ **の初期値問題**$y(0)=1, y'(0)=0$ **を考える。以下に答えよ。**

(i)$f(x)=0$ **のときに解を求めよ。(ii)**$f(x)=\sin 2x$ **のときに解を求めよ。(iii)**$f_s(x)=\sum_{j=1}^{s}\sin jx$ **のときの解を**$y_s(x)$ **とおく。**x **が十分に大きいときに、**$\frac{y_s(x)}{x}$ **を**x **の関数で表せ。**

（解）（１）特性方程式 $\rho^2+4=0$ を解いて、$\rho=\pm 2i$。従って、一般解は、$y(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$. 初期条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ により、$\begin{cases} A=1 \\ B=0 \end{cases}$。故に、$y(x)=\cos 2x$

（２）特殊解の形を $y(x)=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$、として定数 A, B を決める。$\begin{cases} y'(x)=A\cos 2x+B\sin 2x+2Bx\cos 2x-2Ax\sin 2x \\ y''(x)=4B\cos 2x-4A\sin 2x-4Ax\cos 2x-4Bx\sin 2x \end{cases}$ より、

$4B\cos 2x-4A\sin 2x-4Ax\cos 2x-4Bx\sin 2x+(4Ax\cos 2x+4Bx\sin 2x)=\sin 2x$.

よって、$\begin{cases} B=0 \\ A=-\frac{1}{4} \end{cases}$ $.y(x)=-\frac{1}{4}x\cos 2x$

故に、一般解は、$y(x)=A\cos 2x+B\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x$. ここで、初期条件に注意して、$\begin{cases} y(0)=A=1 \\ y'(0)=2B-\frac{1}{4}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} B=\frac{1}{8} \\ A=1 \end{cases}$ $.y(x)=\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x$.

（３）$(i) y''+4y=\sin jx, (j\neq 2)$ の特殊解 y_j は、$y_j=A_j\cos jx+B_j\sin jx$ として、$\begin{cases} y_j'=-jA_j\sin jx+jB_j\cos jx \\ y_j''=-j^2A_j\cos jx-j^2B_j\sin jx \end{cases}$ から、

$-j^2A_j\cos jx-j^2B_j\sin jx+4A_j\cos jx+4B_j\sin jx=\sin jx \to \begin{cases} (4-j^2)B_j=2 \\ (4-j^2)A_j=0 \end{cases} \to B_j=\frac{2}{4-j^2}, A_j=0$

$(ii) y''+4y=\sin 2x$ の特殊解 y_2 は、（２）から、$y_2(x)=-\frac{1}{4}x\cos 2x$.

従って、$y''+4y=\sum_{j=1}^{s}\sin jx$ の一般解 $y_s(x)$ は $y_s(x)=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\sum_{j\neq 2}^{s}\frac{2}{4-j^2}\sin jx+A\cos 2x+B\sin 2x, (s\geq 2)$.

ここで、定数 A, B は初期条件を満たすように決める。その場合、x が十分に大きいときに、$\frac{y_s(x)}{x}$ は、$-\frac{1}{4}\cos 2x$ に等しい。

1.6　付録 1.

1.6.1　$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ の一般解の求め方

定理 6 $y_1(x)$ を１つの解としたときに、

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$$

は $y_1(x)$ と独立な１つの解である。

例題１.$y'' + ay' + \frac{a^2}{4}y = 0$

*(***解法）**この方程式は定数係数なので既に定式化された方法があるが上の主張に従って求める。

まず、1 つの解を $y = e^{\rho x}$ の形で探すと、方程式に代入して ρ は二次方程式 $\rho^2 + a\rho + \frac{a^2}{4} = 0$ の解である。因数分解をして、$(\rho + \frac{a}{2})^2 = 0$ だから、$\rho = -\frac{a}{2}$ となる。だから、1 つの解は、$y = e^{-\frac{a}{2}x}$ である。

以下は上の方法で $y_2(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx = e^{-\frac{a}{2}x} \int \frac{e^{-\int a dx}}{e^{-ax}} dx = e^{-\frac{a}{2}x} \int \frac{e^{-ax}}{e^{-ax}} dx = xe^{-\frac{a}{2}x}$ を得る。◀

1.6.2 問題.

