1　数学特論２ー「Chapter １」多変数関数の微分と積分

1.1　多変数関数の極値と最大・最小

１．次の関数の極値を求めよ。

（１） $\frac{x+y^2-y}{1+x^2}$

（２） $xy(1-x-y), D; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$ **（最大値・最小値）**

（３） $\sqrt{x^2+y^2} - 2\sqrt{x+y} + \sqrt{2}$ **（最大値・最小値）**

（４） $xy(x^2+y^2-1)$

（５） $e^{-(x^2+y^2)}(4x^2+2y^2+1)$ **（**R^2 **での最大値・最小値も）**

（６） $(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ **（**$R^2 \to R$ **の最大値・最小値及びそれらを与える点の座標）**

（７） $x^2-x^4-y^2 D: x^2+y^2 \leq 1$ *(1)* **領域における極値を求めよ。** *(2)* **領域における最大値・最小値を求めよ。**

（８）x^3-xy+y^3 **（**i**）** $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ **を計算せよ。（**ii**）極値を求めよ。（**iii**）領域**$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ **おける関数**$f(x,y)$ **の最大値・最小値を求めよ。**

（９）$(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

（１０）$-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{4}(x^4+y^4)+\frac{3}{2}x^2y^2$

（解）（１）$z = \frac{x+y^2-y}{1+x^2} \to \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-x^2-2x(y^2-y)}{(1+x^2)^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y-1}{(1+x^2)}$

$$\overset{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0}{\to} \begin{cases} 1+x^2-2x(x+y^2-y)=0 \\ 2y-1=0 \end{cases} \to (x,y) = (\tfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}, \tfrac{1}{2})$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(-2x-2(y^2-y))(1+x^2)^2-4x(1-x^2-2x(y^2-y))(1+x^2)}{(1+x^2)^4}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{(1+x^2)}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2x(2y-1)}{(1+x^2)^2}$

$(x,y) = (\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}, \frac{1}{2}), A = \frac{(-2x-2(y^2-y))}{(1+x^2)^2} = \frac{\mp\frac{\sqrt{17}}{2}}{(1+x^2)^2}, B=0, C=\frac{2}{(1+x^2)}$

$\to D = B^2-AC > 0((x,y) = (\frac{1+\sqrt{17}}{4}, \frac{1}{2})), D = B^2-AC < 0((x,y) = (\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1}{2}))$

$(x,y) = (\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1}{2})$ で極小値

（２）$z = xy(1-x-y), \frac{\partial z}{\partial x} = y-2xy-y^2, \frac{\partial z}{\partial y} = x-x^2-2xy$

$$\overset{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0}{\to} \begin{cases} y-2xy-y^2=0 \\ x-x^2-2xy=0 \end{cases} (x,y) = (0,1),(1,0),(0,0),(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1-2x-2y$

$(i)(0,1) \to A=-2, B=-1, C=0 \to D>0,$

$(ii)(1,0) \to A=0, B=-1, C=-2 \to D>0$

$(iii)(0,0) \to A=0, B=-1, C=0 \to D>0,$

$(iv)(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \to A=-\frac{2}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=-\frac{2}{3} \to D<0$ 極大値 $\frac{1}{27}$

$(a)x=0$ では、$z=0$

$(b)y=0$ では、$z=0$

$(c) x+y=1$ では、$z=0$

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ 最小値 0、最大値 $\frac{1}{27}$

（3）$z=\sqrt{x^2+y^2}-2\sqrt{x+y}+\sqrt{2}, \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x+y}}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x+y}}$

$\xrightarrow{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0} \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x+y}}=0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x+y}}=0 \end{cases} (x,y)=(1,1)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}+\frac{1}{2\sqrt{x+y}^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}+\frac{1}{2\sqrt{x+y}^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}+\frac{1}{2\sqrt{x+y}^3}$

$A=\frac{3}{4\sqrt{2}}=C, B=-\frac{1}{4\sqrt{2}}, D<0$ 極小値 0

$(a) x+y=0$ では、$z=\sqrt{2x^2}+\sqrt{2}=\sqrt{2}(|x|+1)$ 最小値 $\sqrt{2}(x=0)$, 最大値なし

よって、最小値 $0((x,y)=(1,1))$, 最大値なし

（4）$z=xy(x^2+y^2-1), \frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+y^3-y, \frac{\partial z}{\partial y}=3xy^2+x^3-x$

$\xrightarrow{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0} \begin{cases} 3x^2y+y^3-y=0 \\ 3xy^2+x^3-x=0 \end{cases}$

$(x,y)=(0,-1),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(1,0),(0,0),(-1,0),(0,1)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6xy, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=3x^2+3y^2-1$

$(a)(0,\pm 1), A=0=C, B=2, D>0$

$(b)(\pm 1,0), A=0=C, B=2, D>0$

$(c)(0,0), A=0=C, B=1, D>0$

$(d)(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}), A=-\frac{3}{2}=C, B=\frac{1}{2}, D<0$ 極大値 $\frac{1}{8}$

$(e)(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}), A=\frac{3}{2}=C, B=\frac{1}{2}, D<0$ 極小値 $-\frac{1}{8}$

（5）$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=-2x\left(e^{-x^2-y^2}\right)\left(4x^2+2y^2-3\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2y\left(e^{-x^2-y^2}\right)\left(4x^2+2y^2-1\right) \end{cases}$

$\rightarrow (i)(x=0,y=0)(ii)(x=0,y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}})(iii)(x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}},y=0)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\left(e^{-x^2-y^2}\right)\left(8x^4-2y^2-18x^2+4x^2y^2+3\right)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\left(e^{-x^2-y^2}\right)\left(4y^4-8y^2-4x^2+8x^2y^2+1\right)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=4yx\left(e^{-x^2-y^2}\right)\left(4x^2+2y^2-5\right)$

$(i)(x=0,y=0), A=6, B=0, C=2 \rightarrow D<0$ 極小値 1

$(ii)(x=0,y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}), A=4e^{-\frac{1}{2}}, B=0, C=-2e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow D>0$

$(iii)(x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}},y=0), A=-12e^{-\frac{3}{4}}, B=0, C=-4e^{-\frac{3}{4}} \rightarrow D<0$ 極大 $4e^{-\frac{3}{4}}$

次に、最大・最小値は、$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}=R\rightarrow\infty} e^{-(x^2+y^2)}(4x^2+2y^2+1)=0$ に注意すると十分に大きな半径 R の円の外部では、関数の値は任意の正の数より小さい。一方で、明らかに $e^{-(x^2+y^2)}(4x^2+2y^2+1)>0$ なので、最小値は存在しない。また、前半により最大値は $4e^{-\frac{3}{4}}$.

（6）$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-(x^2+y^2)} + (x+y)(-2x)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-(x^2+y^2)} + (x+y)(-2y)e^{-(x^2+y^2)} \end{cases}$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \rightarrow$

$\begin{cases} 1-2x(x+y)=0 \\ 1-2y(x+y)=0 \end{cases}$ $(x,y)=(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$

$\begin{cases} f_{xx} = -2xe^{-(x^2+y^2)} + (x+y)(-2x)^2e^{-(x^2+y^2)} + (-4x-2y)e^{-(x^2+y^2)} \\ f_{yy} = -2ye^{-(x^2+y^2)} + (x+y)(-2y)^2e^{-(x^2+y^2)} + (-4y-2x)e^{-(x^2+y^2)} \\ f_{xy} = -2ye^{-(x^2+y^2)} + (x+y)(-2x)(-2y)e^{-(x^2+y^2)} - 2xe^{-(x^2+y^2)} \end{cases}$ $\xrightarrow{(x,y)=(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})}$

$\begin{cases} A = \mp 3e^{-\frac{1}{2}} \\ C = \mp 3e^{-\frac{1}{2}} \quad D = B^2 - AC < 0 \\ B = \mp e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$

$\rightarrow (x,y) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})(resp.(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ で極大値 $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$（resp. 極小値 $-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$).

更に、$\lim_{|x|\to\infty,|y|\to\infty} |(x+y)e^{-(x^2+y^2)}| \leq \lim_{|x|\to\infty,|y|\to\infty}(|x|+|y|)e^{-(x^2+y^2)} = 0$

だから、十分に大きな A について円周 $C_A; x^2+y^2=A^2$ 上及び円 C_A の外では、この関数は最大値、最小値を取らない。以上のことから、最大値 $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$・最小値 $-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ である。

（7）$\begin{cases} f_x = 2x - 4x^3 = 0 \\ f_y = -2y = 0 \end{cases}$ $\rightarrow (0,0), (\pm\sqrt{\frac{1}{2}},0),$ $\begin{cases} f_{xx} = 2 - 12x^2 \\ f_{xy} = 0 \\ f_{yy} = -2 \end{cases}$

$(i)(0,0),$ $\begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases}$ $, D = B^2 - AC > 0$ 極値なし。$(ii)(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},0),$ $\begin{cases} A = -4 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases}$ $, D = B^2 - AC < 0$ 極大値 $\frac{1}{4}$

（2）$R: x^2+y^2 \leq 1$ の境界上では、$x^2+y^2=1$ だから、$y^2 = 1-x^2$ を
$f(x,y) = x^2 - x^4 - y^2$

に代入して、$f(x) = x^2 - x^4 - (1-x^2) = -x^4 + 2x^2 - 1$

$\rightarrow f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2-1) = 0, x = 0, \pm 1 \rightarrow\rightarrow\rightarrow$ 関数 $f(x)$ は、$x=0$ で極小値 -1 を取り、$x=\pm 1$ で極大値 0 を取る。以上のことから、最大値は $\frac{1}{4}((x,y) = (\pm\sqrt{\frac{1}{2}},0))$

最小値は $0((x,y)=(\pm 1,0))$.

（8）(i) $\begin{cases} f_x = 3x^2 - y \\ f_y = 3y^2 - x \end{cases}$, $\begin{cases} f_{xx} = 6x \\ f_{xy} = -1 \\ f_{yy} = 6y \end{cases}$

(ii) $f_x = f_y = 0 \rightarrow$ $\begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ 3y^2 - x = 0 \end{cases}$ $(x,y) = (0,0), (\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$(i)(0,0) \rightarrow$ $\begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \quad D = B^2 - AC > 0 \text{ 極値無し} \\ C = 0 \end{cases}$

$(ii)(x,y)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})\to\begin{cases} A=2 \\ B=-1 \quad D=B^2-AC<0, A>0 \text{ 極小値 } -\frac{1}{27} \\ C=2 \end{cases}$

（iii）$(a)x=1$ では、$f(x,y)=x^3-xy+y^3=f_1(y)=y^3-y+1$
$\to f_1'(y)=3y^2-1=0, y=\sqrt{\frac{1}{3}}(0\le y\le 1)$
$\to y=\sqrt{\frac{1}{3}}$ 極小値 $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}+1$, そして、$f_1(0)=1, f_1(1)=1$
$(b)x=-1$ では、$f(x,y)=x^3-xy+y^3=f_2(y)=y^3+y-1$
$\to f_2'(y)=3y^2+1>0\to f_2(y)\nearrow\to f_2(0)=-1\le f_2(y)\le f_2(1)=1$
$(c)y=0$ では、$f(x,y)=x^3-xy+y^3=f_3(x)=x^3\nearrow$
$\to f_3(-1)=-1\le f_3(x)\le f_3(1)=1$
$(d)y=1$ では、$f(x,y)=x^3-xy+y^3=f_4(x)=x^3-x+1$
$\to f_4'(x)=3x^2-1=0, x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$
$\to x=-\sqrt{\frac{1}{3}}(resp.\sqrt{\frac{1}{3}})$ で極大値 $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}+1$（$resp.$ 極小値 $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}+1$)
そして、$f_1(0)=1, f_1(1)=1.$

以上により、最大値 $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}+1((x,y)=(-\sqrt{\frac{1}{3}},1))$, 最小値 $-1(((x,y)=(-1,0),(-1,-1))$.

（9） $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=2xe^{-x^2-y^2}\left(-x^2+y^2+1\right)=0 \\ \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=-2ye^{-x^2-y^2}\left(x^2-y^2+1\right)=0 \end{cases}$ $,(i)x=0,y=1,(ii)x=0,y=-1,(iii)x=-1,y=0,(iv)x=1,y=0,(v)x=0,y=0,$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=2e^{-x^2-y^2}\left(2x^4-2x^2y^2-5x^2+y^2+1\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=-2e^{-x^2-y^2}\left(-2x^2y^2+x^2+2y^4-5y^2+1\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)=4xye^{-x^2-y^2}\left(x-y\right)\left(x+y\right) \end{cases}$$

$(i)x=0,y=1;A=4e^{-1}>0,C=4e^{-1},B=0,D=B^2-AC<0;$ 極小値 $-e^{-1}$

$(ii)x=0,y=-1;A=4e^{-1}>0,C=4e^{-1},B=0,D=B^2-AC<0;$ 極小値 $-e^{-1}$

$(iii)x=-1,y=0;A=-4e^{-1}<0,C=-4e^{-1},B=0,D=B^2-AC<0;$ 極大値 e^{-1}

$(iv)x=1,y=0;A=-4e^{-1}<0,C=-4e^{-1},B=0,D=B^2-AC<0;$ 極大値 e^{-1}

$(v)(v)x=0,y=0;A=2e^{-1}>0,C=-2e^{-1},B=0,D=B^2-AC>0;$ 極値なし

（１１）**（i）$h_x(x,y)=h_y(x,y)=0$ となる点 (x,y) 及びその点における h の値を求めよ。**

（解） $\begin{cases} h_x(x,y)=x^3+3xy^2-x=0 \\ h_y(x,y)=y^3+3x^2y-y=0 \end{cases}$,

$(i)x=0,y=1,h(0,1)=-\frac{1}{4}(ii)x=-1,y=0,h(-1,0)=-\frac{1}{4}(iii)x=0,y=0,h(0,0)=0$

$(iv) x=1, y=0, h(0,1)=-\frac{1}{4} (v) x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}, h(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8} (vi) x=-\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}, h(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}$

$(vii) x=0, y=-1, h(0,1)=-\frac{1}{4} (iix) x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}, h(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8} (ix) x=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}, h(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}$

(ii) 原点$(0,0)$ は関数h の極値になるかどうかを理由を付けて答えよ。

(解) $\left\{\begin{array}{l} h_{xx}(x,y)=3x^2+3y^2-1 \\ h_{yy}(x,y)=y^3+3x^2y-y \\ \quad h_{xy}(x,y)=6xy \end{array}\right.$ $, A=C=-1<0, B=0, D=B^2-AC<0.$ 極大値 0 を取る。

2．正の実数N に対して、空間内の部分集合$T_N=\{(x,y,z); x+y+z=N, 0, x, y, z < N\}$ を考える。正の数p,q,r に対してT_N 上で定義された関数$f_{p,q,r}(x,y,z)=\left(\frac{p}{x}\right)^x\left(\frac{q}{y}\right)^y\left(\frac{r}{z}\right)^z$ を考える。以下に答えよ。

(i) **関数$\log f_{p,q,r}(x,y,z)$ の極値をラグランジェの未定乗数法を用いて求めよ。**

(ii)T_N **上の関数$f_{p,q,r}(x,y,z)$ は、T_N 内のある点で最大値を取ることが知られている。この事実を用いて、関数$f_{p,q,r}(x,y,z)$ の最大値を求めよ。**

(解) (i)$g(x,y,z)=\log f_{p,q,r}(x,y,z)=x\log\frac{p}{x}+y\log\frac{q}{y}+z\log\frac{r}{z}$

$=x(\log p-\log x)+y(\log q-\log y)+z(\log r-\log z)\to\left\{\begin{array}{l} g_x=\log p-\log x-1 \\ g_y=\log q-\log y-1 \\ g_z=\log r-\log z-1 \end{array}\right.$

$N=x+y+z\to\left\{\begin{array}{l} N_x=1 \\ N_y=1 \\ N_z=1 \end{array}\right.$ ラグランジェの未定乗数法$\to\to\to$ $\frac{\log p-\log x-1}{1}=\frac{\log q-\log y-1}{1}=\frac{\log r-\log z-1}{1}, x+y+z=N$

$\to\to\to x=\frac{pN}{p+q+r}, y=\frac{qN}{p+q+r}, z=\frac{rN}{p+q+r},$

$\max \frac{pN}{p+q+r}\log\frac{p+q+r}{N}+\frac{qN}{p+q+r}\log\frac{p+q+r}{N}+\frac{rN}{p+q+r}\log\frac{p+q+r}{N}=N\log\frac{p+q+r}{N}$

(ii)$\left(\frac{p+q+r}{N}\right)^N$

3．曲線$x^2-2xy+3y^2=1$ 上の点で原点から一番遠い点と一番近い点とを求めよ。

(解) 条件 $x^2-2xy+3y^2=1$ のもとで、関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ の極大・極小を考える。ラグランジェの未定乗数法により、$\frac{2x-2y}{2x}=\frac{-2x+6y}{2y}$ から、$(x-y)y=(-x+3y)x\to x^2-2xy-y^2=0$

$\to x=(1\pm\sqrt{2})y \overset{x^2-2xy+3y^2=1}{\to} \{(1\pm\sqrt{2})^2-2(1\pm\sqrt{2})+3\}y^2=1, 4y^2=1$

$\to y=\pm\frac{1}{2}, \left\{\begin{array}{l} x=\pm\frac{(1+\sqrt{2})}{2} \\ x=\pm\frac{(1-\sqrt{2})}{2} \end{array}\right.,$

$f(x,y)=\frac{1}{4}+\frac{3\pm2\sqrt{2}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(y=\pm\frac{1}{2}, \left\{\begin{array}{l} x=\pm\frac{(1+\sqrt{2})}{2} \\ x=\pm\frac{(1-\sqrt{2})}{2} \end{array}\right.)$

(別法) $x^2-2xy+3y^2=1\to\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトル、対角化

$$\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}&\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\\\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}&\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}&\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\\\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}&\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}+2&0\\0&-\sqrt{2}+2\end{pmatrix}$$

座標変換 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}&\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\\\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}&\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ により二次形式は、

$$\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}X&Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}&\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\\\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}&\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}&\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\\\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}&\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix}X&Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+2&0\\0&-\sqrt{2}+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\left(\sqrt{2}+2\right)X^2+\left(-\sqrt{2}+2\right)Y^2=1$ に変換される。この場合に変換が直交変換なので、$f(x,y)=x^2+y^2\Longrightarrow F(X,Y)=X^2+Y^2$ になり、条件 $\left(\sqrt{2}+2\right)X^2+\left(-\sqrt{2}+2\right)Y^2=1$ のもとで、関数 $F(X,Y)=X^2+Y^2$ の極大・極小を求めることになる。$X=0(Y=0)$ のときに、$Y^2=\frac{1}{-\sqrt{2}+2}(X^2=\frac{1}{\sqrt{2}+2})$ で極大値（極小値）は、$F(X,Y)=\frac{1}{-\sqrt{2}+2}(=\frac{1}{\sqrt{2}+2})$

４．条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ のもとで、関数$F(x,y,z)=lx+my+nz$ の最大・最小値を求めよ。

（解）$g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\rightarrow\begin{cases}g_x=\frac{2x}{a^2}\\g_y=\frac{2y}{b^2}\\g_z=\frac{2z}{c^2}\end{cases},F(x,y,z)=lx+my+nz\rightarrow$

$$\begin{cases}F_x=l\\F_y=m\\F_z=n\end{cases}$$

$$\rightarrow\frac{\frac{2x}{a^2}}{l}=\frac{\frac{2y}{b^2}}{m}=\frac{\frac{2z}{c^2}}{n}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\frac{2x}{a^2l}=\frac{2y}{b^2m}=\frac{2z}{c^2n}=t\rightarrow\begin{cases}x=a^2lt\\y=b^2mt\\z=c^2nt\end{cases}$$

$$\rightarrow\frac{(a^2lt)^2}{a^2}+\frac{(b^2mt)^2}{b^2}+\frac{(c^2nt)^2}{c^2}=1\rightarrow t^2(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)=1\rightarrow\rightarrow\rightarrow$$

$$\begin{cases}x=\pm\frac{a^2l}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}\\y=\pm\frac{b^2m}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}\\z=\pm\frac{c^2n}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}\end{cases}$$

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\max=\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2},\min=-\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$

５．（１）関数$f(x,y)$ は、２回偏微分可能な関数とし、$f_y\neq0$ となる点の近くで$f(x,y)=0$ により定義される関数を$y=g(x)$ とおく。そのときに、

$(a)g'(x)$ **をf_x,f_y を用いて表せ。**

$(b)g'(x)=0$ **となる点での$g''(x)$ を$f(x,y)$ の二階までの偏導関数で表せ。**

(c) $xy+y^2-x^3=0$ **の極値を求めよ。**

（解）(a)$f(x,y)=0 \overset{x\text{ で微分}}{\rightarrow} f_x(x,y)+f_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$

(b)$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(f_{xx}(x,y)+f_{xy}(x,y)\frac{dy}{dx})f_y(x,y)-f_x(x,y)(f_{yx}(x,y)+f_{yy}(x,y)\frac{dy}{dx})}{f_y^2(x,y)} \overset{\frac{dy}{dx}=0\Longrightarrow f_x(x,y)=0}{\rightarrow} = -\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)}{f_y^2(x,y)}=-\frac{f_{xx}(x,y)}{f_y(x,y)}$

(c)$f(x,y)=xy+y^2-x^3, \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=0 \rightarrow y-3x^2=0,$

$$\begin{cases} y-3x^2=0 \\ xy+y^2-x^3=0 \end{cases} \quad (x,y)=(-\tfrac{2}{9},\tfrac{4}{27})(f_y\neq 0)$$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_{xx}(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{-6x}{x+2y} \overset{(x,y)=(-\frac{2}{9},\frac{4}{27})}{=} -18<0 \rightarrow x=-\frac{2}{9}$ で極小値 $y=\frac{4}{27}$.

６．関数$f_1(x)$ **と**$f_2(x)$ **を**$f_1(x)=\frac{1}{10}e^{2x}, f_2(x)=x^2\log(x+1)$ **と定義する。以下の問に答えよ。**

(1) **定積分**$S_1=\int_0^a f_1(x)dx, S_2=\int_0^b f_2(x)dx$ **を求めよ。**

(2)$a+b=1$ **の関係がある時に、**$S=S_1+S_2$ **を**b **の関数として表せ。**

(3) **変数**a **と**b **は関係式**$a+b=1, 0<a<1, 0<b<1$ **を満たすとする。**$S=S_1+S_2$ **が極値を取る条件を**a **と**b **により表せ。**

（解）（１）$S_1=\int_0^a \frac{1}{10}e^{2x}dx=\frac{1}{20}e^{2a}-\frac{1}{20},$

$S_2=\int_0^b x^2\log(x+1)dx=\frac{1}{6}b^2-\frac{1}{3}b-\frac{1}{9}b^3+\frac{(b^3+1)}{3}\log(b+1)$

（２）$S=\frac{1}{20}e^{2(1-b)}-\frac{1}{20}+\frac{1}{6}b^2-\frac{1}{3}b-\frac{1}{9}b^3+\frac{(b^3+1)}{3}\log(b+1)$

（３）$S=S(a,b), a+b=1 \rightarrow \frac{S_a(a,b)}{1}=\frac{S_b(a,b)}{1} \rightarrow \frac{\frac{2}{20}e^{2a}}{1}=\frac{\frac{1}{3}(b-1-b^2)+\frac{(b^3+1)}{3(b+1)}+b^2\log(b+1)}{1}$
$\rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{1}{10}e^{2a}=b^2\log(b+1)$

７．以下の問に答えよ。

(1) **関数**$f(x)$ **を次のように定義する。**$f(x)=\begin{cases} 0, 0\leq x<a \\ b, a\leq x \end{cases}$ **この時に、積分**$\int_0^\infty (b-f(x))dx$ **を計算せよ。**

(2) **関数**$g(x)$ **は**$g''+\frac{1}{c}g'=0$ **を満たすとする。この方程式の一般解は**$g(x)=m+ne^{-\frac{x}{c}}$ **であることを示せ。但し、**m,n **は任意定数である。また、**$g(0)=0$**、かつ**$x\rightarrow\infty$ **の時、**$g(x)\rightarrow b$ **のもとで関数**$g(x)$ **を求めよ。**

(3)(2) **の解を使って積分**$\int_0^\infty (b-g(x))dx$ **を求めよ。**

(4) **等式**$\int_0^\infty (f(x)-g(x))dx=0$ **が成り立つ時に、**a **と**c **の間にどのような関係があるか。また、その時に、関数**$f(x)$ **と**$g(x)$ **のグラフを書け。**

（解）（１）$\int_0^\infty (b-f(x))dx=\int_0^a bdx=ab$

（２）$g''+\frac{1}{c}g'=0 \overset{g'=G}{\rightarrow} G'+\frac{1}{c}G=0 \overset{\rho+\frac{1}{c}=0}{\rightarrow} G=ae^{-\frac{x}{c}} \rightarrow g=ne^{-\frac{x}{c}}+m$

$g(0)=0 \rightarrow n+m=0, \lim_{x\rightarrow\infty}(ne^{-\frac{x}{c}}+m)=b \rightarrow m=b \rightarrow\rightarrow\rightarrow g=b-be^{-\frac{x}{c}}$

（３）$\int_0^\infty (b-(b-be^{-\frac{x}{c}})dx=bc[-e^{-\frac{x}{c}}]_0^\infty=bc$

（４）$a=c$ グラフは省略

８．S **を平面上の円とする。以下に答えよ。**

$(i)A,B$ がS 上にあり、点P が円弧AB の上を動くときに、$\triangle APB$ の面積を最大にするのは、点P がどこにある場合か。

$(ii)S$ に内接するn 角形$(n\geq 3)$ の面積はいつ最大になるか、理由をつけて答えよ。

（解）(i)$\angle AOB=\theta,\angle AOP=x,\angle BOP=y$ とすると、$\triangle APB=\frac{1}{2}(\sin x+\sin y+\sin\theta)=\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta$

$=\sin\frac{2\pi-\theta}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta\rightarrow\rightarrow\rightarrow x=y$ で最大$\rightarrow$ 二等辺三角形

(ii) 各辺を見込む中心角を$x_j(j=1,...,n)$ とすると、面積は$S=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sin x_j(\sum_{j=1}^{n}x_j=2\pi)$

これが最大になるのは、$x_j=\frac{2\pi}{n}$ の場合。即ち、正 n 角形。

９．行列$\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$で表される１次変換を$f$ とする。

（１）１次変換f による直線$y=\frac{1}{2}x$ の像を求めよ。

（２）xy 平面上の単位円$x^2+y^2=1$ のf による像曲線上の点で原点からの距離が最大になる点を求めよ。

（解）（１）直線 $y=\frac{1}{2}x$ 上の点を $P(s,\frac{1}{2}s)$ とする。点 P の f による像は、$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\\frac{1}{2}s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4s\\\frac{7}{2}s\end{pmatrix}$であり、これは直線 $Y=\frac{7}{8}X$ である。

（２）$x^2+y^2=1$ 上の点を $(\cos\theta,\sin\theta)$ とおくと、f による像は、

$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cos\theta+2\sin\theta\\2\cos\theta+3\sin\theta\end{pmatrix}.$

よって、$X^2+Y^2=(3\cos\theta+2\sin\theta)^2+(2\cos\theta+3\sin\theta)^2=12\sin 2\theta+13.$

故に、$1\leq X^2+Y^2\leq 25.\begin{cases}X^2+Y^2=1:2\theta=-\frac{\pi}{2},-\frac{3\pi}{2},\theta=-\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},y=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}.\\X^2+Y^2=25:2\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

１０．縦、横、高さがx,y,z の直方体がある。縦、横、高さの和は６で、表面積は１８である。

（１）x の取る範囲を求めよ。

（２）この直方体の体積の最大値を求めよ。

(解)（１）$\begin{cases}x+y+z=6\\xy+yz+zx=6\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y+z=6-x\\yz=6-x(y+z)=6-x(6-x)\end{cases}\rightarrow$

y,z は二次方程式 $t^2-(6-x)t+(x^2-6x+6)=0$ の２つの解であり、$y,z>0$ だから、この二次方程式が２つの正の解を持てばよい。その為には、$(i)D=(6-x)^2-4(x^2-6x+6)\geq 0\rightarrow\left(x^2-4x-4\right)<0\rightarrow -2\sqrt{2}+2<x<2\sqrt{2}+2$

$(ii)(6-x)>0$

$(iii)(x^2-6x+6)>0\rightarrow x<-\sqrt{3}+3,x>\sqrt{3}+3$

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\sqrt{3}+3<x<2\sqrt{2}+2,0<x<-\sqrt{3}+3=1.2679$

（２）$V(x)=xyz=x(6-x(6-x))=x^3-6x^2+6x,V'(x)=3x^2-12x+6=3\left(x^2-4x+2\right)=0$

解は $x=\sqrt{2}+2, 2-\sqrt{2}=0.585\,79$

この中で、（１）の範囲に含まれるのは、$x=2-\sqrt{2}$ で、$V''(x)=6x-12=6(x-2)$ から、$V''(2-\sqrt{2})<0$ であり、極大値をとる。最大値は、$(2-\sqrt{2})^3-6(2-\sqrt{2})^2+6(2-\sqrt{2})=4\sqrt{2}-4.$

１１．平面上の四角形$ABCD$ で、$AB=10, BC=5, \angle D=\frac{\pi}{3}$ である。この図形の面積が最大になるときの$\angle B$ と面積を求めよ。

（解）$\angle B=x$ とすると、$\triangle ABC=25\sin x. AC^2=125-100\cos x.$ ここで、$\angle D=\frac{\pi}{3}$ だから、A, C を固定すると、点 D は $\angle ADC=\frac{\pi}{3}$ であるような円周上を動きこの場合 $\triangle ACD$ の面積が最大になるのは、$\triangle ACD$ が正三角形になるときであることは明らかであり、その面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2$ に等しい。故に、四角形 $ABCD$ の面積 $S(x)$ は、

$S(x)=25\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}(125-100\cos x)=\frac{125\sqrt{3}}{4}+25(\sin x-\sqrt{3}\cos x)$

$=\frac{125\sqrt{3}}{4}+50\sin(x-\frac{\pi}{3})$ である。この関数の最大値は、$\frac{125\sqrt{3}}{4}+50$ であり、そのとき $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}.$ 即ち、$x=\frac{5\pi}{6}$

１２．平面上に３点A, B, C と点P がある。A, B, C を点P の周りに回転した点をA', B', C' とする。$\triangle AA'P+\triangle BB'P+\triangle CC'P$ の面積が最小になるのは、点P がどのような点の場合か。

（解）$A=A(x_1,y_1), B=B(x_2,y_2), C=C(x_3,y_3), P=P(x,y)$ とする。点 A を点 P の周りに回転した点 $A'=A'(X_1,Y_1)$ の座標は、$\begin{pmatrix} X_1-x \\ Y_1-y \end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-x \\ y_1-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1-x)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_1-y) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x)+\frac{1}{2}(y_1-y) \end{pmatrix}$ であり、

$\triangle AA'P=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} x_1-x & \frac{1}{2}(x_1-x)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_1-y) \\ y_1-y & \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x)+\frac{1}{2}(y_1-y) \end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} x_1-x & -\frac{\sqrt{3}}{2}(y_1-y) \\ y_1-y & \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x) \end{vmatrix}|$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(x_1-x)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(y_1-y)^2$ となる。以下同様に、$\triangle BB'P=\frac{\sqrt{3}}{4}(x_2-x)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(y_2-y)^2, \triangle CC'P=\frac{\sqrt{3}}{4}(x_3-x)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(y_3-y)^2$ が得られる。従って、$\triangle AA'P+\triangle BB'P+\triangle CC'P=\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_1^3\{(x_j-x)^2+(y_j-y)^2\}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{3x^2-2(x_1+x_2+x_3)+(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+3y^2-2(y_1+y_2+x_3)+(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}\{(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3})^2+...+(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3})^2+...\}$ となり、$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ の場合（即ち、点が $\triangle ABC$ の重心）に最小となる。

１３．点$P(x,y)$ が楕円$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上を動くときに、関数$(i)f(x,y)=x+y(ii)g(x,y)=y(3y-2x)$ の最大値及び最小値とその値をとる点の座標を求めよ。

（解）(i)$P(x,y)=P(2\cos\theta,\sin\theta)$ として、$f(x,y)=x+y=2\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha), \tan\alpha=2$

$$\begin{cases} \text{最大値}\sqrt{5}(\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha, x=2\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha), y=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)) \\ \text{最小値}-\sqrt{5}(\theta=\frac{3\pi}{2}-\alpha, x=2\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha), y=\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)) \end{cases}$$

(ii)$g(x,y)=y(3y-2x)=g(x,y)=3\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta$

$\frac{d}{d\theta}\left(3\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta\right)=3\sin 2\theta-4\cos 2\theta=0, \cos 2\theta=\pm\frac{4}{5}, \sin 2\theta=\pm\frac{3}{5}$

$\frac{d}{d\theta}\left(3\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta\right)=6\cos 2\theta+8\sin 2\theta=\begin{cases} >0, \cos 2\theta=\frac{4}{5}, \sin 2\theta=\frac{3}{5} \\ <0, \cos 2\theta=-\frac{4}{5}, \sin 2\theta=-\frac{3}{5}\end{cases}$

$\begin{cases} \text{最小値}-\frac{9}{10}(\cos 2\theta=\frac{4}{5}, \sin 2\theta=\frac{3}{5} \\ \text{最大値}\frac{39}{10}(\cos 2\theta=-\frac{4}{5}, \sin 2\theta=-\frac{3}{5}\end{cases}$

１４．三角形ABCの内部に点Pを取り$AP+BP+CP$を最小にせよ。

（解） 頂点A,B,Cの座標及び点Pの座標軸を$A(a_1,b_1),B(a_2,b_2),C(a_3,b_3),P(x,y)$とする。ベクトル$\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$の長さを$r_1,r_2,r_3$として、$\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$のなす角を順に$\theta_1,\theta_2,\theta_3$とする。このときに、$L=r_1+r_2+r_3, r_j=\sqrt{(x-a_j)^2+(y-b_j)^2}$の極値を取る条件$\begin{cases} L_x=(r_1)_x+(r_2)_x+(r_3)_x=\sum_{j=1}^{3}\frac{(x-a_j)}{r_j}=0 \\ L_y=(r_1)_y+(r_2)_y+(r_3)_y=\sum_{j=1}^{3}\frac{(y-b_j)}{r_j}=0\end{cases}$ から、

$\begin{cases} \frac{(x-a_1)}{r_1}=-\frac{(x-a_2)}{r_2}-\frac{(x-a_3)}{r_3} \\ \frac{(y-b_1)}{r_1}=-\frac{(y-b_2)}{r_2}-\frac{(y-b_3)}{r_3}\end{cases}$ を得る。これから、$\left(\frac{(x-a_1)}{r_1}\right)^2+\left(\frac{(y-b_1)}{r_1}\right)^2=\left(-\frac{(x-a_2)}{r_2}-\frac{(x-a_3)}{r_3}\right)^2+\left(-\frac{(y-b_2)}{r_2}-\frac{(y-b_3)}{r_3}\right)^2$,

$\left(\frac{(x-a_1)}{r_1}\right)^2+\left(\frac{(y-b_1)}{r_1}\right)^2=\left(\frac{(x-a_2)}{r_2}\right)^2+\left(\frac{(y-b_2)}{r_2}\right)^2+\left(\frac{(x-a_3)}{r_3}\right)^2+\left(\frac{(y-b_3)}{r_3}\right)^2+2(\frac{(x-a_2)}{r_2}\frac{(x-a_3)}{r_3}+\frac{(y-b_2)}{r_2}\frac{(y-b_3)}{r_3})$

$\rightarrow 1=2+2\cos\theta_1$。故に、$\cos\theta_1=-\frac{1}{2}, \theta_1=\frac{2}{3}\pi$. 同様にして$\theta_2=\theta_3=\frac{2}{3}\pi$を得る。

1.1.1 発展問題

１．２次の実係数多項式$f(x),g(x)$に対して、$F(x,y)=\frac{f(x)}{g(y)}$とする。但し、方程式$g(x)=0$は実数解を持たないとする。以下の場合に関数が極値を持つかどうかを判定し、極値を持つ場合には極値を取る点の個数を答えよ。

（1）方程式$f(x)=0$が実数解を持たない

（2）方程式$f(x)=0$が相異なる２つの実数解を持つ

(解) $F_x(x,y)=\frac{f'(x)}{g(y)}, F_y(x,y)=-\frac{f(x)g'(y)}{g^2(y)}, \begin{cases} F_x(x,y)=0 \\ F_y(x,y)=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x)=0 \\ g'(y)f(x)=0\end{cases}$

$F_{xx}(x,y)=\frac{f''(x)}{g(y)}, F_{xy}(x,y)=-\frac{f'(x)g'(y)}{g^2(y)}, F_{yy}(x,y)=-\frac{f(x)\{g''(y)g^2(y)-2g(y)(g'(y))^2\}}{g^4(y)}$

（1）$\begin{cases} f'(x)=0 \\ g'(y)=0\end{cases}, A=\frac{f''(x)}{g(y)}, B=0, C=-\frac{f(x)g''(y)}{g^2(y)}$

$\rightarrow D=B^2-AC=\frac{f(x)g''(y)f''(x)}{g^3(y)}>0\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ 極値なし。

（2）$\begin{cases} f'(x)=0 \\ g'(y)f(x)=0\rightarrow\begin{cases} g'(y)=0 \\ f(x)=0\end{cases}\end{cases}$,

$(i)\begin{cases} f'(x)=0 \\ g'(y)=0 \end{cases}$ 解は１組 $(a,b), A=\frac{f''(a)}{g(b)}, B=0, C=-\frac{f(a)g''(b)}{g^2(b)}$

$\to D=B^2-AC=\frac{f(a)g''(b)f''(a)}{g^3(b)}<0 \to\to\to (a,b)$ で極値。

$(ii)\begin{cases} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{cases}$ 解なし。

２．関数$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ の$D=\{(x,y);0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 2\}$ における最大値・最小値を求めよ。

（解）$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-3y=0 \\ f_y(x,y)=3y^2-3x=0 \end{cases} \to [x=1,y=1],[x=0,y=0]$

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y)=6x \\ f_{xy}(x,y)=-3 \\ f_{yy}(x,y)=6y \end{cases}$$

$(i)\,[x=1,y=1]$ では、$A=6>0, B=-3, C=6, D=9-36<0 \to$ 極小値 -1 を取る。

$(ii)\,[x=0,y=0]$ では、$A=0, B=-3, C=0, D=9>0 \to$ 極値を取らない。

次に、$x=0$ 上では、$f(x,y)=y^3$ であり、$0\leq y\leq 2$ における最大値は $8(x=0,y=2)$、最小値は $0(x=y=0)$。また、$y=0$ 上では、$f(x,y)=x^3$ であり、$0\leq x\leq 2$ における最大値は $8(x=2,y=0)$、最小値は $0(x=y=0)$。

更に、$x=2$ 上では、$f(x,y)=y^3-6y+8$ であり、$f'(x,y)=3y^2-6=3(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})$

$0\leq y\leq 2$ において、極小値 $\sqrt{2}^3-6\sqrt{2}+8=8-4\sqrt{2}$ を取る。従って、$0\leq y\leq 2$ おける最大値は $8(x=2,y=0)$、最小値は $8-4\sqrt{2}(x=2,y=\sqrt{2})$。同様に、$y=2$ 上では、$f(x,y)=x^3-6x+8$ であり、$f'(x,y)=3x^2-6=3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

$0\leq x\leq 2$ において、極小値 $\sqrt{2}^3-6\sqrt{2}+8=8-4\sqrt{2}$ を取る。従って、$0\leq x\leq 2$ おける最大値は $8(x=0,y=2)$、最小値は $8-4\sqrt{2}(x=\sqrt{2},y=2)$。

以上の結果から、最大値は $8\{(x=2,y=0),(x=0,y=2)\}$、最小値は $-1(x=1,y=1)$.