1. **関数**$a(t), b(t)$ **はある区間**I **で連続であり、関数**$x_1(t)$ **は２階線形常微分方程式**$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ **の区間**I **における解であるとする。以下に答えよ。**

(1) **関数**$x_2(t) = x_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\{x_1(s)\}^2} \exp(-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau)ds$ **も同じ区間**I **で解であることを示せ。**

(2) **２つの解**x_1, x_2 **はお互いに独立であることを示せ。**

（解）（１）$y(t) = x_1(t)u(t) \to y' = x_1'u + x_1u', y'' = x_1''u + 2x_1'u' + x_1u''$

$\overset{x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} x_1''u + 2x_1'u' + x_1u'' + a(x_1'u + x_1u') + bx_1u$

$= x_1''u + ax_1'u + +bx_1u + 2x_1'u' + x_1u'' + ax_1u' = x_1u'' + (ax_1 + 2x_1')u' = 0$

$\overset{u'=U}{\to} U' + (a + 2\frac{x_1'}{x_1})U = 0 \to \frac{dU}{U} = -(a + 2\frac{x_1'}{x_1})dt$

$\to\to\to \log U = -(\int^s a(\tau)d\tau + 2\log x_1) + c \to\to\to U(s) = e^{-(\int^s a(\tau)d\tau + 2\log x_1)} = \frac{e^{--(\int^s a(\tau)d\tau}}{x_1^2(s)}$,

$u'(s) = \frac{e^{--(\int^s a(\tau)d\tau}}{x_1^2(s)} \to\to u(t) = \int^t \frac{e^{--(\int^s a(\tau)d\tau}}{x_1^2(s)} ds$

$\to\to\to y(t) = x_1(t) \int^t \frac{e^{--(\int^s a(\tau)d\tau}}{x_1^2(s)} ds$

（２）明らか

1.6.3 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ の一般解の求め方

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ の一般解 $y(x)$ は、

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0...(1)$$

の一般解 $Y_1(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ と

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)...(2)$$

の 1 つの解 (特殊解)$y_0(x)$ を用いて、$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_0(x)$ と表される。従って、ここでは (2) の特殊解を求める方法について調べる。

定理 7 方程式 (2) の特殊解 $y_0(x)$ は、方程式 (1) の一次独立な解 $y_1(x), y_2(x)$

を用いて,

$$y_0(x) = y_1(x)\int \frac{-R(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx + y_2(x)\int \frac{R(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx$$

とかける。ここで、$W(y_1,y_2)(x)$ は前節のように、解 $y_1(x), y_2(x)$ のロンスキー行列である。

例題 *2.* 方程式 $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^3 - x^2$...(1) を解け。

(解法) 最初に (1) で右辺を零と置いて方程式 $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$...(2) を考える。この方程式の解を、$y = x^k$ の形で求める。$y' = kx^{k-1}, y'' = k(k-1)x^{k-2}$ を (2) に代入して、$k(k-1)x^k - 3kx^k + 3x^k = 0$. 係数を取り出して、$k(k-1) - 3k + 3 = 0$. 即ち、$k^2 - 4k + 3 = (k-3)(k-1) = 0$. よって、$k = 1, 3$ だから (2) の独立な解として、$y_1 = x, y_2 = x^3$ が得られた。この時に、ロンスキー行列は、$W(x, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3$. 公式を使う為に y'' の係数を 1 にして、$R(x) = 2x - 1$ となり、一般解を求める公式に代入すると、