３．関数$f(x,y)=(2x-1)e^{-2x}+4e^{-x}\cos y$ について以下に答えよ。

（１）$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点を全て求めよ。

（２）関数$f(x,y)$ は、極大点を無限個持ち、極小点は持たないことを示せ。

（解）（１）$\begin{cases} f_x(x,y)=2e^{-2x}-2(2x-1)e^{-2x}-4e^{-x}\cos y=0 \\ f_y(x,y)=-4e^{-x}\sin y=0 \end{cases} \to y=\pm n\pi(n=0,1,2,...)$

$2e^{-2x}-2(2x-1)e^{-2x}-4e^{-x}(-1)^n=0 \to \begin{cases} e^{-x}-xe^{-x}-1=0, n; even \\ e^{-x}-xe^{-x}+1=0, n; odd \end{cases}$

ここで、関数 $g(x)=e^{-x}-xe^{-x}$ は、$g'(x)=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(x-2)$

だから、$x=2$ で極小値 $-\frac{1}{e^2}$ を取る。

故に、最小値は $-\frac{1}{e^2} > -1$ であり、区間 $(-\infty, 2)$ では単調減少、区間 $(2, \infty)$ では単調増加であり、更に、$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0, \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ である。よって、$e^{-x} - xe^{-x} + 1 = 0$ となる点は存在しない。また、$e^{-x} - xe^{-x} - 1 = 0$ となる点は、$x = 0$ だけである。以上によって、求める点は、$(x = 0, y = \pm 2n\pi), n = 0, 1, 2, ...$

（２）$\begin{cases} f_{xx}(x,y) = -4e^{-2x} + 4(2x-1)e^{-2x} - 4e^{-2x} + 4e^{-x}\cos y \\ f_{xy}(x,y) = 4e^{-x}\sin y \\ f_{yy}(x,y) = -4e^{-x}\cos y \end{cases}$

$(x = 0, y = \pm 2n\pi), \begin{cases} A = -8 > 0 \\ B = 0 \\ C = -4 \end{cases}, D = -32 < 0$ によって、$(x = 0, y = \pm 2n\pi)$ で極大値を取る。

４．関数$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ について以下に答えよ。

（１）$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ となる点を求めよ。

（２）実数a について、関数$g(x) = f(x, ax)$ を考える。関数$g(x)$ は、点$x = 0$ において極小、極大あるいはその何れでもないの何れであるか答よ。

（３）関数$f(x,y)$ の極値を求めよ。

(解)（１）$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ f_y(x,y) = 4y^3 - 4y + 4x = 0 \end{cases}$ 解は $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 0)$

（２）$g(x) = x^4 + a^4x^4 - 2x^2 + 4ax^2 - 2a^2x^2 = (1+a^4)x^4 - 2(a^2 - 2a + 1)x^2$

$g'(x) = 4(1+a^4)x^3 - 4(a-1)^2x = 4x\{(1+a^4)x^2 - (a-1)^2\}$,

$g''(x) = 12(1+a^4)x^2 - 4(a-1)^2 \to g'(0) = 0, g''(0) = -4(a-1)^2 = \begin{cases} < 0, a \neq 1 \\ = 0, a = 1 \end{cases}$

$(i) a \neq 1 \to g'(0) = 0, g''(0) < 0$ 極大

$(ii) a = 1 \to g(x) = 2x^4$ 極小

（３）$\begin{cases} f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4 \\ f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4 \\ f_{xy}(x,y) = 4 \end{cases}$

$(i)(0,0) \to A = C = -4, B = 4 \to D = 0$

（２）により、直線 $y = x$ に沿っては、$(0,0)$ で極小をとり、直線 $y = kx, (k \neq 0)$ に沿っては、$(0,0)$ で極大をとるので、$(0,0)$ で極値を取らない。

$(ii)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \to A = C = 20 > 0, B = 4 \to D < 0$ 極大.

$(iii)(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to A = C = 20 > 0, B = 4 \to D < 0$ 極大.

５．x, y が関係式$1 = x^ky^{1-k}(0 < k < 1)$ を満たすときに、関数$z = z(x,y) = x + ay(a > 0)$ の最小値を求めよ。

(解）$f(x,y) = x^ky^{1-k} - 1(0 < k < 1) \to \begin{cases} f_x = kx^{k-1}y^{1-k} \\ f_y = (1-k)y^{-k}x^k \end{cases}$,

$z(x,y)=x+ay(a>0)\to\begin{cases} z_x=1 \\ z_y=a \end{cases}.$

ラグランジェの未定係数法により、$\frac{(1-k)y^{-k}x^k}{kx^{k-1}y^{1-k}}=a\to\begin{cases} a=\frac{(1-k)x}{ky} \\ 1=x^ky^{1-k} \end{cases}$

$\stackrel{(\frac{aky}{1-k})=x}{\longrightarrow}\left(\frac{aky}{1-k}\right)^k y^{1-k}=1\to y(\frac{ak}{1-k})^k=1\to y=(\frac{1-k}{ak})^k, x=(\frac{1-k}{ak})^{k-1}$

最小値は、$a(\frac{1-k}{ak})^k+(\frac{1-k}{ak})^{k-1}=\frac{1}{k}(\frac{1-k}{ak})^{k-1}$.

６．関数$f(x,y)=(x^2+y^2)^2-2xy$ について以下に答えよ。

（１）関数$f(x,y)$ は、R^2 において最小値を持つことを示せ。

（２）（１）の最小値、及び最小値を与える点を求めよ。

（３）$D=\{(x,y);f(x,y)\leq 0\}$ として、D の概形を書け。

（４）D の面積を計算せよ。

(解)（１)、(２) $\lim_{|(x,y)|\to\infty}f(x,y)=\lim_{r\to\infty}(r^4-r^2\sin 2\theta)=\lim_{r\to\infty}r^2(r^2-\sin 2\theta)=\infty$

$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=4x^3+4xy^2-2y=0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=4x^2y-2x+4y^3=0 \end{cases}\left[x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}\right],[x=0,y=0],\left[x=-\frac{1}{2},y=-\frac{1}{2}\right],$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=12x^2+4y^2, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=4x^2+12y^2, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=8xy-2$

$(i)x=y=\pm\frac{1}{2}\to A=4,C=4,B=0,D=-16<0$ 極小値 $-\frac{1}{4}$.

$(ii)x=y=0\to A=C=0,B=-2,D>0$ 極値でない.

（３）$(x^2+y^2)^2-2xy\leq 0\to r^2(r^2-\sin 2\theta)\leq 0\to r^2\leq\sin 2\theta$

（４）$\int\int_D dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}}rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta=1.$

７．２階連続的微分可能な３変数関数$F(x,y,z)$ に対して関数$f(x,y)$ を方程式$F(x,y,z)=c$ から定まるx,y の関数とする。

$(i)F_z(x,y,f(x,y))\neq 0$ となる点(x,y) において、$f_x=-\frac{F_x}{F_z},f_y=-\frac{F_y}{F_z}$ が成立することを示せ。

（解）$F(x,y,z)=c\to F_x(x,y,z)+F_z(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}=0\to f_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.f_y=\frac{\partial z}{\partial y}$ も同様。

(ii) 更に、点(x,y) がf の停留点$(f_x=f_y=0)$ のときには、$f_{xx}=-\frac{F_{xx}}{F_z},f_{xy}=-\frac{F_{xy}}{F_z},f_{yy}=-\frac{F_{yy}}{F_z}$ が成立することを示せ。

（解）$f_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\to f_{xx}=-\frac{\frac{\partial}{\partial x}(F_x(x,y,z))F_z(x,y,z)-\frac{\partial}{\partial x}(F_z(x,y,z))F_x(x,y,z)}{(F_z(x,y,z))^2}=-\frac{(F_{xx}(x,y,z)+F_{xz}(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x})F_z(x,y,z)-\frac{\partial}{\partial x}(F_z(x,y,z))F_x(x,y,z)}{(F_z(x,y,z))^2}$

$\stackrel{\frac{\partial z}{\partial x}=0\to F_x(x,y,z)=0}{=}-\frac{F_{xx}(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.f_{xy}=-\frac{F_{xy}}{F_z},f_{yy}=-\frac{F_{yy}}{F_z}$ も同様。

$(iii)F=x^3-x^2y+2xyz+3z^3$ 及び$c=1$ とする。このときに、点$(x,y)=(2,6)$ において、f_x,f_y を求めよ。但し、点$(2,6)$ で$f=1$ とする。

（解）$F_x=3x^2-2xy+2yz,F_y=-x^2+2xz,F_z=2xy+9z^2\to$

$\begin{cases} f_x=-\frac{3x^2-2xy+2yz}{2xy+9z^2}=0 \\ f_y=-\frac{-x^2+2xz}{2xy+9z^2}=0 \end{cases}$

$(iv)(iii)$ **の場合について、ヘッセ行列**$H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ **を計算せよ。更に、**H **の２つの固有値を求めて点**$(2,6)$ **で関数**$f(x,y)$ **は極大値、極小値の何れを取るか答えよ。**

（解）$F_{xx}=6x-2y, F_{yy}=0, F_{xy}=-2x+2z, F_z=2xy+9z^2$

$\to H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}=-\frac{1}{33}\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 固有値: $\frac{1}{33}\sqrt{29}-\frac{5}{33},-\frac{1}{33}\sqrt{29}-\frac{5}{33}$

９．領域$D=\{(x,y);x>0,y>0,x+y<\pi\}$ **で定義された関数**$f=f(x,y)=(-\sin x+\sin y+\sin(x+y))\tan\frac{x}{2}$ **について、**

（１）f_x,f_y **を計算せよ。**

（２）$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ **を満たす点を求めよ。**

（３）関数$f(x,y)$ **は最大値を持つか。**

（解）（１）$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(-\cos x+\cos(x+y))\tan\frac{x}{2}+(-\sin x+\sin y+\sin(x+y))\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=(\cos y+\cos(x+y))\tan\frac{x}{2}=2\cos\frac{x+2y}{2}\cos\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}=2\cos\frac{x+2y}{2}\sin\frac{x}{2}$

（２）$\begin{cases} (-\cos x+\cos(x+y))\tan\frac{x}{2}+(-\sin x+\sin y+\sin(x+y))\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=0 \\ 2\cos\frac{x+2y}{2}\sin\frac{x}{2}=0 \end{cases}$

$\cos\frac{x+2y}{2}\sin\frac{x}{2}=0\to\frac{x+2y}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\to x+2y=\pi\to 2\sin^3\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}+1=0,(2\sin\frac{x}{2}-1)(\sin^2\frac{x}{2}-1)=0\to\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2},\pm1\to\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}$

$\to x=\frac{\pi}{3},y=\frac{\pi}{3}$

（３）$f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=(-\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3})\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=(-\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi)\tan\frac{\pi}{4}=0.$ だから、関数 $f(x,y)$ は点 $(x=\frac{\pi}{3},y=\frac{\pi}{3})$ で最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

１０．領域$D=\{(x,y);x>0,y>0\}$ **で定義された関数**$f=f(x,y)=(x+y)^x$ **について、**

（１）f_x,f_y **を計算せよ。**

（２）領域D **の閉包**$\bar{D}$ **で定義された連続関数**$F=F(x,y)$ **で**$F(x,y)=f(x,y),((x,y)\in D)$ **となるものが存在することを示せ。**

（３）関数F **の**$\bar{D}$ **での最小値を求めよ。**

（解）（１）$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x\left(x+y\right)^{x-1}+\left(x+y\right)^x\log\left(x+y\right) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\left(x+y\right)^{x-1} \end{cases}$

（２）$\lim_{(x,y)\to(x,+0),x>0}(x+y)^x=x^x,$

$\lim_{(x,y)\to(+0,y),y>0}\log(x+y)^x=\lim_{(x,y)\to(0,y),y>0}x\log(x+y)=\lim_{(x,y)\to(0,y),y>0}\frac{\log(x+y)}{\frac{1}{x}}=\lim_{(x,y)\to(0,y),y>0}\frac{\frac{1}{x+y}}{-\frac{1}{x^2}}=0$

$\to\lim_{(x,y)\to(0,y),y>0}(x+y)^x=1$

$\lim_{x\to+0}\log x^x=\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$

$\to \lim_{x\to +0} x^x = 1 \Longrightarrow F(x,y) = \begin{cases} (x+y)^x, D \\ x^x, x>0, y=0 \\ 1, x=0, y>0 \\ 1, x=y=0 \end{cases}$

（３）$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x\,(x+y)^{x-1} + (x+y)^x \log(x+y) = 0 \\ x\,(x+y)^{x-1} = 0 \end{cases} \to$ $x=0, y=1$. ところで、関数 $F(x,y)$ は例えば点 $(1,1)$ で 2 となり、従って、$x=0, y=1$ で最小値 1 をとる。

１１.（１）条件$x^2+y^2=1$ のもとで関数$f(x,y)=x^2+y^2+x+y$ の極値を求めよ。

（２）領域$D=\{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}$ における関数$f(x,y)=x^2+y^2+x+y$ の極値を求めよ。

（解）（１）$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}, (0 \le \theta < 2\pi)$ とすると、$f=x^2+y^2+x+y=\cos\theta+\sin\theta+1=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+1=F(\theta)$.

関数 $F(\theta), (0\le\theta<2\pi)$ の極大・極小は、極大値 $\sqrt{2}+1, (\theta=\frac{\pi}{4}, x=y=\frac{\sqrt{2}}{2})$, 極小値 $-\sqrt{2}+1, (\theta=\frac{5\pi}{4}, x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

（２）$f(x,y)=x^2+y^2+x+y$ の極値は、$\begin{cases} f_x=2x+1=0 \\ f_y=2y+1=0 \end{cases}, x=y=-\frac{1}{2}$. $\begin{cases} f_{xx}=2=A>0 \\ f_{yy}=2=C \\ f_{xy}=0=B \end{cases}, D=B^2-AC<0 \Longrightarrow x=y=-\frac{1}{2}$ で極小値 $-\frac{1}{2}$.

以上の結果により、最大値 $\sqrt{2}+1, (x=y=\frac{\sqrt{2}}{2})$, 最小値 $-\frac{1}{2}(x=y=-\frac{1}{2})$.

１２．陰関数$x^2+2y^2+5z^2-2xy-2yz=4$ により定まるx,y の関数z の極値を求めよ。

（解） $x^2+2y^2+5z^2-2xy-2yz=4 \to \begin{cases} 2x+10zz_x-2y-2yz_x=0 \to z_x=\frac{y-x}{5z-y}=0 \\ 4y+10zz_y-2x-2z-2yz_y=0 \to z_y=\frac{z+x-2y}{5z-y}=0 \end{cases},$

$\begin{cases} y-x=0 \to y=x \\ z+x-2y=0 \to z=x \\ x^2+2y^2+5z^2-2xy-2yz=4 \to 4x^2=4 \end{cases}, x=y=z=\pm 1.$

$\begin{cases} z_x=\frac{y-x}{5z-y} \to \begin{cases} z_{xx}=\frac{-1(5z-y)-5z_x(y-x)}{(5z-y)^2}=\frac{-1}{(5z-y)}=A \\ z_{xy}=\frac{(5z-y)-5z_x(y-x)}{(5z-y)^2}=\frac{1}{(5z-y)}=B \end{cases} \\ z_y=\frac{z+x-2y}{5z-y} \to z_{yy}=\frac{(z_y-2)(5z-y)-(5z_y-1)(z+x-2y)}{(5z-y)^2}=\frac{-2}{(5z-y)}=C \end{cases}, D=B^2-AC=\frac{-1}{(5z-y)^2}<0$

$(i)x=y=z=1; A<0$ 極大値 $1(ii)x=y=z=1; A>0$ 極小値 1

１３.（１）条件$x^2+y^2+z^2=1$ のもとでの関数$F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2fxy+2gyz+2hzx$ の極値は固有方程式$\begin{vmatrix} a-\lambda & f & h \\ f & b-\lambda & g \\ h & g & c-\lambda \end{vmatrix}=0$

の解として与えられることを示せ。

（２）（１）において関数$F(x,y,z)$が点(x_0,y_0,z_0)において極値をとるときに、条件$x^2+y^2+z^2=1, x_0x+y_0y+z_0z=0$のもとでの関数$F(x,y,z)$の極値も固有方程式の解として与えられることを示せ。

（解）（１）$u=F(x,y,z)-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$として、関数$u$が極値を取る点

では、$\begin{cases} u_x=F_x(x,y,z)-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)_x=2ax+2fy+2hz-2\lambda x=0 \\ u_y=2by+2fx+2gz-2\lambda y=0 \\ u_z=2cz+2gz+2hx-2\lambda y=0 \end{cases}$ $...(*), x^2+$

$y^2+z^2-1=0\to(x,y,z)\neq(0,0,0)$

から、関係式$(*)$が$(x,y,z)\neq(0,0,0)$となる為には、$\begin{vmatrix} a-\lambda & f & h \\ f & b-\lambda & g \\ h & g & c-\lambda \end{vmatrix}=$

$0.$

（２）$v=F(x,y,z)-2\lambda(x^2+y^2+z^2-1)-2\mu(x_0x+y_0y+z_0z)$

$\begin{cases} \frac{v_x}{2}=ax+fy+hz-\lambda x-\mu x_0=0...(i) \\ \frac{v_y}{2}=by+fx+gz-\lambda y-\mu y_0=0...(ii) \quad ...(**), \\ \frac{v_z}{2}=cz+gy+hx-\lambda y-\mu z_0=0...(iii) \end{cases}$

$(i)\times x_0+(ii)\times y_0+(iii)\times z_0$

$\to x_0(ax+fy+hz-\lambda x-\mu x_0)+y_0(by+fx+gz-\lambda y-\mu y_0)+z_0(cz+gy+hx-\lambda z-\mu z_0)=0$

$x_0(ax+fy+hz)-\lambda xx_0-\mu x_0^2+y_0(by+fx+gz)-\lambda yy_0-\mu y_0^2+z_0(cz+gy+hx)-\lambda zz_0-\mu z_0^2=0$

$\mu(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=x_0(ax+fy+hz)+y_0(by+fx+gz)+z_0(cz+gy+hx)-\lambda(x_0x+y_0y+z_0z)$

$\mu=x_0(ax+fy+hz)+y_0(by+fx+gz)+z_0(cz+gy+hx)$

$=x(ax_0+fy_0+hz_0)+y(fx_0+by_0+gz_0)+z(hx_0+gy_0+cz_0)$

（１）から、$\begin{cases} \frac{u_x}{2}=ax_0+fy_0+hz_0-\lambda_0x_0=0...(i) \\ \frac{u_y}{2}=by_0+fx_0+gz_0-\lambda_0y_0=0...(ii) \\ \frac{u_z}{2}=cz_0+gy_0+hx_0-\lambda_0z_0=0...(iii) \end{cases}$ $,\lambda_0$; 最大固有値

$\mu=x(ax_0+fy_0+hz_0)+y(fx_0+by_0+gz_0)+z(hx_0+gy_0+cz_0)=x\lambda_0x_0+y\lambda_0y_0+z\lambda_0z_0=\lambda_0(x_0x+y_0y+z_0z=0.$