$y_0(x) = x\int \frac{-(2x-1)x^3}{2x^3}dx + x^3\int \frac{(2x-1)x}{2x^3}dx = x(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x) + x^3(\frac{1}{2x} + \log x) = \frac{1}{2}x^2\left(-x + 2 + 2(\log x)x\right)$

だから、最初の方程式 (1) の一般解は、$y = C_1x + C_2x^3 + \frac{1}{2}x^2\left(-x + 2 + 2(\log x)x\right) = C_1x + C_2x^3 + x^2\left(1 + (\log x)x\right)$

となる。◀

方程式 (1) の 1 つの解 $y_1(x)$ が見つかれば、前節の方法でこれと独立な方程式 (1) の解 $y_2(x)$ を求め、その後で上の主張に従って方程式 (2) の特殊解を求めることが出来るが、次の主張は方程式 (1) の 1 つの解 $y_1(x)$ が見つかった時に、直接方程式の特殊解を求める方法をいっている。

定理 8 $y_1(x)$ が方程式 (1) の解であるとすると、方程式 (2) の特殊解 $y_0(x)$ は次の式で求めることができる。

$$y_0(x) = y_1(x)\int \phi(x)dx$$

ここで、

$$\phi(x) = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}\int y_1(x)R(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

(注意) 前節の結果によれば、$y_1(x)$ が方程式 (1) の解であるとすると、

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$$

が $y_1(x)$ と独立な方程式 (1) の解である。従って、方程式 (2) の一般解 $y(x)$ は次の式で求めることができる。

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + y_1(x) \int \phi(x) dx,$$

$$\phi(x) = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} \int y_1(x) R(x) e^{\int P(x)dx} dx$$

（注意）他に、以下の例題で示す**定数変化法**と呼ばれる解法が、微分方程式の解を求める際に良く使われる。

例題３. 微分方程式 $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^4e^x$ の一般解を求めよ。

（解法）方程式 $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^4e^x$...(1) で右辺を０とおいて、その解を $y = x^k$ の形で予測する。$y' = kx^{k-1}, y'' = k(k-1)x^{k-2}$ だから代入して、$k(k-1)x^k - k(x+2)x^k + (x+2)x^k = 0$. この両辺の係数を比較すると、$x^{k+1}$ の係数は、$-k+1 = 0.x^k$ の係数は、$k(k-1) - 2k + 2 = k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2) = 0$. この２つの共通な解は、$k = 1$ よって、$y = x$ を得る。次ぎに、定数変化法で一般解を求める。解を、$y_2 = xu(x)$ とおいて、$y_2' = u + xu', y_2'' = 2u' + xu''$ これらを方程式に代入して、$x^2(2u' + xu'') - x(x+2)(u+xu') + (x+2)xu = x^4e^x$ となる。

即ち、$-3x^3u' + x^3u'' = x^4e^x$ を得る。簡単にすると、$u'' - u' = xe^x$ が得られる。いま $u' = U$ とおけば、方程式 $U' - U = xe^x$ が得られる。これは、一階の線形方程式だから、公式に代入して、$U = e^{\int dx}(\int xe^xe^{-\int dx}dx + c) = e^x\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right) = u'$. 積分すると、$u = \int e^x\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)dx = \frac{1}{2}e^xx^2 - xe^x + e^x + e^xc$ が得られる。従って、$y_2 = xu(x) = x(\frac{1}{2}e^xx^2 - xe^x + e^xc) = \frac{1}{2}e^xx^3 - e^xx^2 + xe^xc$ となる。だから、求める解は、$y = \frac{1}{2}e^xx^3 - e^xx^2 + c_1xe^x + c_2x$ である。

例題４. 微分方程式 $(x+1)y'' + xy' - y = 0$ を以下の順序で解け。

(１) １つの解（特殊解）y_1 を、$y_1 = e^{kx}$ の形で求めよ。

(２) 一般解を上の特殊解 y_1 を用いて、$y = y_1u(x)$ の形で求めよ。

（解法）(**１**)$y_1 = e^{kx}$ とおくと、$y_1' = ke^{kx}, y_1'' = k^2e^{kx}$ だから方程式に代入すると、$k^2(x+1)e^{kx} + kxe^{kx} - e^{kx} = 0, k^2(x+1) + kx - 1 = 0, (k^2+k)x + (k^2-1) = 0$ が得られる。従って、k は、$\begin{cases} k^2 + k = 0 \\ k^2 - 1 = 0 \end{cases}$ を同時に満たせばよい。共通な解は、$k = -1$ だから、$y_1 = e^{-x}$ が得られる。

(**２**)$y = e^{-x}u(x)$ とおくと、$\begin{cases} y' = -e^{-x}u + e^{-x}u' \\ y'' = e^{-x}u - 2e^{-x}u' + e^{-x}u'' \end{cases}$ なので、方程式 $(x+1)y'' + xy' - y = 0$ に代入すると、$(e^{-x}u - 2e^{-x}u' + e^{-x}u'')(x+1) + (-e^{-x}u + e^{-x}u')x - e^{-x}u = 0$. 簡単にして、$e^{-x}u''(x+1) - e^{-x}(x+2)u' = 0$ が得られる。よって、$u''(x+1) - (x+2)u' = 0$ となる。ここで、$u' = U$ とおけば、$U'(x+1) - (x+2)U = 0$.

即ち、$\frac{dU}{dx}=\frac{(x+2)U}{x+1}$. 分離形だから、$\frac{dU}{U}=(\frac{1}{x+1}+1)dx$ と変形して、積分すると、$\log U=\log(x+1)+x+c$. つまり、$U=C(x+1)e^x$ となる。従って、$u'=C(x+1)e^x$ 積分すると、$u=C\int(x+1)e^x dx=C(x+1)e^x-Ce^x+D=Cxe^x+D$ となり、求める一般解は、$y=e^{-x}u(x)=e^{-x}(Cxe^x+D)=Cx+De^{-x}$ となる。

1.6.4 問題

1．次の微分方程式の一般解を求めよ。($hint; y=x^n$ の形で右辺を 0 にした方程式の特殊解を探し、一般解は$y=x^n u(x)$ で求める）

（1） $x^2y''-(2a-1)xy'+a^2y=0$
（2） $x^2y''+xy'-y=0$
（3） $x^2(x+1)y''-2x^2y'+2(x-1)y=0$

（4） $x^2y''+3xy'+y=x$
（5） $x^2y''+3xy'-3y=3\log x-2$
（6） $x^2y''-3xy'+4y=2x^3+x^2$

（解）（1）$y=x^n, y'=nx^{n-1}, y''=n(n-1)x^{n-2}$
$\to x^2y''-(2a-1)xy'+a^2y=0$
$\Longrightarrow n(n-1)x^n-(2a-1)nx^n+a^2x^n=0, x^n\,(n-a)^2=0$
$\to\to\to n=a\to y=x^a u, y'=ax^{a-1}u+x^a u', y''=a(a-1)x^{a-2}u+2ax^{a-1}u'+x^a u''$
$\to a(a-1)x^a u+2ax^{a+1}u'+x^{a+2}u''-(2a-1)(ax^a u+x^{a+1}u')+a^2x^a u=0$
$\to\to\to x^{a+1}\left(u'+xu''\right)=0 \overset{u'=U}{\to} U+xU'=0, \frac{dU}{U}=-\frac{dx}{x}$
$\to\to\to \log U=-\log x+c\to U=\frac{C}{x}, u'=\frac{C}{x}$
$\to\to\to u=C\log x+D \xrightarrow{y=x^a u}\to\to y=x^a(C\log x+D)$
（2）$y=C_2x+\frac{C_1}{x}$
（3）$y=C_3x^2+\frac{C_4}{x}\left(3x+3x^2+1\right)$
（4）$x^2y''+3xy'+y=0 \overset{y=x^n, y'=nx^{n-1}, y''=n(n-1)x^{n-2}}{\to\to\to} n(n-1)x^n+3nx^n+x^n=0\to n(n-1)+3n+1=0, (n+1)^2=0\to y=x^{-1}$
$\to\to\to y=x^{-1}u, y'=x^{-1}u'-x^{-2}u, y''=x^{-1}u''-2x^{-2}u'+2x^{-3}u$
$\to\to\to x^2(x^{-1}u''-2x^{-2}u'+2x^{-3}u)+3x(x^{-1}u'-x^{-2}u)+x^{-1}u=x$, $(-2u'+xu''+3u')=x \overset{U=u'}{\to} \frac{dU}{dx}+\frac{U}{x}=1, U=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\{\int e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\}=\frac{\left\{C+\frac{1}{2}x^2\right\}}{x}=\frac{C+x^2}{2x}\to u'=\frac{C}{x}+\frac{x}{2}\to u=C\log x+\frac{x^2}{4}+D$
$\to\to\to y=x^{-1}u=\frac{1}{x}(C\log x+\frac{x^2}{4}+D)$
（5） $C_5x-\log x+\frac{C_6}{x^3}$
（6）右辺を0とおいて、その解を$y=x^k$ の形で予測する。$y'=kx^{k-1}, y''=$