故に、関数vが極値をとる点では連立方程式$(**)$で$\mu=0$とした方程式が成り立つ。故に、（１）と同様に固有方程式の解として与えられる。

1.2　重積分とその応用

1.3　重積分の計算

１．次の重積分の値を計算せよ。

1.3.1　重積分の計算（1）累次積分

（**1**）$\int_0^\infty \{\int_0^x (x+y)e^{-(x+y)} \frac{1}{2y+1} dy\} dx$

（解）$\int_0^\infty \{\int_0^x (x+y)e^{-(x+y)} \frac{1}{2y+1} dy\} dx = \int\int_D \{(x+y)e^{-(x+y)} \frac{1}{2y+1}\} dxdy (D; 0 \leq y \leq x, 0 \leq x < \infty)$

$= \int_0^\infty \{\int_y^\infty (x+y)e^{-(x+y)} \frac{1}{2y+1} dx\} dy = \int_0^\infty \frac{e^{-2y}(2y+1)}{2y+1} dy = \int_0^\infty e^{-2y} dy = \frac{1}{2}$

$(\int_y^\infty (x+y)e^{-(x+y)} dx = [-(x+y)e^{-(x+y)}]_{x=y}^{x=\infty} + \int_y^\infty e^{-(x+y)} dx = [-(x+y)e^{-(x+y)}]_{x=y}^{x=\infty} - [e^{-(x+y)}]_{x=y}^{x=\infty}$

$= 2ye^{-2y} + e^{-2y} = e^{-2y}(2y+1))$

（2）(i) 積分$\int_0^\infty \int_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2} dxdy$ **を計算せよ。(ii)(i) を用いて、**$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ **を計算せよ。**

（解）(i)$\int_0^\infty \int_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2} dxdy = \int_0^\infty (\int_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2} dy) dx = \int_0^\infty [\frac{e^{-(1+x^2)y^2}}{2(1+x^2)}]_{y=0}^{y=\infty} dx = \int_0^\infty \frac{1}{2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2}[\tan^{-1} x]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\pi}{4}$

(ii)$\int_0^\infty \int_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2} dxdy = \int_0^\infty ye^{-y^2} (\int_0^\infty e^{-x^2y^2} dx) dy \overset{y=\frac{s}{x}, dx=\frac{1}{y}ds}{=} \int_0^\infty ye^{-y^2} (\int_0^\infty e^{-s^2} \frac{1}{y} ds) dy = \int_0^\infty e^{-s^2} ds \int_0^\infty e^{-y^2} dy$

$\rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

（3）$\int\int_{0 \leq x \leq y \leq 1} x^4 \sin(\pi y^2) dxdy$

（解）$\int\int_{0 \leq x \leq y \leq 1} x^4 \sin(\pi y^2) dxdy = \int_0^1 (\int_0^y x^4 \sin(\pi y^2) dx) dy = \int_0^1 \sin(\pi y^2)(\int_0^y x^4 dx) dy = \frac{1}{5}\int_0^1 y^5 \sin(\pi y^2) dy$

$\overset{y^2=s, 2ydy=ds}{=} \frac{1}{5}\int_0^1 y^5 \sin(\pi y^2) dy = \frac{1}{10}\int_0^1 s^2 \sin \pi s ds = \frac{1}{10}\{[-\frac{s^2 \cos \pi s}{\pi}]_{s=0}^{s=1} + \int_0^1 \frac{2s \cos \pi s}{\pi} ds\} = \frac{1}{10\pi} + \frac{1}{5\pi}\{[\frac{s \sin \pi s}{\pi}]_{s=0}^{s=1} - \int_0^1 \frac{\sin \pi s}{\pi} ds\}$

$= \frac{1}{10\pi} + \frac{1}{5\pi^2}[\frac{\cos \pi s}{\pi}]_{s=0}^{s=1} = \frac{1}{10\pi} - \frac{2}{5\pi^3}$

（4）$\int\int_{0 \leq x < \infty, -\infty < y < \infty} x \cos y e^{-\frac{x^2(1+y^2)}{2}} dxdy$

（解）$\int_0^\infty x \cos y e^{-\frac{x^2(1+y^2)}{2}} dx \overset{x^2=s, 2xdx=ds}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty \cos y e^{-\frac{s(1+y^2)}{2}} ds = \frac{1}{2}[-\cos y \frac{2}{(1+y^2)} e^{-\frac{s(1+y^2)}{2}}]_{s=0}^{s=\infty} = \frac{\cos y}{(1+y^2)}$

$\rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos y}{y^2+1} dy = \pi e^{-1}$（関数論参照）

（5）$e^{\frac{y}{x}}, D; 1 \leq x \leq 1 + \sqrt{1-y}, 0 \leq y \leq 1$

(解) $\int\int_D e^{\frac{y}{x}} dxdy = \int_1^2 (\int_0^{1-(x-1)^2} e^{\frac{y}{x}} dy) dx = \int_1^2 [xe^{\frac{y}{x}}]_0^{1-(x-1)^2} dx = \int_1^2 [xe^{\frac{y}{x}}]_0^{1-(x-1)^2} dx = \int_1^2 x(e^{-x+2} - 1) dx = 2e - \frac{9}{2}$

（6）$(i) \lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{\log(a+x)}{x^2} dx (a > 0) (ii) \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{xy(x+y)} dxdy$

（解）$(i) \int_1^M \frac{\log(a+x)}{x^2} dx = [-\frac{\log(a+x)}{x}]_{x=1}^{x=M} + \int_1^M \frac{1}{x(a+x)} dx$

$= (\log(a+1) - \frac{\log a+M}{M} + \frac{1}{a}(\log \frac{M}{M+a} + \log(a+1))$

$\lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{\log(a+x)}{x^2} dx = \lim_{M \to \infty} \{(\log(a+1) - \frac{\log(a+M)}{M} + \frac{1}{a}(\log \frac{M}{M+a} + \log(a+1))\}$

$= (1 + \frac{1}{a}) \log(a+1)$

$(\int_1^M \frac{1}{x(a+x)} dx = \frac{1}{a}\int_1^M (\frac{1}{x} - \frac{1}{a+x}) dx = \frac{1}{a}[\log x - \log(a+x)]_{x=1}^{x=M}$

$= \frac{1}{a}\{(\log M - \log(a+M)) - (\log 1 - \log(a+1))\} = \frac{1}{a}(\log \frac{M}{M+a} + \log(a+1)))$

$(ii) \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{xy(x+y)} dxdy = \int_1^\infty \frac{\log(x+1)}{x^2} dx = (1 + \frac{1}{1}) \log(1+1) = 2\log 2$

$(\int_1^\infty \frac{1}{xy(x+y)}dy = \frac{1}{x}\int_1^\infty \frac{1}{y(x+y)}dy = \frac{\log(x+1)}{x^2},$

$\int_1^\infty \frac{1}{y(x+y)}dy = \frac{1}{x}\int_1^\infty (\frac{1}{y} - \frac{1}{(x+y)})dy = \frac{1}{x}[\log y - \log(x+y)]_{y=1}^{y=\infty} = \frac{\log(x+1)}{x})$

（７）逐次積分$\int_0^1\int_y^1 y^2e^{x^2}dxdy$ **を二重積分**$\int\int_D y^2e^{x^2}dxdy$ **としたときに、領域**D **を図示し、**$\int_0^1\int_y^1 y^2e^{x^2}dxdy$ **を求めよ。**

（解）$D; y \le x \le 1, 0 \le y \le 1,$

$\int_0^1\int_y^1 y^2e^{x^2}dxdy = \int\int_D y^2e^{x^2}dxdy = \int_0^1\int_0^x y^2e^{x^2}dydx = \int_0^1 \frac{1}{3}x^3e^{x^2}dx \overset{x^2=t}{=} \int_0^1 \frac{1}{6}te^tdt = \frac{1}{6}$

（８）$[0,1]\times[0,1]$ **上の関数**f **を**$, f(x,y) = \frac{(x+y)-|x-y|}{2}, (0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1)$ **と定義する。この時に、以下に答えよ。**

(1)$f(\frac{1}{3},y)$ **及び**$f(\frac{2}{3},y)$ **の**y **に関するグラフを書け。**

(2)$0 \le x \le 1$ **の時に、**$\int_0^1 f(x,y)dy$ **を求めよ。**

(3)$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$ **を求めよ。**

（解）（１）$f(\frac{1}{3},y) = \frac{(\frac{1}{3}+y)-|\frac{1}{3}-y|}{2} = \begin{cases} \frac{(\frac{1}{3}+y)-(\frac{1}{3}-y)}{2} = y, \frac{1}{3} > y \\ \frac{(\frac{1}{3}+y)+(\frac{1}{3}-y)}{2} = \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \le y \end{cases}$

$f(\frac{2}{3},y) = \frac{(\frac{2}{3}+y)-|\frac{2}{3}-y|}{2} = \begin{cases} \frac{(\frac{2}{3}+y)-(\frac{2}{3}-y)}{2} = y, \frac{2}{3} > y \\ \frac{(\frac{2}{3}+y)+(\frac{2}{3}-y)}{2} = \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \le y \end{cases}$

（２）$f(x,y) = \frac{(x+y)-|x-y|}{2} = \begin{cases} \frac{(x+y)-(x-y)}{2} = y, x > y \\ \frac{(x+y)+(x-y)}{2} = x, x \le y \end{cases} \to$

$\int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^x ydy + \int_x^1 xdy = \frac{x^2}{2} + x(1-x) = -\frac{x^2}{2} + x$

（３）$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1(-\frac{x^2}{2}+x)dx = \frac{1}{3}$

（９）**．累次積分**$I = \int_0^1(\int_x^1 e^{y^2}dy)dx$ **について、以下に答えよ。**

（１）積分I **の順序を変更せよ。**

（２）積分I **の値を求めよ。**

（解）（１）$I = \int\int_D e^{y^2}dxdy(D; 0 \le x \le 1, x \le y \le 1) = \int_0^1(\int_0^y e^{y^2}dx)dy$

$= \int_0^1 ye^{y^2}dy \overset{y^2=t, 2ydy=dt}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 e^tdt = \frac{1}{2}(e-1)$

（１０）．積分の順序を変更して$\int_0^1(\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}dx)dy$ **を求めよ。**

(解) $\int_0^1(\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}dx)dy = \int_0^1(\int_0^x e^{\frac{y}{x}}dy)dx = \int_0^1([xe^{\frac{y}{x}}]_{y=0}^{y=x})dx = (e-1)\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$

（１１）R^2 **上の関数**$f(x,y), g(x,y)$ **について、**$f\cdot g = \int\int_{R^2} f(x,y)g(x,y)dxdy$ **と定める。以下に答えよ。**

(i) $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx, \int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^2}dx$ **を計算せよ。**

(ii) 関数$f(x,y) = (x+y)e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}, g(x,y) = (ax+by)e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}, (a, b; \mathrm{real})$ **について、**$f\cdot g = 0$ **であるときに係数**a, b **の間の関係式を求めよ。**

(iii) $g\cdot g = 1$ **の場合に係数**a **を求めよ。**

(解) （１）$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}[-e^{-x^2}]_{-\infty}^\infty = 0$

$\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^\infty x(xe^{-x^2})dx = \int_{-\infty}^\infty x(-\frac{1}{2}e^{-x^2})'dx = \frac{1}{2}[-xe^{-x^2}]_{-\infty}^\infty + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

（２）$f\cdot g=\int\int_{R^2}(x+y)(ax+by)e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int\int_{R^2}(ax^2+by^2+(a+b)xy)e^{-(x^2+y^2)}dxdy$
$=a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx+b\int_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-y^2}dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx+(a+b)\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}a\pi+\frac{1}{2}b\pi=0$

（３）$g\cdot g=\int\int_{R^2}(ax+by)^2e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int\int_{R^2}(a^2x^2+b^2y^2+2abxy)e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\frac{1}{2}a^2\pi+\frac{1}{2}b^2\pi=1.$

$\begin{cases} a+b=0 \\ a^2+b^2=\frac{2}{\pi} \end{cases}$ $,a=\pm\sqrt{\frac{1}{\pi}},b=\mp\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

（１１）重積分$\frac{xy}{5-x^2-y^2},D;x+y\geq 1,x^2+y^2\leq 1$ **を求めよ。**

（解）$\int\int_D\frac{xy}{5-x^2-y^2}dxdy=\int_0^1(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{xy}{5-x^2-y^2}dy)dx=\int_0^1\frac{x}{2}(-\log 6+\log(4+2x))dx$

$=-\frac{\log 6}{4}+[\frac{x^2}{4}\log(4+2x)]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{4(x+2)}dx=-(\log 3-\log 2-\frac{3}{8})$

$\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{xy}{5-x^2-y^2}dy=-\frac{x}{2}[\log(5-x^2-y^2)]_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{2}(\log(5-x^2-(\sqrt{1-x^2})^2)-\log(5-x^2-(1-x)^2))$

$=-\frac{x}{2}(\log 6-\log(4+2x))$

$\int_0^1\frac{x^2}{4(x+2)}dx=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2+\frac{4}{x+2})dx=\log 3-\log 2-\frac{3}{8}$

（１２）複素数$a,b,(ab\neq 0,\frac{a}{b}\neq(\mathrm{real}))$ **について、関数**$f=f(x,y)$ **を**$f(x,y)=\frac{1}{(ax+by)^2}$ **と定義する。このときに、実数**$R(>0)$ **について、二つの逐次積分の差**$\int_{-R}^{R}(\int_{-R}^{R}f(x,y)dx)dy-\int_{-R}^{R}(\int_{-R}^{R}f(x,y)dy)dx$ **を求めよ。**

（解）$\int_{-R}^{R}f(x,y)dx=\int_{-R}^{R}\frac{1}{(ax+by)^2}dx=[-\frac{1}{a(ax+by)}]_{x=-R}^{x=R}=\frac{1}{a(-aR+by)}-\frac{1}{a(aR+by)}.$

$\int_{-R}^{R}(\int_{-R}^{R}f(x,y)dx)dy=\frac{1}{a}\int_{-R}^{R}(\frac{1}{(by-aR)}-\frac{1}{(by+aR)})dy=\frac{1}{ab}[\log(by-aR)-\log(by+aR)]_{y=-R}^{y=R}$

$=\frac{1}{ab}(\log R(b-a)-\log R(b+a)-\log R(-b-a)+\log R(-b+a))$

$=\frac{1}{ab}(\log\frac{(b-a)}{(b+a)}-\log\frac{(b+a)}{(b-a)})$

$\int_{-R}^{R}f(x,y)dy=\int_{-R}^{R}\frac{1}{(ax+by)^2}dy=[-\frac{1}{b(ax+by)}]_{y=-R}^{y=R}=\frac{1}{b(ax-bR)}-\frac{1}{b(ax+bR)}$

$\int_{-R}^{R}(\int_{-R}^{R}f(x,y)dy)dx=\frac{1}{b}\int_{-R}^{R}(\frac{1}{(ax-bR)}-\frac{1}{(ax+bR)})dx=\frac{1}{ab}[\log(ax-bR)-\log(ax+bR)]_{x=-R}^{x=R}$

$=\frac{1}{ab}(\log R(a-b)-\log R(a+b)-\log R(-a-b)+\log R(-a+b))$

$=\frac{1}{ab}(\log\frac{(a-b)}{(a+b)}-\log\frac{(a+b)}{(a-b)})$

（１３）$xy,V;x,y,z\geq 0,x+y+z\leq 1$

（解）$\int_V xydxdydz=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(xy)dzdydx=-\int_0^1\int_0^{1-x}xy\left(x+y-1\right)dydx=-\int_0^1\frac{1}{6}x\left(x-1\right)^3dx=\frac{1}{120}$

$\int_0^{1-x}xy\left(x+y-1\right)dy=\frac{1}{6}x\left(x-1\right)^3$

$\int_0^1\frac{1}{6}x\left(x-1\right)^3dx=-\frac{1}{120}$

（１４）$\frac{y}{(1+y^2)(1+xy)^2},(i)D_1;0<x<y,y<1(ii)D_2;0<x<y,xy<1$

（解）(i)$\int\int_{D_1}\frac{y}{(1+y^2)(1+xy)^2}dxdy=\int_0^1(\int_0^y\frac{y}{(1+y^2)(1+xy)^2}dx)dy=\int_0^1\frac{1}{(1+y^2)}(\int_0^y\frac{y}{(1+xy)^2}dx)dy=\int_0^1\frac{y^2}{(1+y^2)^2}dy$

ここで、$y=\tan u$ として、$1+y^2=1+\tan^2 u=\frac{1}{\cos^2 u}, dy=\frac{1}{\cos^2 u}du$ から、$\int_0^1 \frac{y^2}{(1+y^2)^2}dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 u\cos^4 u\frac{1}{\cos^2 u}du=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 udu=\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{4}$

(ii)$D_2=D_1\cup D, D; 0<x<\frac{1}{y}, 1<y.$

$\int\int_{D_2} \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)^2}dxdy=\int\int_{D_1} \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)^2}dxdy+\int\int_D \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)^2}dxdy$

$\int\int_D \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)^2}dxdy=\int_1^{\infty}(\int_0^{\frac{1}{y}} \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)^2}dx)dy=\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)}(\int_0^{\frac{1}{y}} \frac{y}{(1+xy)^2}dx)dy=\frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)}dy=\frac{1}{2}[\tan^{-1} y]_1^{\infty}=\frac{\pi}{8}$

よって、$\int\int_{D_2} \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)^2}dxdy=\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pi=\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{4}$

（１５）$ye^{x^3}, D: 0<x<2, 0<y<2, y<x$

（解）$\int\int_D ye^{x^3}dxdy = \int_0^2(\int_0^x ye^{x^3}dy)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2e^{x^3}dx \overset{x^3=t,3x^2dx=dt}{=} \frac{1}{6}\int_0^8 e^t dt=\frac{1}{6}e^8$

（１６）等式$\int_0^z(\int_0^x e^{-y^2}dy)dx = \int_0^z G(y,z)dy, G(y,y)=0$ **が成り立つような関数**$G(y,z)$ **を求めよ。**

（解）$\int_0^z(\int_0^x e^{-y^2}dy)dx=\int\int_D e^{-y^2}dxdy=\int_0^z(\int_y^z e^{-y^2}dx)dy=\int_0^z e^{-y^2}(z-y)dy$ から、$G(y,z)=e^{-y^2}(z-y)$. このときに、関数 $G(y,z)=e^{-y^2}(z-y)$ は条件 $G(y,y)=0$ を満たす。

1.3.2 重積分の計算（２）座標変換 I（極座標と球面座標）

（１）$D(a); 0\le x^2+y^2\le a^2, 1<a,$ **として、**$D(a)$ **上の**$\log\sqrt{x^2+y^2}$ **の積分の値が**$\frac{\pi}{2}$ **になるような**a **を求めよ。**

（解）$\int\int_{D(a)} \log\sqrt{x^2+y^2}dxdy \overset{極座標}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r\log rdrd\theta = 2\pi(\frac{a^2\log a}{2}-\frac{a^2}{4})$

$\to\to\to 2\pi(\frac{a^2\log a}{2}-\frac{a^2}{4})=\frac{\pi}{2}\to\frac{a^2\log a}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{1}{4}\to 2a^2\log a-a^2-1=0$

$(\int_0^a r\log rdr=[\frac{r^2\log r}{2}]_0^a-\int_0^a \frac{r}{2}dr \overset{\lim_{r\to 0} r^2\log r=0}{=} \frac{a^2\log a}{2}-\frac{a^2}{4})$

（２）$\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}, D; (x^2+y^2)^2\le x^2-y^2, x>0$

（解）極座標では、$D; r^4\le r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\to D'; r^2\le\cos 2\theta, -\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$\to\int\int_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r}{(1+r^2)^2}drd\theta \overset{r^2=t}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[-\frac{(1+r^2)^{-1}}{2}]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1-\frac{1}{1+\cos 2\theta})d\theta \overset{1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta}{=} \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1-\frac{1}{2\cos^2\theta})d\theta = \frac{1}{2}[\theta-\frac{1}{2}\tan\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-1)$

（３）$x^n y, D; (x-a)^2+y^2\le a^2, 0\le y,$ **(**$a>0, n;$ **自然数)**

（解）極座標で $D; (x-a)^2+y^2\le a^2, 0\le y\Longrightarrow D'; r\le 2a\cos\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$\to\int\int_D x^n ydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta}(r\cos\theta)^n r^2\sin\theta drd\theta=\frac{(2a)^{n+3}}{n+3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+3}\theta\cos^n\theta\sin\theta d\theta=\frac{(2a)^{n+3}}{n+3}\frac{1}{2n+4}$

（４）$|3x|, D; \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\le 1$

（解）$2\int\int_D 3xdxdy \overset{x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta}{=} 24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 a^2br^2\cos\theta drd\theta=24a^2b\cdot\frac{1}{3}=8a^2b$

（5）$I_k(R)=\frac{1}{(x^2+y^2)^k}, D_R; x^2+y^2\le R^2, \lim_{R\to\infty} I_k(R)$。

（解）極座標で。$I_k(R)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R \frac{1}{r^{2k}}rdrd\theta=\begin{cases} 2\pi[\frac{r^{2-2k}}{2-2k}]_0^R=\frac{\pi R^{2-2k}}{1-k}(k\ne 1) \\ 2\pi[\log r]_0^R=\infty \end{cases}$.