$k(k-1)x^{k-2}$ だから代入して、$k(k-1)x^k-3kx^k+4x^k=0$ となる。係数を計算

して、$k(k-1)-3k+4=0$ となる。$k^2-4k+4=0,(k-2)^2=0$ より、$k=2$ を得る。だから、1つの解は $y_1=x^2$ である。これを、公式 $y_2=y_1\int\phi dx$ に代入して計算する。但し、$\phi=\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}\int y_1R(x)e^{\int P(x)dx}dx$ で、$P(x)=-\frac{3}{x},R(x)=\frac{2x^3+x^2}{x^2}=2x+1$ である。最初に、$\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}=\frac{e^{-\int -\frac{3}{x}dx}}{(x^2)^2}=\frac{e^{3\int\frac{1}{x}dx}}{x^4}=\frac{e^{3\log x}}{x^4}=\frac{e^{\log x^3}}{x^4}=\frac{1}{x}$ であり、また、$\int y_1R(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int x^2(2x+1)e^{-3\int\frac{1}{x}dx}dx=\int x^2(2x+1)e^{-\log x^3}dx$

$=\int x^2(2x+1)\frac{1}{x^3}dx=\int(2x+1)\frac{1}{x}dx=\int(2+\frac{1}{x})dx=2x+\log x+c$

よって、$\phi=\frac{1}{x}(2x+\log x+c)=2+\frac{\log x}{x}+\frac{c}{x}$ となり、$y_2=y_1\int\phi dx$ に代入すると、

$y_2=x^2\int(2+\frac{\log x}{x}+\frac{c}{x})dx=x^2\left(2x+\frac{1}{2}\log^2 x+c\log x\right)$

$=2x^3+\frac{x^2}{2}\log^2 x+cx^2\log x$ が得られる。よって求める解は、$y=2x^3+\frac{x^2}{2}\log^2 x+c_1x^2\log x+c_2x^2$

2．次の微分方程式の一般解を求めよ。$(hint; y=e^{kx}$ **の形で右辺を** 0 **にした方程式の特殊解を探し、一般解は**$y=u(x)e^{kx}$ **で求める）**

（1） $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=(x^2+x-1)e^{2x}$

（2） $(x+1)y''-(3x+4)y'+3y=(3x+2)e^{3x}$

（3） $xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=xe^x$

（4） $x^2y''-2xy'+2y=-2x+2$

（5） $(1+x^2)y''-2xy'+2y=\frac{1-x^2}{x}$

（6） $x^2y''-(x+2)xy'+(x+2)y=x^4e^x$

（7） $x^2y''+xy'+y=x$

（解）（1）$xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=(x^2+x-1)e^{2x}.xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$