$\lim_{R\to\infty} I_k(R)=\lim_{R\to\infty}\frac{\pi R^{2-2k}}{1-k}=\begin{cases}\infty, 1>k \\ 0, 1<k\end{cases}$.

(6)$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, D=\{0\le x\le y\le 1\}$

（解）極座標で。$D=\{0\le x\le y\le 1\}\Longrightarrow \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le\frac{1}{\sin\theta}$

$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{1}{r}rdrd\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\frac{1}{2}\log\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}$

$(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta \overset{\cos\theta=t,-\sin\theta d\theta=dt}{=} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^0\frac{-1}{1-t^2}dt=$
$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t})dtdt$
$=\frac{1}{2}[\log(1+t)-\log(1-t)]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=$
$\frac{1}{2}\log\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2})$

（7）$\frac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}}, D; \frac{1}{2}\le x^2+y^2\le 1, y\ge x\ge 0$

（解）極座標で。$D; \frac{1}{2}\le x^2+y^2\le 1, y\ge x\ge 0\Longrightarrow\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\le r\le 1$

$\int\int_D\frac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{1+r^2}}rdrd\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}(2-\sqrt{3})\log 2$

$(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}rdr\overset{r^2=t,2rdr=dt}{=}\frac{\sqrt{2}}{2}(2-\sqrt{3}), \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta\overset{\sin\theta=s.\cos\theta d\theta=ds}{=}\frac{1}{2}\log 2)$

（類題）$xy, D; x^2+y^2\le a^2, y\ge x\ge 0$

（解）$D; x^2+y^2\le a^2, y\ge x\ge 0\Longrightarrow\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, r\le a$

$\int\int_D xydxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta=\frac{a^4}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta=\frac{a^4}{16}$

(8)$\frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}D; x^2+y^2\le 1$

（解）極座標で。$D; x^2+y^2\le 1\Longrightarrow 0\le\theta\le 2\pi, 0<r\le 1$

$\int\int_D\frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{2\log r}{\sqrt{r}}rdrd\theta=2\pi(-\frac{8}{9})=-\frac{16}{9}\pi$

$(2\int_0^1\sqrt{r}\log rdr\overset{\sqrt{r}=t,dr=2tdt}{=}4\int_0^1 t^2\log t^2dt=8\int_0^1 t^2\log tdt=8\{[\frac{t^3}{3}\log t]_0^1-$
$\int_0^1\frac{t^2}{3}dt\}=-\frac{8}{9})$

(9)$\frac{1}{t}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}), -\infty<x,y<\infty$

（解）$\int\int_{R^2}\frac{1}{t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}dxdy\overset{x=2\sqrt{t}X,y=2\sqrt{t}Y}{=}4\int\int_{R^2}\frac{1}{t}e^{-(X^2+Y^2)}tdXdY=$
$4\int\int_{R^2}e^{-(X^2+Y^2)}dXdY$

$\overset{極座標}{=}16\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r^2}rd\theta dr=4\pi$ （$\int_0^\infty e^{-r^2}rdr\overset{r^2=t,2rdr=dt}{=}\frac{1}{2}$）

(10)$(x^{2n}+2y^{2n}+1)e^{(x^2+y^2)}, D=\{x^2+y^2\le 1\}$

（解）極座標で。$D; x^2+y^2\le 1\Longrightarrow 0\le\theta\le 2\pi, 0<r\le 1$

$\int\int_D(x^{2n}+2y^{2n}+1)e^{(x^2+y^2)}dydx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1((r\cos\theta)^{2n}+2(r\sin\theta)^{2n}+$
$1)e^{r^2}rdrd\theta$

$\int_0^1\{(r^{2n}(\cos^{2n}\theta+2\sin^{2n}\theta)+1\}e^{r^2}rdr=\int_0^1 e^{r^2}rdr+\int_0^1 r^{2n}e^{r^2}rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2n}\theta+$
$2\sin^{2n}\theta)d\theta$

$=K+K_n.K_n=I_n\cdot J_n$

$K=\int_0^1 e^{r^2}rdr=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$

$I_n=\int_0^1 r^{2n}e^{r^2}rdr \overset{r^2=t,2rdr=dt}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 t^n e^t dt$

$I'_n=\int_0^1 t^n e^t dt=[t^n e^t]_0^1-n\int_0^1 t^{n-1}e^t dt$

$=e-nI'_{n-1}=e-n(e-(n-1)I'_{n-2})$

$=e-ne+n(n-1)I'_{n-2}=e-ne+n(n-1)(e-(n-2)I'_{n-3})$

$=e-ne+n(n-1)e-n(n-1)(n-2)I'_{n-3}$

$=...$

$=e-ne+n(n-1)e-n(n-1)(n-2)e+...+(-1)^{n-1}n(n-1)...\cdot 2\cdot e+(-1)^n n(n-1)...\cdot 2\cdot 1\cdot I'_0$

$=e-ne+n(n-1)e-n(n-1)(n-2)e+...+(-1)^{n-1}n(n-1)...\cdot 2\cdot e+(-1)^n n(n-1)...\cdot 2\cdot 1\cdot(e-1)$

$=en!\{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2}+(-1)^n\}+(-1)^{n+1}n!$

$\to\to\to\ I_n=\frac{en!}{2}(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2!}+(-1)^n\frac{1}{1!}+(-1)^{n+1}n!)$

$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2n}\theta+2\sin^{2n}\theta)d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta$

$J'_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\sin^{2n-1}\theta d\theta=[-\cos\theta\sin^{2n-1}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}+(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^{2n-2}\theta d\theta$

$=(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}\theta(1-\sin^2\theta)d\theta=(2n-1)J'_{n-1}-(2n-1)J'_n$

$\to J'_n=\frac{(2n-1)}{2n}J'_{n-1}=\frac{(2n-1)}{2n}\frac{(2n-3)}{2(n-1)}J'_{n-2}=\frac{(2n-1)}{2n}\frac{(2n-3)}{2(n-1)}\frac{(2n-5)}{2(n-2)}J'_{n-3}=...=\frac{(2n-1)}{2n}\frac{(2n-3)}{2(n-1)}\frac{(2n-5)}{2(n-2)}\cdot...\cdot\frac{3}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{2\cdot 1}J'_0$

$=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot...\cdot 3\cdot 1}{2^n n!}\frac{\pi}{2}$

$\to\to\to J_n=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot...\cdot 3\cdot 1}{2^n n!}\cdot\frac{3\pi}{2}$

$\to\to\to K_n=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot...\cdot 3\cdot 1}{2^n}\cdot(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2!}+(-1)^n\frac{1}{1!}+(-1)^{n+1}n!)\cdot\frac{3\pi e}{4}$

(11) $\sin^{-1}\frac{2xy}{x^2+y^2}, D; 0\le x, 0\le y, 0\le x+y\le\frac{\pi}{2}$

（解）極座標 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 。$D; 0\le x, 0\le y, x+y\le\frac{\pi}{2}\to D'; 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0<r\le\frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$

$\sin^{-1}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\sin^{-1}\frac{2r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2}=\sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)=\sin^{-1}(\sin 2\theta)=2\theta$

$\to\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}}2\theta rdrd\theta=(\frac{\pi}{2\sqrt{2}})^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta}{\sin^2(\theta+\frac{\pi}{4})}d\theta=\frac{\pi^2}{8}\{[-\theta\cot(\theta+\frac{\pi}{4})]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot(\theta+\frac{\pi}{4})d\theta\}$

$=\frac{\pi^2}{8}(\frac{\pi}{2}+[\log|\sin(\theta+\frac{\pi}{4})|]_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{\pi^3}{16}$

(12) $xy, V=\{x^2+y^2+z^2\le R^2, 0\le x, 0\le y, 0\le z\}$

（解）変数変換 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{cases}, J=r^2\sin\theta$

$V=\{x^2+y^2+z^2\le R^2, 0\le x, 0\le y, 0\le z\} \Longleftrightarrow V'=\{0<r\le R, 0\le \theta\le \frac{\pi}{2}, 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}\}$

$\to \int\int\int_V xdxdy = \int\int\int_{V'} r^2\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^4\sin^3\theta\cos\phi\sin\phi drd\theta d\phi$

$=\frac{R^5}{15}$ （$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=\frac{2}{3}, \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\sin\phi d\phi=\frac{1}{2}$）

（１３）$V; x^2+y^2+z^2\le a^2 (a>1)$ **における次の関数の３重積分を計算せよ。**

(i)$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (ii)$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}$ (iii)z^n **（n は自然数）**

（解）球面座標$\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\phi \end{cases}$, $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\phi\le\pi \\ 0\le r\le a \end{cases}$ に変数変換をする。このときに、$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & 0 \\ r\cos\theta\cos\phi & r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\phi \end{vmatrix}=-r^2\sin\phi$

だから、(i)$\int\int\int_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz = 8\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\phi d\theta d\phi dr = 2\pi a^2$

(ii)$\int\int\int_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}dxdydz = 8\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2\sin\phi}{\sqrt{r^2-2r\cos\phi+1}}d\theta d\phi dr$

$=8\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}}[r\sqrt{r^2-2r\cos\phi+1}]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}}d\theta dr = 8\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\sqrt{r^2+1}-r\sqrt{(r-1)^2})d\theta dr$

$=4\pi\{[\frac{1}{3}\sqrt{r^2+1}^3]_0^a-([\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}]_0^1+[\frac{r^3}{3}-\frac{r^2}{2}]_1^a)=4\pi(\frac{1}{3}\sqrt{a^2+1}^3-\frac{a^2(2a-3)}{6}-\frac{1}{3})$

(iii)n が奇数のときは、積分の値は 0. 以下 $n=2m$ とする。

$\int\int\int_V z^{2m}dxdydz = 8\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2m+2}\cos^{2m}\phi\sin\phi d\theta d\phi dr = 4\pi[\frac{r^{2m+3}}{2m+3}]_0^a[-\frac{\cos^{2m+1}\phi}{2m+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi a^{2m+3}}{(2m+1)(2m+3)}$

（１４）$xw, V=\{(x,y,z,w); x^2+y^2+z^2+w^2\le 1, 0\le x, 0\le y, 0\le z, 0\le w\le 1\}$

（解）$I=\int_0^1 w(\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le 1-w^2, 0\le x, 0\le y, 0\le z} xdxdydz)dw$,

$J=\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le 1-w^2, 0\le x, 0\le y, 0\le z} xdxdydz$, $\begin{cases} x=r\sin u\cos v \\ y=r\sin u\sin v \\ z=r\cos u \end{cases}$, $\begin{cases} 0\le u\le\frac{\pi}{2}, \\ 0\le v\le\frac{\pi}{2}, \\ 0\le r\le\sqrt{1-w^2}) \end{cases}$

$|J\left(\frac{x,y,z}{r,u,v}\right)|=r^2\sin u$

$\to J=\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le 1-w^2, 0\le x, 0\le y, 0\le z} xdxdydz = \int_0^{\sqrt{1-w^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\sin u\cos v\cdot r^2\sin u)dudv$

$=\frac{1}{4}\pi[\frac{r^4}{4}]_0^{\sqrt{1-w^2}}=\frac{\pi}{16}(1-w^2)^2$

$\to I=\frac{\pi}{16}\int_0^1 w(1-w^2)^2dw=\frac{1}{96}\pi$

（１５）$z^2, V; x^2+y^2+z^2\le 2z$

（解）$V; x^2+y^2+(z-1)^2\le 1 \to \begin{cases} x=X \\ y=Y \\ z-1=Z \end{cases}$

$\to (Z+1)^2, V'; X^2+Y^2+Z^2\le 1$

球面座標 $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$ $,(0 < r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi)$ に

変数変換する。$J = \frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & 0 \\ r\cos\theta\cos\phi & r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\phi \end{vmatrix} =$

$-r^2\sin\phi \to dXdYdZ = r^2\sin\phi drd\theta d\phi.$

$8\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\phi+1)^2r^2\sin\phi d\theta d\phi dr = \frac{13}{5}\pi$

（１６）$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, D; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x^2+y^2 \ge 1$

(解) 極座標で計算する。$I = \int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 2\int\int_{D'=D\cap(y<x)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

$D'; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x^2+y^2 \ge 1 \to 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 1 \le r \le \frac{1}{\cos\theta}$

$\to I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}drd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta \overset{\sin\theta=t,\cos\theta d\theta=dt}{=}$

$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t})dt$

$= [\log\frac{1+t}{1-t}]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\log(\sqrt{2}+1)$

（１７）(i)$f(x,y) = \begin{cases} 2xy\cos\frac{y^2}{x}, x \ne 0, y(\text{real}) \\ 0, x = 0, y(\text{real}) \end{cases}$ **の**$D = \{(x,y); 0 \le y \le \pi, y \le x \le \pi\}$ **上の二重積分を求めよ。**

(ii)$\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}, V = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

(解) (i)$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^\pi(\int_0^x 2xy\cos\frac{y^2}{x}dy)dx = \int_0^\pi[x^2\sin\frac{y^2}{x}]_{y=0}^{y=x}dx =$
$\int_0^\pi x^2\sin xdx = \pi^2-4$

(ii) 球面座標 $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$ $,(0 < r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi)$

に変数変換する。$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & 0 \\ r\cos\theta\cos\phi & r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\phi \end{vmatrix} =$

$-r^2\sin\phi \to dxdydz = r^2\sin\phi drd\theta d\phi.$

$\int_V \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}dxdydz = 8\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2\sin\phi}{\sqrt{1-r^2}}d\theta d\phi dr = 8\frac{\pi}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi)(\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}dr) =$
$\pi^2.$

計算;$\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}dr \underset{r=\sin s, dr=\cos sds}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 s}{\cos s}\cos sds = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 sds = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2s}{2}ds =$
$\frac{1}{4}\pi.$

（１８）． $D; x^2+y^2 \le a^2, y \ge 0, x \ge 0$ **として、以下に答えよ。**

(1)$\int\int_D f(x)dxdy = \int\int_D f(y)dxdy = \frac{1}{2}\{\int\int_D f(x)dxdy + \int\int_D f(y)dxdy\}$ **を示せ。**

(2)$\int\int_D x^4 dxdy$ **を求めよ。**

(3)$\int\int_D x^6 dxdy$ **を求めよ。**

（解）（１）$I = \int\int_D f(x)dxdy \overset{極座標}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a f(r\cos\theta)rdrd\theta$

$\overset{\theta=\frac{\pi}{2}-\phi}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^a f(r\cos(\frac{\pi}{2}-\phi))rdr(-d\phi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a f(r\sin\phi)rdrd\phi \overset{\text{直交座標}}{=} \int\int_D f(y)dxdy = J$

$\to I = J = \frac{1}{2}(I+J)$

（2）$I_1 = \int\int_D x^4dxdy = \frac{1}{2}\{\int\int_D x^4dxdy + \int\int_D y^4dxdy\} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a(\cos^4\theta + \sin^4\theta)r^5drd\theta$

$= \frac{a^6}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3+\cos 4\theta}{4})d\theta = \frac{1}{32}\pi a^6$

$(\cos^4\theta + \sin^4\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta = 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2} = 1 - \frac{1-\cos 4\theta}{4} = \frac{3+\cos 4\theta}{4})$

$I_2 = \int\int_D x^6dxdy = \frac{1}{2}\{\int\int_D x^6dxdy + \int\int_D y^6dxdy\} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a(\cos^6\theta + \sin^6\theta)r^7drd\theta$

$= \frac{a^8}{64}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+3\cos 4\theta}{4})d\theta = \frac{1}{512}\pi a^8$

$(\cos^6\theta + \sin^6\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^4\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) = \cos^4\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 3\cos^2\theta\sin^2\theta = 1 - \frac{3\sin^2 2\theta}{4} = 1 - \frac{3(1-\cos 4\theta)}{4} = \frac{1+3\cos 4\theta}{4})$

（１９）定数$a(>0)$**に対して積分**$(i)\int\int_{R^2}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^a}dxdy\,(ii)\int\int_{R^2}\frac{1}{(1+x^4+y^4)^a}dxdy$ **の収束・発散について調べよ。**

（解）極座標$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$,$(0 < r, 0 \le \theta \le 2\pi)$で計算すると、$|J| = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}| = r.$

$(i)\int\int_{R^2}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^a}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty\frac{r}{(1+r^2)^a}drd\theta = \frac{\pi}{1-a}[(1+r^2)^{1-a}]_{r=0}^{r=\infty} = \begin{cases} \infty, 1-a \ge 0 \\ \frac{\pi}{1-a}, 1-a < 0 \end{cases}$

$(ii)x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = r^4 - 2r^4\cos^2\theta\sin^2\theta = r^4 - \frac{1}{2}r^4\sin^2 2\theta, \frac{3}{2}r^4 \ge x^4+y^4 \ge \frac{1}{2}r^4.$

$\frac{1}{(1+\frac{3}{2}r^4)^a} \le \frac{1}{(1+x^4+y^4)^a} \le \frac{1}{(1+\frac{1}{2}r^4)^a}. \int_0^{2\pi}\int_0^\infty\frac{r}{(1+\frac{3}{2}r^4)^a}drd\theta \le \int\int_{R^2}\frac{1}{(1+x^4+y^4)^a}dxdy \le \int_0^{2\pi}\int_0^\infty\frac{r}{(1+\frac{1}{2}r^4)^a}drd\theta$

$\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\frac{r}{(1+\frac{1}{2}r^4)^a}drd\theta = 2\pi\int_0^\infty\frac{1}{2(1+\frac{1}{2}s^2)^a}ds = 2^a\pi\int_0^\infty\frac{1}{(2+s^2)^a}ds, \int^\infty\frac{1}{(2+s^2)^a}ds < \int^\infty\frac{1}{s^{2a}}ds < \infty, if\quad 1-2a < 0$

$\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\frac{r}{(1+\frac{3}{2}r^4)^a}drd\theta = 2\pi\int_0^\infty\frac{1}{2(1+\frac{3}{2}s^2)^a}ds = 2^a\pi\int_0^\infty\frac{1}{(2+3s^2)^a}ds = \frac{2^a\pi}{\sqrt{3}}\int_0^\infty\frac{1}{(2+t^2)^a}dt, \int^\infty\frac{1}{(2+t^2)^a}dt = \infty, if\quad 1-2a \ge 0$

（２０）広義積分$\int_0^\infty f(t)dt$**が収束するときに、**$\int_{R^2}f(a^2x^2+b^2y^2)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(t)dt$ **であることを示せ。**

（解）$\int_{R^2}f(a^2x^2+b^2y^2)dxdy \overset{ax=\xi,by=\eta}{=} \frac{1}{ab}\int_{R^2}f(\xi^2+\eta^2)d\xi d\eta = \frac{1}{ab}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}f(r^2)rdrd\theta = \frac{2\pi}{ab}\int_0^\infty f(r^2)rdr = \frac{2\pi}{ab}\int_0^\infty f(s)\frac{ds}{2}$

$= \frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(t)dt$

（注意）$\int_0^\infty f(t)\sqrt{t}dt$が収束するとき、$\int_{R^3}f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)dxdydz = \frac{\pi}{4abc}\int_0^\infty f(t)\sqrt{t}dt$

（２１）定数$a, b(a>0, b>0)$ **について、**

(I) 広義積分$\int_0^\infty \frac{r^{2a}}{1+r^{2b}}dr$ **が収束する条件を求めよ。**

(II) 広義積分$\int\int_D \frac{x^{2a}+y^{2a}}{1+x^{2b}+y^{2b}}dxdy$ **が収束する条件を求めよ。但し、**$D = \{(x,y); x>0, y>0\}$**。**

(解) (I)$0<\int_0 \frac{r^{2a}}{1+r^{2b}}dr < \int_0 r^{2a}dr < \infty, (a>0)$.