の解を $y=e^{kx}$ で求める。$y'=ke^{kx},y''=k^2e^{kx}\to k^2xe^{kx}-(2x+1)ke^{kx}+(x+1)e^{kx}=0,$

$(k^2-2k+1)xe^{kx}-(k-1)e^{kx}=0$

$\to\to\to k=1,y=e^x\to y=u(x)e^x,y'=ue^x+u'e^x,y''=ue^x+2u'e^x+u''e^x.$

$x(ue^x+2u'e^x+u''e^x)-(2x+1)(ue^x+u'e^x)+(x+1)ue^x=(x^2+x-1)e^{2x}$

$\to xu''e^x-u'e^x=(x^2+x-1)e^{2x}\to\to\to u''-\frac{1}{x}u'=(x+1-\frac{1}{x})e^x$

$\xrightarrow{u'=U} U'-\frac{1}{x}U=(x+1-\frac{1}{x})e^x \xrightarrow{\text{解の公式}}\!\to\to$

$U=C_1x+e^x+xe^x\to\to\to u=\int Udx=C_2+xe^x+C_1x^2\to\to\to y=e^x(C_2+xe^x+C_1x^2)$

（2）$(x+1)y''-(3x+4)y'+3y=(3x+2)e^{3x}.(x+1)y''-(3x+4)y'+3y=0.y=e^{kx},y'=ke^{kx},y''=k^2e^{kx}\to k^2e^{kx}(x+1)-(3x+4)ke^{kx}+3e^{kx}=0,$

$k(k-3)xe^{kx}+(k^2-4k+3)e^{kx}=0\to k=3,y=e^{3x}$

$y=u(x)e^{3x}, y'=3ue^{3x}+u'e^{3x}, y''=9ue^{3x}+6u'e^{3x}+u''e^{3x}$.

$(x+1)(9ue^{3x}+6u'e^{3x}+u''e^{3x})-(3x+4)(3ue^{3x}+u'e^{3x})+3ue^{3x}=(3x+2)e^{3x}$

$(3x+2)u'e^{3x}+(x+1)u''e^{3x}=(3x+2)e^{3x}\to(x+1)u''+(3x+2)u'=(3x+2)\overset{u'=U}{\to}$

$U'+\frac{(3x+2)}{(x+1)}U=\frac{(3x+2)}{(x+1)}\to U=e^{-\int\frac{(3x+2)}{(x+1)}dx}(\int e^{\int\frac{(3x+2)}{(x+1)}dx}\frac{(3x+2)}{(x+1)}dx+C)$

$=e^{\log(x+1)-3x}(\int e^{-\log(x+1)+3x}\frac{(3x+2)}{(x+1)}dx+C)$

$=(x+1)e^{-3x}(\int e^{3x}\frac{(3x+2)}{(x+1)^2}dx+C)=(x+1)e^{-3x}(\frac{e^{3x}}{x+1}+C)=1+C(x+1)e^{-3x}$

$\to u=\int(1+C(x+1)e^{-3x})dx=x+C(3x+4)e^{-3x}$

$y=e^{3x}(x+C(3x+4)e^{-3x})=xe^{3x}+C(3x+4)$

（3）$xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=xe^x.xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=0.y=e^{kx}, y'=ke^{kx}, y''=k^2e^{kx}\to k^2e^{kx}x-(2x-1)ke^{kx}+(x-1)e^{kx}=0$,

$(k^2-2k+1)e^{kx}x+(k-1)e^{kx}=0\to\to\to k=1, y=e^x$

$y=u(x)e^x, y'=ue^x+u'e^x, y''=ue^x+2u'e^x+u''e^x$,

$x(ue^x+2u'e^x+u''e^x)-(2x-1)(ue^x+u'e^x)+(x-1)ue^x=xe^x$

$u''xe^x+u'e^x=xe^x\to\to\to u''x+u'=x\overset{u'=U}{\to}U'+\frac{1}{x}U=1$,

$U=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)=e^{-\log x}(\int e^{\log x}dx+C)=\frac{1}{x}(\frac{x^2}{2}+C)=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}$