$\int^\infty \frac{r^{2a}}{1+r^{2b}}dr < \int^\infty r^{2a-2b}dr < \infty, 2a-2b+1<0$.

(II) 極座標$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ に変換して、$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r, \int\int_{D_R} \frac{x^{2a}+y^{2a}}{1+x^{2b}+y^{2b}}dxdy = \int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^{2a+1}(\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta)}{1+r^{2b}(\cos^{2b}\theta+\sin^{2b}\theta)}d\theta dr$.

$D_R = \{(x,y)\in D; x^2+y^2 \le R^2\}$.

ここで、$x^{2k}+y^{2k} = (r\cos\theta)^{2k}+(r\sin\theta)^{2k} = r^{2k}(\cos^{2k}\theta+\sin^{2k}\theta)$

$= r^{2k}((\cos^2\theta)^k+(\sin^2\theta)^k) = r^{2k}((\cos^2\theta)^k+(1-\cos^2\theta)^k) = r^{2k}(t^k+(1-t)^k)$.

いま。関数 $g(t) = t^k+(1-t)^k, (0\le t\le 1)$ の増減を調べる。

$g'(t) = kt^{k-1}-k(1-t)^{k-1} = k\{t^{k-1}-(1-t)^{k-1}\} = 0, t^{k-1} = (1-t)^{k-1}, t = \frac{1}{2}$

$(i)k>1; \overset{0<t<\frac{1}{2}}{g'(t)}<0, g'(\frac{1}{2}) = 0, \overset{\frac{1}{2}<t<1}{g'(t)}>0, g(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^k = 2^{1-k}$ が最小で、$g(0)=g(1)=1$ が最大、$2^{1-k}\le g(t)\le 1$

$(ii)0<k<1; \overset{0<t<\frac{1}{2}}{g'(t)}>0, g'(\frac{1}{2}) = 0, \overset{\frac{1}{2}<t<1}{g'(t)}<0, g(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^k = 2^{1-k}$ が最大で、$g(0)=g(1)=1$ が最小、$1\le g(t)\le 2^{1-k}$

$(iii)k=1; g(t)=1$.

故に、(i)$a>1, b>1; \frac{2^{1-k}r^{2a+1}}{1+r^{2b}} \le \frac{r^{2a+1}(\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta)}{1+r^{2b}(\cos^{2b}\theta+\sin^{2b}\theta)} \le \frac{r^{2a+1}}{1+2^{1-k}r^{2b}}$.

（ｉｉ）$a>1, 1>b>0; \frac{2^{1-k}r^{2a+1}}{1+2^{1-k}r^{2b}} \le \frac{r^{2a+1}(\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta)}{1+r^{2b}(\cos^{2b}\theta+\sin^{2b}\theta)} \le \frac{r^{2a+1}}{1+r^{2b}}$

(iii)$1>a>0, 1>b>0; \frac{r^{2a+1}}{1+2^{1-k}r^{2b}} \le \frac{r^{2a+1}(\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta)}{1+r^{2b}(\cos^{2b}\theta+\sin^{2b}\theta)} \le \frac{2^{1-k}r^{2a+1}}{1+r^{2b}}$.

このときに、広義積分 $\lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^{2a+1}(\cos^{2a}\theta+\sin^{2a}\theta)}{1+r^{2b}(\cos^{2b}\theta+\sin^{2b}\theta)}d\theta dr$ の収束は何れの場合も (I) から、$2a+1-2b+1<0, a+1<b$.

（２２）$\begin{cases} u(x,y) = xy^2 \\ v(x,y) = x+y \end{cases}$ **として、積分**$\int\int_K(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})dxdy$ **の値を求めよ。**$K; \frac{x^2}{4}+y^2\le a^2$

(解) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = y^2+1$. 変数変換$\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を行って、$K; \frac{x^2}{4}+y^2 \le a^2 \to K'; \frac{(2r\cos\theta)^2}{4}+(r\sin\theta)^2 \le a^2, 0\le r\le a, 0<\theta<2\pi. J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & \sin\theta \\ -2r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r$.

故に、$\int\int_K(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^a(r^2\sin^2\theta+1)2rdrd\theta = 2\int_0^{2\pi}(\frac{a^4}{4}\sin^2\theta+a)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(a^4(1-\cos 2\theta)+8a)d\theta$

$= \frac{\pi}{2}(a^4+8a)$

（２３）領域$D=\{(x,y);x^2+y^2>1\}$**について、重積分**$\int\int_D \frac{x^2}{(x^2+y^2)^k}dxdy, \int\int_D \frac{x^2\log\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^k}dxdy$ **を計算せよ。但し、**$k>2$**。**

（解）極座標$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$で計算する。

(i)$\int\int_D \frac{x^2}{(x^2+y^2)^k}dxdy=\int_1^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r^3\cos^2\theta}{r^{2k}}d\theta dr=(\int_1^\infty r^{3-2k}dr)(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta)=\frac{\pi}{2k-4}$.

計算;$(\int_1^\infty r^{3-2k}dr)=[\frac{1}{4-2k}r^{4-2k}]_1^\infty=\frac{1}{2k-4}$. $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$ $=\pi$

(ii)$\int\int_D \frac{x^2\log\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^k}dxdy=\int_1^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r^3\log r\cos^2\theta}{r^{2k}}d\theta dr=(\int_1^\infty\frac{r^3\log r}{r^{2k}}dr)(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta)=\frac{\pi}{(4-2k)^2}$

計算;$\int_1^\infty\frac{r^3\log r}{r^{2k}}dr=\int_1^\infty r^{3-2k}\log r dr=[\frac{1}{4-2k}r^{4-2k}\log r]_1^\infty-\frac{1}{4-2k}\int_1^\infty r^{3-2k}dr=-[\frac{1}{(4-2k)^2}r^{4-2k}]_1^\infty=\frac{1}{(4-2k)^2}$

（２４）**(i)** $D=\{(x,y);0<x<1,0<y<1\}$ **として、**D **内で連続的微分可能な関数**$f=f(x,y)$ **が**$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=1$ **及び条件**$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ **を満たすとする。関数**$f=f(x,y)$ **を求めよ。**

（解） $\frac{\partial f}{\partial x}=1$ から、$f=x+g(y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=1$ から、$f=y+h(x)$. よって、$f=(x+y)+C, C(const.)$. ここで、条件 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ から、$C=0$.

(ii) 実数a **について**$f_a(x,y)=(x^2+y^2)^a\log(x^2+y^2), ((x,y)\neq(0,0))$ **とする。広義積分**$\int\int_{x^2+y^2<1}f_a(x,y)dxdy=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\int_{\varepsilon^2<x^2+y^2<1}f_a(x,y)dxdy$ **が存在する**a **の範囲を求めよ。**

（解）極座標に変換して、$I(\varepsilon)\int\int_{\varepsilon^2<x^2+y^2<1}f_a(x,y)dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\varepsilon^1 r^{2a+1}\log r^2 drd\theta=4\pi\int_\varepsilon^1 r^{2a+1}\log r dr=4\pi\{[\frac{r^{2a+2}}{2a+2}\log r]_\varepsilon^1-\frac{1}{2a+2}\int_\varepsilon^1 r^{2a+1}dr\}$

$=4\pi\{-\frac{\varepsilon^{2a+2}}{2a+2}\log\varepsilon-\frac{1}{(2a+2)^2}(1-\varepsilon^{2a+2})\}=4\pi\{\frac{1}{(2a+2)^2}\varepsilon^{2a+2}(1-(2a+2)\log\varepsilon)-\frac{1}{(2a+2)^2}\}$.

ここで、極限値 $\lim_{\varepsilon\to 0}I(\varepsilon)$ が収束する為には、$2a+2>0$ であれば良い。

（２５）$(x\sin a-y\cos a)^2, D; x^2+y^2\leq 1$ **の値を求めよ。**

（解）極座標で計算する。$\int_0^{2\pi}\int_0^1(r\cos\theta\sin a-r\sin\theta\cos a)^2 rdrd\theta=(\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta-a)d\theta)(\int_0^1 r^3dr)=\frac{\pi}{4}$.

計算；$\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta-a)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2(\theta-a)}{2}d\theta=\frac{1}{2}[\theta-\frac{\sin 2(\theta-a)}{2}]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=\frac{1}{2}[2\pi-(\frac{\sin 2(2\pi-a)}{2}-\frac{\sin 2(0-a)}{2})]=\pi$

（２６）$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, D; 0<x<y<1$ **を計算せよ。**

（解）極座標で計算する。$\int\int_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{1}{r}rdrd\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-t^2}\,dt$

$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{(1-t)(1+t)}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{1}{(1-t)}+\frac{1}{(1+t)})dt=\frac{1}{2}[\log\frac{1+t}{1-t}]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\log\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}$

（２７）$f'(x^2+y^2), D; x^2+y^2\leq a^2$

(解) $\int\int_D f'(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^a f'(r^2)rdrd\theta = \pi[f(r^2)]_0^a = \pi(f(a^2)-f(0))$

(２８) $x, D; x>0, y>0, 0<\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{\pi}{2}, \frac{y}{x}\le\tan\sqrt{x^2+y^2}$

(解) $D; x>0, y>0, 0<\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{\pi}{2}, \frac{y}{x}\le\tan\sqrt{x^2+y^2}\to D'; 0<\theta<\frac{\pi}{2}, 0<r\le\frac{\pi}{2}, \tan\theta\le\tan r\Longrightarrow\theta\le r$

$\int\int_D xdxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\theta drd\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2})^3-\theta^3)\cos\theta d\theta = \frac{1}{3}((\frac{\pi}{2})^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^3\cos\theta d\theta)$

$= \frac{1}{3}((\frac{\pi}{2})^3-(\frac{1}{8}\pi^3-3\pi+6)) = \pi-2$

(２９) $x^2e^{-\sqrt{x^2+y^2}}, D=R^2$

(解) $\int\int_D x^2e^{-\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 4\lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3e^{-r}\cos^2\theta drd\theta = \pi\lim_{R\to\infty}(6-6Re^{-R}-3R^2e^{-R}-R^3e^{-R}-6e^{-R}) = 6\pi.$

$\int_0^R r^3e^{-r}dr = 6-6Re^{-R}-3R^2e^{-R}-R^3e^{-R}-6e^{-R}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4}\pi$

(３０) $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)}, D; 1<x^2+y^2\le 3, x^2-y^2\le 0, y>0$

(解) $D\to D'; \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}, 1<r\le\sqrt{3}. \int\int_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)}dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{r}{r(1+r^2)}drd\theta = \frac{\pi}{2}[\tan^{-1}r]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$

$= \frac{\pi^2}{24}$

(３１) 関数$f(x,y)=x^2+y^2-x-y$について以下に答えよ。

(i) 関数$f(x,y)$の極値を求めよ。

(ii) 関数$f(x,y)$の$D=\{(x,y); x^2+y^2\le 1\}$上の積分を求めよ。

(iii) 関数$f(x,y)$の閉領域$E=\{(x,y); x^2+y^2+xy\le 1\}$での最大・最小を求めよ。

(解) (i)$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2x-1=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y-1=0\end{cases}$ $x=y=\frac{1}{2}.$ $\begin{cases}A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2>0\\ C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0\end{cases}$ $, D=B^2-AC<0.$ 関数は $x=y=\frac{1}{2}$ で極小値 $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$

(ii)$\int\int_D(x^2+y^2-x-y)dxdy = \int_0^{2\pi}(\int_0^1(r^2-r\cos\theta-r\sin\theta)rdr)d\theta = \int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\sin\theta-\frac{1}{3}\cos\theta)d\theta = \frac{1}{2}\pi$

(iii) 最初に、(i) で極小値をとる点 $x=y=\frac{1}{2}$ は E に含まれることに注意する。

次に、最大・最小をとる点は、$x=y=\frac{1}{2}$ か又は境界 $x^2+y^2+xy=1$ 上であることに注意する。

二次形式 x^2+y^2+xy を、ベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と行列 $A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$ を用いて $x^2+y^2+xy=\vec{x}^tA\vec{x}$ で表す。行列 $A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$ を固有値・単位固有ベクトルを求めて直交行列で対角化する。固有値・単位固有ベクトルは、$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow\frac{3}{2}$ だから、$T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, D=$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ として、$T^tAT = D$. ここで、変数変換 $\vec{x} = T\vec{X}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-X+Y}{\sqrt{2}} \\ \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ をおこなうと、二次形式は、$x^2 + y^2 + xy = \vec{x}^tA\vec{x} = (T\vec{X})^tAT\vec{X} = \vec{X}^tT^tAT\vec{X} = \vec{X}^tT^tAT\vec{X} = \vec{X}^tD\vec{X} = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}Y^2$ と変換される。更に、変数変換 $\begin{cases} X = \sqrt{2}u \\ Y = \sqrt{\frac{2}{3}}v \end{cases}$ をおこなえば、条件 $x^2 + y^2 + xy = 1$ は、条件 $u^2 + v^2 = 1$ となる。

また、関数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ は、$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y = X^2 + Y^2 - \frac{-X+Y}{\sqrt{2}} - \frac{X+Y}{\sqrt{2}} = X^2 + Y^2 - \sqrt{2}Y = 2u^2 + \frac{2}{3}v^2 - \sqrt{\frac{4}{3}}v$ に変換される。

条件 $u^2+v^2 = 1$ から、$\begin{cases} u = \cos s \\ v = \sin s \end{cases}$ として、$f(u, v) = 2u^2+\frac{2}{3}v^2-\sqrt{\frac{4}{3}}v = 2\cos^2 s + \frac{2}{3}\sin^2 s - \sqrt{\frac{4}{3}}\sin s$

$= -\frac{4}{3}(\sin^2 s-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin s)+2 = -\frac{4}{3}(\sin s-\frac{\sqrt{3}}{4})^2+\frac{9}{4}$ から、$\begin{cases} \text{最大値}\frac{9}{4}, (\sin s = \frac{\sqrt{3}}{4}) \\ \text{最小値}\frac{2-\sqrt{3}}{3}, (\sin s = -1) \end{cases}$.

以上の結果から、最大値 $\frac{9}{4}$, 最小値 $-\frac{1}{2}$

（３２）（i）広義積分$\int_0^\infty x^{2a}(\log(1 + x^2))^b dx$ **が収束する定数**a, b **の満たすべき条件を求めよ。**

（ii）広義積分$\int_0^\infty \int_0^\infty (x^2 + y^2)^a(\log(1+x^2+y^2))^b dxdy$ **が収束する定数**a, b **の満たすべき条件を求めよ。**

（解） (i) $\int^\infty x^{2a}(\log(1 + x^2))^b dx$,

$x^{2a}(\log(1 + x^2))^b = \left(\frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)^{\frac{l}{b}}}\right)^b x^{2a}(1 + x^2)^l = O(x^{2a+2l}), -1 > 2a + 2l, l > 0. a < -\frac{1}{2}...(*)$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)^l} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log s}{s^l} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{s}}{ls^{l-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{ls^l} = 0, (l > 0)$

$\int_0 x^{2a}(\log(1 + x^2))^b dx$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^m} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{(1+x^2)}}{mx^{m-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{mx^{m-1}(1+x^2)} = 0, m - 1 < 1, m < 2$

$\lim_{x\to 0} \frac{(\log(1+x^2))^b}{x^m} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\log(1+x^2)}{x^{\frac{m}{b}}}\right)^b = 0, \frac{m}{b} < 2, m < 2b$

$x^{2a}(\log(1 + x^2))^b = x^{2a+m} \left(\frac{\log(1+x^2)}{x^{\frac{m}{b}}}\right)^b, 2a + m > -1, m > -1 - 2a. 2b > -1 - 2a...(**)$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r^{2(a+\frac{1}{2})}(\log(1+r^2))^b drdy.$ $\begin{cases} a + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \to a < -1...(*) \\ 2b > -1 - 2(a + \frac{1}{2}) \to b + a > -1...(**) \end{cases}$

（３３） $\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{x^2+y^2+z^2}, V; 0 \leq x \leq y, 0 \leq z$

（解）変数変換 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, r > 0, J = r^2\sin\theta.$

$\int_V \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r^2}}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}\sin\theta d\theta dr$

計算、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = 1, \int_0^\infty e^{-r^2}dr = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ により、$\int_V \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4}.$

（３４）変数変換により変数空間の微小領域の面積がどのように変換されるかを考える。以下に答えよ。

（１）変数(u,v) **から変数**(x,y) **への変換**$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$ **により、**uv **平面上の点**$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ **で囲まれる領域**S **が**xy **平面の領域**S' **に変換されるときに、領域**S **と領域**S' **との面積の比をで表せ。**

（２）変換$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases}$ **により**(u,v) **から**(x,y) **へ変換するときに、**x **の微小変化**dx **を**u,v **の微小変化**du,dv **で表せ。**y **に関しても同様に**dy **を微小変化**du,dv **で表せ。但し、関数**f,g **は微分可能とする。**

（３）（２）の変換によって、u,v **軸に平行な辺からなる微分な長方形**S **（辺の長さがそれぞれ**$\triangle u, \triangle v$**）が**xy **平面の領域**S' **に変換されるときに、**$\triangle u, \triangle v$ **について２次以上の項が無視できるとして領域**S, S' **の面積の比を表す式を導け。**

（４）極座標による変数変換$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ **について、**$dxdy$ **と**$drd\theta$ **との比を表せ。**

（解）（１）$A(0,0) \to A'(0,0), B(0,1) \to B'(b,d), C(1,0) \to C'(a,c), D(1,1) \to D'(a+b, c+d)$

$\overrightarrow{A'B'} = (b,d), \overrightarrow{A'C'} = (a,c). \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = (b,d,0) \times (a,c,0) = (0,0,bc-ad). S' = |\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}| = |bc-ad|.$

$S : S' = 1 : |bc-ad|$

（２）$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases}, \begin{cases} dx = f_u(u,v)du + f_v(u,v)dv \\ dy = g_u(u,v)du + g_v(u,v)dv \end{cases}$