$\to u=\int(\frac{x}{2}+\frac{C}{x})dx=\frac{x^2}{4}+C\log x, y=e^x(\frac{x^2}{4}+C\log x)$

（4）$x^2y''-2xy'+2y=-2x+2...(1), x^2y''-2xy'+2y=0...(2).(2)$ の解を $y=x^k$ として、$y'=kx^{k-1}, y''=k(k-1)x^{k-2}$ だから、（2）より、$x^2k(k-1)x^{k-2}-2xkx^{k-1}+2x^k=0\to k(k-1)-2k+2=0, k^2-3k+2=0\to k=1,2$

$\to\to\to y_1=x, y_2=x^2$, このときに、$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=x^2\neq 0$

だから、公式 $y_0(x)=y_1(x)\int\frac{-R(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx+y_2(x)\int\frac{R(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx\to y_0(x)=x\int\frac{-(-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})x^2}{x^2}dx+x^2\int\frac{(-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})x}{x^2}dx$

$=x(2\log x+\frac{2}{x})+(2x-1)=2x\log x+2x+1$

$\to\to\to$ 方程式の解: $C_1x+C_2x^2+2x\log x+1$

（5）$(1+x^2)y''-2xy'+2y=\frac{1-x^2}{x}...(1)$、$(1+x^2)y''-2xy'+2y=0$.

この方程式の解を $y=x^k$ で求めると、$y'=kx^{k-1}, y''=k(k-1)x^{k-2}$ より、$(1+x^2)k(k-1)x^{k-2}-2xkx^{k-1}+2x^k=0\to\{k(k-1)-2k+2\}x^k+k(k-1)x^{k-2}=0$

$\to\to\to\left\{\begin{array}{c} k(k-1)-2k+2=k^2-3k+2=(k-1)(k-2)=0 \\ k(k-1)=0 \end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{c} k=1,2 \\ k=1,0 \end{array}\right\}$

$\to\to\to k=1\to y=x.$（1）の解を、$y=xu(x)$ として、$y'=u+xu', y''=2u'+xu''$ より、$(1+x^2)(2u'+xu'')-2x(u+xu')+2xu(x)=\frac{1-x^2}{x}\to\to\to (1+x^2)xu''+2u'=\frac{1-x^2}{x}$

$\to\to\to u''+\frac{2}{(1+x^2)x}u'=\frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)}$

$\xrightarrow{u'=U}\to\to U'+\frac{2}{(1+x^2)x}U=\frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)}...(3)$、$U'+\frac{2}{(1+x^2)x}U=0...(4)\to\frac{dU}{dx}=$

$-\frac{2}{(1+x^2)x}U, \frac{dU}{U}=-\frac{2}{(1+x^2)x}dx$

$\to\log U=\log(1+x^2)-\log x^2=\log\frac{x^2+1}{x^2}$

次に、（3）の解を $U=\frac{x^2+1}{x^2}v(x)=(1+\frac{1}{x^2})v$ で求める。$U'=(1+\frac{1}{x^2})v'-\frac{2}{x^3}v$ を（3）に代入して、$(1+\frac{1}{x^2})v'-\frac{2}{x^3}v+\frac{2}{(1+x^2)x}\frac{x^2+1}{x^2}v=\frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)}, \frac{1+x^2}{x^2}v'=\frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)}, \to v'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$\to v=\int\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx=\frac{x}{x^2+1}+c$ よって、

$U=\frac{x^2+1}{x^2}(\frac{x}{x^2+1}+c)=\frac{1}{x}+c(1+\frac{1}{x^2})$ だから、$u'=U=\frac{1}{x}+c(1+\frac{1}{x^2})\to\to\to u=\log x+C_1(x-\frac{1}{x})+C_2$

$\to\to\to y=x(\log x+C_1(x-\frac{1}{x})+C_2)=x\log x+C_1(x^2-1)+C_2x$

（6）$x^2y''-3xy'+4y=0 y=x^k, y'=kx^{k-1}, y''=k(k-1)x^{k-2}\to k(k-1)x^k-3kx^k+4x^k=0,$

$k(k-1)-3k+4=0, (k-2)^2=0 k=2, y_1=x^2$

公式 $\xrightarrow{y_2=y_1\int\phi dx}\to\to$ $(\phi=\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}\int y_1R(x)e^{\int P(x)dx}dx, P(x)=-\frac{3}{x}, R(x)=\frac{2x^3+x^2}{x^2}=2x+1)$

$\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}=\frac{e^{-\int-\frac{3}{x}dx}}{(x^2)^2}=\frac{e^{3\int\frac{1}{x}dx}}{x^4}=\frac{e^{3\log x}}{x^4}=\frac{e^{\log x^3}}{x^4}=\frac{1}{x},$

$\int y_1R(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int x^2(2x+1)e^{-3\int\frac{1}{x}dx}dx=\int x^2(2x+1)e^{-\log x^3}dx=\int x^2(2x+1)\frac{1}{x^3}dx$

$=\int(2x+1)\frac{1}{x}dx=\int(2+\frac{1}{x})dx=2x+\log x+c,$

$\phi=\frac{1}{x}(2x+\log x+c)=2+\frac{\log x}{x}+\frac{c}{x}\int\phi dx=2x+c\log x+\frac{1}{2}\log^2 x$ 公式 $\xrightarrow{y_2=y_1\int\phi dx}\to\to$ $y_2=x^2\int\phi dx==x^2(2x+c\log x+\frac{1}{2}\log^2 x),$

$y=2x^3+\frac{x^2}{2}\log^2 x+c_1x^2\log x+c_2x^2$

（6）$x^2y''-(x+2)xy'+(x+2)y=x^4e^x.x^2y''-(x+2)xy'+(x+2)y=0.y=x^k, y'=kx^{k-1}, y''=k(k-1)x^{k-2}, x^2k(k-1)x^{k-2}-(x+2)xkx^{k-1}+$

$(x+2)x^k=0$

$k(k-1)x^k-(x+2)kx^k+(x+2)x^k=0, (k^2-3k+2)x^k-(k-1)x^{k+1}=0\to\to\to k=1, y=x$

$y=xu(x), y'=u+xu', y''=2u'+xu'', x^2(2u'+xu'')-(x+2)x(u+xu')+(x+2)xu=x^4e^x$

$x^3u''-x^3u'=x^4e^x, u''-u'=xe^x\xrightarrow{u'=U}U'-U=xe^x,$

$U=e^{\int dx}(\int e^{-\int dx}xe^xdx+C)=e^x(\int xdx+C)$

$=e^x(\frac{x^2}{2}+C)\to\to\to u=\int e^x(\frac{x^2}{2}+C)dx=e^x+Ce^x-xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x$

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow y = x(e^x + Ce^x - xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x)$

$y = C_1x + C_2xe^x - x^2e^x + \frac{1}{2}x^3e^x$

（7） $x^2y'' + xy' + y = x \overset{t=\log x, x=e^t}{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}) \end{array} \right\},$$

$x^2(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})) + x(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}) + y = e^t \rightarrow\rightarrow\rightarrow \ddot{y} + y = e^t \rightarrow \rho^2 + 1 = 0, \rho = \pm i \rightarrow y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

$y = Ae^t, A = \frac{1}{2} \rightarrow\rightarrow\rightarrow y = \frac{1}{2}e^t + C_1 \cos t + C_2 \sin t = \frac{1}{2}x + C_1 \cos \log x + C_2 \sin \log x$