（３）（１）、（２）により、$S : S' = 1 : |f_v(u,v)g_u(u,v) - f_u(u,v)g_v(u,v)| = 1 : |J|. J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} f_u(u,v) & f_v(u,v) \\ g_u(u,v) & g_v(u,v) \end{vmatrix}$

（４）（３）により、$dxdy = |J|drd\theta. J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

（３５）$(i) x, D; a^2 < x^2+y^2 < b^2, x > 0, y > 0 (ii) x^2+y^2, V; x^2+y^2+z^2 < 1$

（解）(i)$\int\int_D xdxdy = \int_a^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\theta d\theta dr = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$

(ii)$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $, J = r^2\sin\theta. \int_V (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(r^2\sin^2\theta)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr = \frac{8}{15}\pi$

1.3.3　重積分の計算（３）座標変換ＩＩ（その他）

（1）$(x^2-y^2)e^{-(x+y)}, D; -1 \le x+y \le 1, -1 \le x-y \le 1$

（解）座標変換$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \to J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$

$D; -1 \le x+y \le 1, -1 \le x-y \le 1 \to D'; -1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1$

$\to \int\int_D (x^2-y^2)e^{-(x+y)}dxdy = \int\int_{D'} uve^{-u}dudv = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 uve^{-u}dudv = 0$

（2）$y, D; 0 \le y-x \le 1, 0 \le x+y \le 1$

（解）座標変換$\begin{cases} u = y+x \\ v = y-x \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{u+v}{2} \\ x = \frac{u-v}{2} \end{cases} \to J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

$D; 0 \le y-x \le 1, 0 \le x+y \le 1 \to D'; 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$

$\to \int\int_D ydxdy = \int\int_{D'} \frac{u+v}{2}dudv = \int_0^1\int_0^1 \frac{u+v}{2}dudv = \frac{1}{2}$

（3）$x, D; \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \le 1, 0 \le x, 0 \le y, (a, b > 0)$

（解）座標変換$\begin{cases} x = ar^2\cos^2\theta \\ y = br^2\sin^2\theta \end{cases} \to J = ab\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 2r\cos^2\theta & -2r^2\cos\theta\sin\theta \\ 2r\sin^2\theta & 2r^2\cos\theta\sin\theta \end{vmatrix} = 4abr^3\cos\theta\sin\theta, D; \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \le 1, 0 \le x, 0 \le y \Longrightarrow D'; 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\to \int\int_D xdxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\cos^2\theta(4abr^3\cos\theta\sin\theta)drd\theta = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^5\cos^3\theta\sin\theta drd\theta = \frac{ab}{6}.$

（4）$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}, D; x^2+y^2 \le 1$

（解）$\int\int_D (\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4})dxdy \overset{極座標}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (\frac{(r\cos\theta)^4}{a^4} + \frac{(r\sin\theta)^4}{b^4})rdrd\theta$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a^4b^4}\left(\frac{3}{16}\pi a^4 + \frac{3}{16}\pi b^4\right) = \frac{\pi\left(a^4+b^4\right)}{8a^4b^4}$ $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\cos^4\theta}{a^4} + \frac{\sin^4\theta}{b^4})d\theta = \frac{1}{a^4b^4}\left(\frac{3}{16}\pi a^4 + \frac{3}{16}\pi b^4\right)\right)$

（5）$(x+y)^2\cos\frac{x-y}{2}, D; |x|+|y| \le \pi$ (*hint;* **変数変換**$u = x+y, v = x-y$**)**

（解）座標変換$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \to J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$

$D; |x|+|y| \le \pi \Longrightarrow -\pi \le u \le \pi, -\pi \le v \le \pi$

$\int\int_D (x+y)^2\cos\frac{x-y}{2}dxdy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2\cos\frac{v}{2}dudv = \frac{8}{3}\pi^3$

（６）$(x+y)(2x-y)^2, D; 1\le x+y\le 2, -1\le 2x-y\le 1$

（解）座標変換 $\begin{cases} u=x+y \\ v=2x-y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\frac{u+v}{3} \\ y=\frac{2u-v}{3} \end{cases} \to J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=$
$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}=-\frac{1}{3}$

$D; 1\le x+y\le 2, -1\le 2x-y\le 1 \Longrightarrow D'; 1\le u\le 2, -1\le v\le 1$

$\int\int_D (x+y)(2x-y)^2 dxdy = \frac{1}{3}\int_1^2\int_{-1}^1 uv^2 dvdu = \frac{1}{3}$

（７）$\frac{1}{e^x+e^y}, D; 0\le x<\infty, 0\le y<\infty$

（解）座標変換 $\begin{cases} u=e^x \\ v=e^y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\log u \\ y=\log v \end{cases} \to J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=$
$\begin{vmatrix} \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v} \end{vmatrix}=\frac{1}{uv}$

$D; 0\le x<\infty, 0\le y<\infty \Longrightarrow D'; 1\le u<\infty, 1\le v<\infty$

$\int\int_D \frac{1}{e^x+e^y}dxdy = \int_1^\infty\int_1^\infty \frac{1}{(u+v)uv}dudv = \int_1^\infty \frac{1}{v^2}\int_1^\infty (\frac{1}{u}-\frac{1}{u+v})dudv$

$=\int_1^\infty \frac{1}{v^2}[\log u-\log(u+v)]_{u=1}^{u=\infty}dv = \int_1^\infty \frac{\log(1+v)}{v^2}dv = 2\log 2$

$(\lim_{u\to\infty}\log\frac{u}{u+v}=0, \int\frac{\log(1+v)}{v^2}dv = -\frac{\log(1+v)}{v}+\int\frac{1}{v(1+v)}dv = -\frac{\log(1+v)}{v}+\int(\frac{1}{v}-\frac{1}{1+v})dv$

$=-\frac{\log(1+v)}{v}+(\log v-\log(1+v)))$

（８）$2(x+y)^6(x-y)^8, D; 0\le x, 0\le y, x+y\le 1$

（解）座標変換 $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases} \to J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=$
$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$

$D; 0\le x, 0\le y, x+y\le 1 \Longrightarrow D'; -u\le v\le u, 0\le u\le 1$

$\int\int_D 2(x+y)^6(x-y)^8 dxdy = \int_0^1\int_{-u}^u u^6v^8 dvdu = \frac{1}{72}$

（９）$y^2-x^2, D=\{0\le y-x\le y+x<\infty\}$

（解）変数変換 $\begin{cases} u=y-x \\ v=y+x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\frac{v-u}{2} \\ y=\frac{v+u}{2} \end{cases}, J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$

$D=\{0\le y-x\le y+x<\infty\} \Longleftrightarrow D'=\{0\le u\le v<\infty\}$

$\to \int\int_D (y^2-x^2)dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{D'} uvdudv = \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^v uvdudv = \frac{1}{4}\int_0^\infty v[\frac{u^2}{2}]_{u=0}^{u=v}dv = \infty$

（１０）$x, D=\{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{a}, 0\le x, 0\le y\}$

（解）変数変換 $\begin{cases} x=r\cos^4\theta \\ y=r\sin^4\theta \end{cases},$

$D=\{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{a}, 0\le x, 0\le y\} \Longleftrightarrow D'=\{0<r\le a, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

$J=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos^4\theta & -4r\cos^3\theta\sin\theta \\ \sin^4\theta & 4r\sin^3\theta\cos\theta \end{vmatrix}=4r\cos^3\theta\sin^3\theta$

$\to \int\int_D xdxdy = \int\int_{D'} r\cos^4\theta\cdot 4r\cos^3\theta\sin^3\theta drd\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos^7\theta\sin^3\theta drd\theta = \frac{1}{30}a^3$

（１１） $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}, D; 0 \le x, 0 \le y, a \le x+y \le b$

（解） 変数変換 $\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. D; 0 \le u+v, 0 \le u-v, a \le u \le b$

$\int\int_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} dxdy = \frac{1}{2}\int_a^b \int_{-u}^{u} \frac{(\frac{u+v}{2})^2+(\frac{u-v}{2})^2}{u^3} dvdu = \frac{1}{4}\int_a^b \int_{-u}^{u} \frac{u^2+v^2}{u^3} dvdu = \frac{1}{4}\int_a^b \int_{-u}^{u} (\frac{1}{u}+\frac{v^2}{u^3}) dvdu = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}a$

（１２） $\sin(x^{\frac{2}{3}}+y^2), D; x^{\frac{2}{3}}+y^2 \le \frac{\pi}{2}, x \ge 0, y \ge 0$

（解） 変数変換 $\begin{cases} x = r^3\cos^3\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 3r^2\cos^3\theta & \sin\theta \\ -3r^3\cos^2\theta\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = 3r^3\cos^4\theta + 3r^3\cos^2\theta\sin^2\theta = 3r^3\cos^2\theta$

$\to \int\int_D \sin(x^{\frac{2}{3}}+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 3r^3\cos^2\theta\sin r^2 drd\theta = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta = \frac{3}{8}\pi$

$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 3r^3\sin r^2 dr = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 3r^2\sin r^2(rdr) \overset{r^2=s, 2rdr=ds}{=} \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} s\sin s ds = \frac{3}{2}$

（１３） $xy, D; py \le x^2 \le qy, rx \le y^2 \le sx, (0<p<q, 0<r<s)$

（解） 変数変換 $\begin{cases} u=\frac{x^2}{y} \\ v=\frac{y^2}{x} \end{cases}, \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{3}, D \to D' = \{(u,v); p \le u \le q, r \le v \le s\}$

$\to \int\int_D xydxdy = \frac{1}{3}\int_r^s\int_p^q \frac{1}{uv}dudv = \frac{1}{3}\log\frac{s}{r}\log\frac{q}{p}$

（１４） $\begin{cases} u(x,y)=xy^2 \\ v(x,y)=x+y \end{cases}$ **として、積分**$\int\int_K (\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})dxdy$ **の値を求めよ。** $K; \frac{x^2}{4}+y^2 \le a^2$

（解） $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = y^2+1.$ 変数変換 $\begin{cases} x=2r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ を行って、$K; \frac{x^2}{4}+y^2 \le a^2 \to K'; \frac{(2r\cos\theta)^2}{4}+(r\sin\theta)^2 \le a^2, 0 \le r \le a, 0 < \theta < 2\pi. J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & \sin\theta \\ -2r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r.$

故に、$\int\int_K(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^a (r^2\sin^2\theta+1)2rdrd\theta = 2\int_0^{2\pi}(\frac{a^4}{4}\sin^2\theta + a)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(a^4(1-\cos 2\theta)+8a)d\theta$

$= \frac{\pi}{2}(a^4+8a)$

（１５）(i) $\frac{|y|}{(1+x)^4}, D; 0 \le x \le n, -x<y<x$ **(ii)** $\frac{|x-y|}{(1+x+y)^a}, D; x \ge 0, y \ge 0$

（解） (i)$\int_0^n\int_{-x}^{x}\frac{|y|}{(1+x)^4}dydx = 2\int_0^n\int_0^x \frac{y}{(1+x)^4}dydx = \int_0^n[\frac{y^2}{(1+x)^4}]_{y=0}^{y=x}dx = \int_0^n \frac{x^2}{(1+x)^4}dx = \int_0^n \frac{(1+x)^2-2(1+x)+1}{(1+x)^4}dx$

$= \int_0^n\left(\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{2}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+x)^4}\right)dx = \frac{1}{3}\frac{n^3}{(n+1)^3}$

(ii) 変数変換 $\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}, \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, D \to D' = \{(u,v); u+v>0, u-v>0\}$

$\int\int_D \frac{|x-y|}{(1+x+y)^a}dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{D'}\frac{|v|}{(1+u)^a}dudv = \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_{-u}^{u}\frac{|v|}{(1+u)^a}dvdu = \int_0^\infty\int_0^u \frac{v}{(1+u)^a}dvdu = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u^2}{(1+u)^a}du$

$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(1+u)^2-2(1+u)+1}{(1+u)^a}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+x)^{a-2}} - \frac{2}{(1+x)^{a-1}} + \frac{1}{(1+x)^a}\right)du =$
$\frac{1}{2}[\frac{(1+x)^{3-a}}{3-a} - \frac{2(1+x)^{2-a}}{2-a} + \frac{(1+x)^{1-a}}{1-a}]_{x=0}^{x=\infty}$
$\overset{3-a<0}{=} \frac{1}{2}(\frac{1}{3-a} - \frac{2}{2-a} + \frac{1}{1-a})$

（１６）$\cos^2\pi(y-x), D; -1 \leq x \leq 1, -1 < y-x < 1$

（解）$\left\{\begin{array}{l} x+y=u \\ x-y=v \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{array}\right. , \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,v)} = \left|\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right| = -\frac{1}{2}, D \rightarrow$
$D'; -v-2 \leq u \leq -v+2, -1 < v < 1.$

$\int\int_D \cos^2\pi(y-x)dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{D'}\cos^2\pi v dudv = \frac{1}{2}\int_{-1}^1\int_{-v-2}^{-v+2}\cos^2\pi v dudv =$
$2\int_{-1}^1\cos^2\pi v dv = 2$

（１７）$e^{x+y}, D; |x+y| \leq 1, |y-x| < 1$

（解）$\left\{\begin{array}{l} x+y=u \\ x-y=v \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{array}\right. , \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,v)} = \left|\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right| = -\frac{1}{2}, D \rightarrow$
$D'; -1 \leq u \leq 1, -1 < v < 1.$

$\int\int_D e^{x+y}dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{D'} e^u dudv = \frac{1}{2}\int_{-1}^1\int_{-1}^1 e^u dudv = (e - e^{-1})$

（１８）$e^x, D; 0 < x+y \leq 1, 0 < x-y < 1$

（解）$\left\{\begin{array}{l} x+y=u \\ x-y=v \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{array}\right. , \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,v)} = \left|\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right| = -\frac{1}{2}, D \rightarrow$
$D'; 0 \leq u \leq 1, 0 < v < 1.$

$\int\int_D e^x dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{D'} e^{\frac{u+v}{2}}dudv = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 e^{\frac{u+v}{2}}dudv = 2(e^{\frac{1}{2}}-1)^2$

1.3.4　重積分の計算（４）三重積分

（1）$\frac{1}{(x+y+z+1)^3}, D; 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x+y+z \leq 1$

（解）$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(x+y+z+1)^3}dzdydx = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}[(x+y+z+1)^{-2}]_0^{1-x-y}dydx$
$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}((x+y+1)^{-2} - 2^{-2})dydx = \frac{1}{2}\int_0^1[-(x+y+1)^{-1} - \frac{1}{4}y]_0^{1-x}dx$
$= \frac{1}{2}\int_0^1\{(x+1)^{-1} - (x+1-x+1)^{-1} - \frac{1}{4}(1-x)\}dx = \frac{1}{2}[\log(x+1) - \frac{1}{2}x +$
$\frac{1}{8}(x-1)^2]_0^1$
$= \frac{1}{2}(\log 2 - \frac{1}{2} - \log 1 - \frac{1}{8}) = \frac{1}{2}(\log 2 - \frac{5}{8})$

1.3.5　重積分の計算（５）その他

（1）y; **点**$(0,0),(1,0),(3,1),(2,2),(0,2)$ **を頂点とする５角形の内部**D

（解）$\int\int_D ydxdy = \int_0^2\int_0^1 ydxdy + \int_1^2\int_{\frac{1}{2}(x-1)}^2 ydydx + \int_2^3\int_{\frac{1}{2}(x-1)}^{-x+4} ydydx =$
$2 + \frac{47}{24} + \frac{7}{8} = \frac{29}{6}$

$\int_0^2\int_0^1 ydxdy = 2, \int_1^2\int_{\frac{1}{2}(x-1)}^2 ydydx = \frac{47}{24}, \int_2^3\int_{\frac{1}{2}(x-1)}^{-x+4} ydydx = \frac{7}{8}$

（2）$\frac{1}{(x-y)^a}, (a<1), D; 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x$

（解）$\int_0^x \frac{1}{(x-y)^a}dy = [-\frac{(x-y)^{1-a}}{1-a}]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^{1-a}}{1-a}, \int_0^1 \frac{x^{1-a}}{1-a}dx = \frac{1}{(1-a)(2-a)}$

（3）（i）対称行列$A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ **を直交行列**T **で対角化せよ。**

（ii）広義積分$\int_{R^3}e^{-Q(x,y,z)}dxdydz$ **を求めよ。但し、**$Q(x,y,z)=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz+2zx$

（iii）広義積分$\int_{R^3}(x^2+y^2+z^2)e^{-Q(x,y,z)}dxdydz$ **を求めよ。**

（解）（1）固有値・固有ベクトル: $\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\vec{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\leftrightarrow 1,\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow 4.$

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},T^tAT=D,D=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

（2）変数変換$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\vec{x}=T\vec{X}$ によって、二次形式 $Q(x,y,z)$ は $Q(x,y,z)=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz+2zx=\vec{x}^tA\vec{x}=(T\vec{X})^tAT\vec{X}=\vec{X}^tT^tAT\vec{X}=\vec{X}^tD\vec{X}=4X^2+Y^2+Z^2$ となる。また、$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,Z)}=T,J=\det(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,Z)})=\det T=1$ だから、$\int_{R^3}e^{-Q(x,y,z)}dxdydz=\int_{R^3}e^{-Q(X,Y,Z)}|J|dXdYdZ=\int_{R^3}e^{-(4X^2+Y^2+Z^2)}dXdYdZ.$

変数変換$\begin{cases}2X=\xi\\Y=\zeta\\Z=\eta\end{cases}$ をして、$\int_{R^3}e^{-(4X^2+Y^2+Z^2)}dXdYdZ=\frac{1}{2}\int_{R^3}e^{-(\xi^2+\zeta^2+\eta^2)}d\xi d\zeta d\eta=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}e^{-\zeta^2}e^{-\eta^2}d\xi d\zeta d\eta$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}^3=\frac{1}{2}\pi\sqrt{\pi}.$

（3）（2）と同様にして、$\int_{R^3}(x^2+y^2+z^2)e^{-Q(x,y,z)}dxdydz=\int_{R^3}(X^2+Y^2+Z^2)e^{-(4X^2+Y^2+Z^2)}dXdYdZ$

$=\frac{1}{2}\int_{R^3}(\frac{\xi^2}{4}+\zeta^2+\eta^2)e^{-(\xi^2+\zeta^2+\eta^2)}d\xi d\zeta d\eta$

ここで、球面座標$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\phi\\y=r\sin\theta\sin\phi\\z=r\cos\phi\end{cases},(0<r<\infty,0\leq\theta\leq 2\pi,0\leq\phi\leq\pi)$ に変換する。$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix}\cos\theta\sin\phi&\sin\theta\sin\phi&\cos\phi\\-r\sin\theta\sin\phi&r\cos\theta\sin\phi&0\\r\cos\theta\cos\phi&r\sin\theta\cos\phi&-r\sin\phi\end{vmatrix}=-r^2\sin\phi\to dxdydz=r^2\sin\phi drd\theta d\phi$

$4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{(\cos\theta\sin\phi)^2}{4}+(\sin\theta\sin\phi)^2+(\cos\phi)^2)e^{-r^2}r^4\sin\phi d\theta d\phi dr=4\frac{3}{8}\sqrt{\pi}\frac{3}{8}\pi=\frac{9}{16}\pi^{\frac{3}{2}}.$

計算;$\int_0^\infty e^{-r^2}r^4dr=-\frac{1}{2}\int_0^\infty(-2r)e^{-r^2}r^3dr=-\frac{1}{2}[e^{-r^2}r^3]_0^\infty+\frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}r^2dr=-\frac{3}{4}\int_0^\infty(-2r)e^{-r^2}rdr$
$=-\frac{3}{4}[e^{-r^2}r]_0^\infty+\frac{3}{4}\int_0^\infty e^{-r^2}dr=\frac{3}{4}\int_0^\infty e^{-r^2}dr=\frac{3}{8}\sqrt{\pi}.$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\frac{\cos^2\theta\sin^2\phi}{4}+\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\phi\}\sin\phi d\theta d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\frac{\cos^2\theta}{4}(1-\cos^2\phi)+\sin^2\theta(1-\cos^2\phi)+\cos^2\phi\}\sin\phi d\theta d\phi$
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\cos^2\theta}{6}+\frac{2}{3}\sin^2\theta+\frac{1}{3})d\theta=\frac{3}{8}\pi.$

1.3.6 重積分の計算（7）その他の座標変換

１．三重積分$\int_V(x^2+y^2)zdxdydz, V;0\le x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 2...(*)$ **について、以下に答えよ。**

（1）変数変換$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=t \end{cases}$ **を行う。このときのヤコビヤン**$J=|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,t)}|$ **を求めよ。**

（2）（1）を用いて、$(*)$ **の値を計算せよ。**

（解）（１）$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,t)}=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=r\to J=r$

（２）$\int_V(x^2+y^2)zdxdydz=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3tdtdrd\theta=8\pi^4$

２．極座標(r,θ,ϕ) **における「面積素」及び「体積素」を求め、この結果を用いて、半径**a **の球の表面積**S **及び体積**V **を計算せよ。**

（解）体積素;$\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\phi \end{cases}, J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & 0 \\ r\cos\theta\cos\phi & r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\phi \end{vmatrix}=-r\sin\phi\to\to\to dxdydz=r^2\sin\phi drd\theta d\phi$

$\int\int\int_{V_1}dxdydz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\sin\phi drd\theta d\phi=\frac{a^3}{3}2\pi\cdot 2=\frac{4}{3}\pi a^3$

面積素;$(Z_x)^2+(Z_y)^2=(Z_r)^2+(\frac{Z_\theta}{r})^2, J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r\to\to\to$

$\sqrt{1+(Z_x)^2+(Z_y)^2}dxdy=\sqrt{1+(Z_r)^2+(\frac{Z_\theta}{r})^2}rdrd\theta$

$\int\int_{S_1}\sqrt{1+(Z_x)^2+(Z_y)^2}dxdy\overset{z=\sqrt{a^2-r^2}}{=}2\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}drd\theta=4\pi a^2$

３．（1）実対称行列$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ **の固有値が全て正である条件を書け。**

（2）（1）の条件のもとで、重積分$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$ **を計算せよ。必要なら**$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ **を使って良い。**

（解）（１）特性方程式 $X^2-(a+c)X+\left(ac-b^2\right)=0\overset{固有値\lambda_1,\lambda_2が正}{\longrightarrow}$
$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=a+c>0 \\ \lambda_1\lambda_2=ac-b^2>0 \end{cases}, \lambda=\frac{(a+c)\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$

（２）$ax^2+2bxy+cy^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}T^t \Longleftrightarrow T^t\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}T=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}= T\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}T^t\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}T\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\to \frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}=|T|=1$

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2)}dXdY \overset{\sqrt{\lambda_1}X=\xi,\sqrt{\lambda_2}Y=\eta}{=} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\xi^2+\eta^2)}d\xi d\eta=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\pi$

４．円柱座標系(r,θ,z) **と直交座標系**$(x.y.z)$ **の間には、**$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ $(r\geq 0, 0\leq\theta\leq 2\pi)$ **の関係がある。以下に答えよ。**

（１）円柱座標系(r,θ,z) **が、直交曲線座標であることを示せ。**

（２）円柱座標系(r,θ,z) **で、直交座標の単位ベクトル**$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ **を表せ。**

（３）曲面$z=x^2+y^2$ **と**$z=18-(x^2+y^2)$ **で囲まれた領域を**V **とする。積分**$\int_V\sqrt{x^2+y^2}dV$ **を計算せよ。**

（解）$\vec{x}=\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$

$\to \vec{x}_r=\begin{cases} x_r=\cos\theta \\ y_r=\sin\theta \\ z_r=0 \end{cases}, \vec{x}_\theta=\begin{cases} x_\theta=-r\sin\theta \\ y_\theta=r\cos\theta \\ z_\theta=0 \end{cases}, \vec{x}_z=\begin{cases} x_z=0 \\ y_z=0 \\ z_z=1 \end{cases}$

$\to \vec{x}_r\cdot\vec{x}_\theta=\vec{x}_\theta\cdot\vec{x}_z=\vec{x}_r\cdot\vec{x}_z=0$

（２）$(1,0,0)\Longrightarrow(1,0,\frac{\pi}{2}),(0,1,0)\Longrightarrow(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),(0,0,1)\Longrightarrow(1,0,0)$

（３）$\sqrt{x^2+y^2}=r, V; 0\leq r\leq 3, 0\leq\theta\leq 2\pi, r^2\leq z\leq 18-r^2$

$\int_V\sqrt{x^2+y^2}dV=\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2}^{18-r^2}r^2dzdrd\theta=\frac{648}{5}\pi$

５．$u-v$ **平面における正方形**$A=\{(u,v);0\leq u\leq 1, 0\leq v\leq 1\}$ **が、一次変換**$\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases}$ **により写される**$x-y$ **平面上の図形を**B **とする。以下に答えよ。**

(i)B **を**$x-y$ **平面上に図示せよ。更に、**B **の面積は**A **の面積の何倍か答えよ。**

(ii) **二重積分** $\int\int_B xdxdy$ **を計算せよ。**

（解）(i)$(u,v)=a(0,0),b(0,1),c(1,0),d(1,1)\to(x,y)=a'(0,0),b'(1,-1),c'(1,1),d'(2,0)$
$\to\to\to a',b',c',d'$ で囲まれた正方形、面積$=2$

(ii)$\int\int_B xdxdy = \int\int_A (u+v)|J|dudv \overset{J=\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}=2}{=} 2\int_0^1\int_0^1(u+v)dudv=2$

$=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\pi$

６．$\epsilon>0$ **に対して、**$D_\epsilon=\{(x,y);\epsilon^2\le x^2+y^2\le 1\}$ **とおく。このときに、** $\lim_{\epsilon\to 0}\int\int_{D_\epsilon}\frac{x^2-y^2}{x^4+y^4}dxdy$ **を求めよ。**

（解）$\int\int_{D_\epsilon}\frac{x^2-y^2}{x^4+y^4}dxdy \overset{\text{極座標}}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\varepsilon^1\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}rdrd\theta=4(-\log\varepsilon)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}d\theta$

$\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta=1-\frac{\sin^2 2\theta}{2}\to\to\to 1\ge\cos^4\theta+\sin^4\theta\ge\frac{1}{2}$

$\to\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta=0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}d\theta\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta=0$

７．(i) **空間で、不等式**$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2+1\le 0, 1\le z\le c$ **を満たす部分の体積を計算せよ。**

但し、$a>0,b>0,c>1.$$(ii)$ **空間で、不等式**$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, 0\le z\le x^2+y^2$ **を満たす部分の体積を計算せよ。但し、**$a>0,b>0.$

（解）$(i)\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le z^2-1$ は、軸の長さが $a\sqrt{z^2-1},b\sqrt{z^2-1}$ の楕円である。また、楕円 $D_{a,b};\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ の面積 S は、$S=\int\int_{D_{a,b}}dxdy \overset{x=aX,y=bY}{=} \int\int_{D_1}abdXdY \overset{D_1;\text{ 半径１の円}}{=} ab\pi$ だから、体積 $V=\int_1^c ab(z^2-1)\pi dz=\frac{1}{3}\pi ab(2-3c+c^3)$

$(ii)V=\int\int_{D_{a,b}}(x^2+y^2)dxdy \overset{x=aX,y=bY}{=} \int\int_{D_1}(a^2X^2+b^2Y^2)abdXdY$
$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)r^3drd\theta=4ab(\frac{1}{16}\pi a^2+\frac{1}{16}\pi b^2)=ab\pi(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2)$

８．xy **平面上の点**(x,y) **と、**uv **平面上の点**(u,v) **との間に**$\begin{cases} u=e^x\cos y \\ v=e^x\sin y \end{cases}$ **という関係式がある。この時に、**xy **平面上の３点**$A(0,0),B(1,0),C(1,\frac{\pi}{2})$ **を頂点とする３角形**ABC **を、上の対応関係で**uv **平面に移した図形を**P **として、以下の問に答えよ。**

(1) **図形**P **がどのような図形であるかを示せ。**

(2) **図形**P **の面積を計算せよ。**

（解）（１）$A(0,0)\to A'(1,0),B(1,0)\to B'(e,0),C(1,\frac{\pi}{2})\to C'(0,e)$

（２）$\int\int_P dudv=\int\int_{\triangle ABC}|J|dxdy=\int\int_{\triangle ABC}e^xdxdy=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}x}e^xdydx=\frac{\pi}{2}\int_0^1 xe^xdx=\frac{\pi}{2}$

$$J=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\sin y \end{vmatrix}=e^x$$

９．以下に答えよ。

(1) **領域**$D;\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1$ **を図示し、その面積を計算せよ。**

(2) **曲線**$C;\begin{cases} x=\cos^4\theta \\ y=\sin^4\theta \end{cases}$ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ **に沿っての線積分**$\int_C(xdy-ydx)$ **の値を計算せよ。**

（解）（１）$D \overset{\begin{cases} x=r\cos^4\theta \\ y=r\sin^4\theta \end{cases}}{\Longrightarrow} D';0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 1$

$\to\to\to S=\int\int_D dxdy=\int\int_{D'}|J|drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 4r\cos^3\theta\sin^3\theta drd\theta=\frac{1}{6}$

$J=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos^4\theta & -4r\cos^3\theta\sin\theta \\ \sin^4\theta & 4r\sin^3\theta\cos\theta \end{vmatrix}=4r\cos^3\theta\sin^3\theta$

（２）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^4\theta\sin^3\theta\cos\theta+4\sin^4\theta\cos^3\theta\sin\theta)d\theta=\frac{1}{3}$

１０．曲面$z=1-x^2-y^2$ **の**$x-y$ **平面の上にある部分の表面積を求めよ。**

（解）$S=\int\int_D\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}dxdy(D;1\ge x^2+y^2)$

$=\int\int_D\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}dxdy \overset{\text{極座標}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\sqrt{1+4r^2}rdrd\theta \overset{r^2=t}{=} \frac{5\sqrt{5}-1}{24}$

π

１１．重積分$\int\int_D(x-y)^2dxdy, D=\{(x,y);2x^2-2xy+y^2\le 1\}$ **を計算せよ。**

（解）二次形式 $2x^2-2xy+y^2=1$ はベクトルと行列で $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$ と表される。ここで、$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ を 固有値・固有ベクトルを求め直交行列で対角化すると、$T^tAT=DT=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & -\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ である。即ち、

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ -\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & -\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

ここで、変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & -\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を行うと、積分領域 D は、$D'=\{(X,Y);(\frac{3-\sqrt{5}}{2})X^2+(\frac{3+\sqrt{5}}{2})Y^2\le 1\}$ に変わり、披積分関数は、$(x-y)^2=(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}X-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}Y-\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}X+\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}Y)^2$
$=(\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}X-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}Y)^2=\frac{14-6\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}X^2-\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}XY+\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}Y^2$ となる。

よって、重積分$\int\int_D(x-y)^2dxdy$は、$\int\int_{D'}(\frac{14-6\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}X^2-\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}XY+\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}Y^2)dXdY$と変換される。

以下は、座標変換$\begin{cases} X=\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}}r\cos\theta \\ Y=\sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{5}}}r\sin\theta \end{cases}$を用いて、極座標で積分すると、

$\int\int_{D'}(\frac{14-6\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}X^2-\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}XY+\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}Y^2)dXdY$
$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(\frac{14-6\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}\frac{2}{3-\sqrt{5}}\cos^2\theta-\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\cos\theta\sin\theta+\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}\frac{2}{3+\sqrt{5}}\sin^2\theta)r^3drd\theta$
$=\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{5}\sqrt{5}-\frac{3}{10}\pi\sqrt{5}+\frac{1}{2}.$

１２．空間に曲面$z=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$があり、また$xy$平面上の領域$D_a=\{(x,y);x+y\leq a\}$での関数$z$の重積分を$V(a)$とする。以下に答えよ。

（１）$V(a)$を積分の形で表せ。

（２）$V(a)$をaで微分して得られる式を求めよ。

（解）（１）$V(a)=\frac{1}{2\pi}\int\int_{D_a}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$

（２）変数変換$\begin{cases} X=x+y \\ Y=x-y \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=\frac{X+Y}{2} \\ y=\frac{X-Y}{2} \end{cases}$ $J=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$

$D_a=\{(x,y);x+y\leq a\}\rightarrow D'_a=\{(X,Y);X\leq a\}$
$V(a)=\frac{1}{2\pi}\int\int_{D_a}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\frac{1}{2\pi}\int\int_{D'_a}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{a}e^{-\frac{X^2+Y^2}{4}}dXdY$
$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{Y^2}{4}}dY\int_{-\infty}^{a}e^{-\frac{X^2}{4}}dX\rightarrow\frac{dV}{da}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{a^2}{4}}$ （$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{Y^2}{4}}dY\overset{Y=2y}{=}2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=2\sqrt{\pi}$）.

１３．連続関数$f(s)$、定数$a(>0)$について$D_a=\{(x,y);x\geq 0,y\geq 0,a\geq x+y\}$とする。このときに$\int\int_{D_a}f(x+y)dxdy=\int_0^a xf(x)dx$を示せ。

（解）変数変換$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases},\begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}$を行うと、$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2},D_a\rightarrow D'_a=\{(u,v);0\leq u\leq a,-u\leq v\leq u\}.$

$\int\int_{D_a}f(x+y)dxdy=\frac{1}{2}\int\int_{D'_a}f(u)dudv=\frac{1}{2}\int_0^a\int_{-u}^{u}f(u)dvdu=\int_0^a uf(u)du$

１４．重積分$\int\int_D(x^2-y^2)^2dxdy,D=\{(x,y);0\leq x+y\leq 1,0\leq x-y\leq 1\}$を計算せよ。

（解）変数変換をおこなうと、$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases},\begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases},J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$

$D=\{(x,y);0\leq x+y\leq 1,0\leq x-y\leq 1\}\rightarrow D'=\{(u,v);0\leq u\leq 1,0\leq v\leq 1\}.$

$\int\int_D(x^2-y^2)^2dxdy=\frac{1}{2}\int\int_{D'}u^2v^2dudv=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1u^2v^2dudv=\frac{1}{18}$

１５．積分$I=\int_0^2(\int_0^x\frac{dy}{\sqrt{(x-y)^2+2(x+y)+1}})dx$を以下のように計算する。問に答えよ。

（１）変数変換$\begin{cases} x=u(1+v) \\ y=v(1+u) \end{cases}$により、$xy$平面上の領域$D=\{(x,y);0<x<a,0<y<x\}$が$uv$平面上のどのような領域に変換されるか。

（２）連続関数$f(x,y)$ **の領域**D **における積分を（１）の変数変換をするとき、**$\int_0^a(\int_0^x f(x,y))dx = \int_0^b(\int_v^{\frac{a}{1+v}} f(u(1+v),v(1+u)))(u+v+1)du)dv$ **が成り立つことを確かめて、**b **を決めよ。**

（３）I **を求めよ。**

（解）（１）$(i)x=y \to u(1+v)=v(1+u), v=u (ii)x=a \to u(1+v)=a, u=\frac{a}{1+v} (iii)y=0 \to v(1+u)=0, v=0$

$\frac{a}{1+v}=v, v^2+v-a=0, v=-\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}, D'=\{(u,v); v<u<\frac{a}{1+v}, 0<v<\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}\}$

（２）$\begin{cases} x=u(1+v) \\ y=v(1+u) \end{cases}, J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+v & u \\ v & 1+u \end{vmatrix}=u+v+1,$

$\int\int_D f(x,y)dxdy=\int\int_{D'} f(u(1+v),v(1+u)))(u+v+1)dudv=\int_0^{\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}}(\int_v^{\frac{a}{1+v}} f(u(1+v),v(1+u)))(u+v+1)du)dv$

（３）$\int_0^2(\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(x-y)^2+2(x+y)+1}})dx=\int_0^1(\int_v^{\frac{2}{1+v}} \frac{1}{u+v+1}(u+v+1)du)dv=\int_0^1(\frac{2}{1+v}-v)dv=2\log 2-\frac{1}{2}$

１６．二重積分$\cos^2\pi(x-y), D; -1<x<1, -1<y-x<1$ **を計算せよ。**

（解）変数変換$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{v-u}{2} \end{cases}$ をおこなうと、$J=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2},$

$D; -1<x<1, -1<y-x<1 \to D'; -2<u+v<2, -1<u<1.$

$\int\int_D \cos^2\pi(x-y)dxdy=\frac{1}{2}\int\int_{D'}(\cos^2\pi u)dudv=\frac{1}{2}\int_{-1}^1(\int_{-2-u}^{2-u}(\cos^2\pi u)dv)du=2\int_{-1}^1(\cos^2\pi u)du=2$

１７．積分$\int\int_D \frac{dxdy}{1+(x+y)^4}, (D; x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1)$ **を以下の手順で求めよ。**

(i) 変数変換$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ **をするときに、ヤコビアン**$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ **を求めよ。**

(ii) 積分をu,v **に関する積分に直して値を求めよ。**

（解）(i)$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}, J=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2}$

(ii)$D'; u\geq v\geq -u, u\leq 1, \int\int_D \frac{dxdy}{1+(x+y)^4}=\frac{1}{2}\int\int_{D'}\frac{dudv}{1+u^4}=\frac{1}{2}\int_0^1(\int_{-u}^u \frac{dv}{1+u^4})du=\int_0^1 \frac{u}{1+u^4}du \overset{u^2=s,2udu=ds}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+s^2}ds=\frac{1}{8}\pi$

１８．二変数関数$f=f(x,y)=(x^2+4y^2)^2-16xy, (x\geq 0, y\geq 0)$ **について不等式**$f(x,y)\leq 0$ **を満たす**(x,y) **平面上の領域を**S **とする。即ち、**$S=\{(x,y); f(x,y)\leq 0, x\geq 0, y\geq 0\}$**, 以下に答えよ。**

（１）領域S **は平面上の有界な領域であることを示せ。**

（２）関数$f(x,y)$ **の最小値を求めよ。**

（３）領域S **の面積を求めよ。**

（解）（１）、（３）変数変換$\begin{cases} x=s \\ y=\frac{t}{2} \end{cases}$ をおこなうと、$f(x,y)=(x^2+4y^2)^2-16xy \to F(s,t)=(s^2+t^2)^2-8st$

$S\to S'=\{(s,t);F(s,t)\le 0,s>0,t>0\},F(s,t)=(s^2+t^2)^2-8st.$

次に、変数変換$\begin{cases} s=r\cos\theta \\ t=r\sin\theta \end{cases}$をおこなうと、$F(s,t)=(s^2+t^2)^2-8st=r^4-8r^2\cos\theta\sin\theta=g(r,\theta)$

$S'\to S''=\{(r,\theta);g(r,\theta)\le 0,r\ge 0,\frac{\pi}{2}\ge\theta>0\},r^4\le 08r^2\cos\theta\sin\theta,r^2\le 8\cos\theta\sin\theta=4\sin 2\theta,0\le r\le 2\sqrt{\sin 2\theta}$

となり有界になる。

面積の計算;$\begin{cases} x=s \\ y=\frac{t}{2} \end{cases}\to\int\int_S dxdy=\frac{1}{2}\int\int_{S'}dsdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sqrt{\sin 2\theta}}rdrd\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{r^2}{2}]_0^{2\sqrt{\sin 2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta=1$

（2）$f(x,y)=(x^2+4y^2)^2-16xy,\begin{cases} f_x(x,y)=4(x^2+4y^2)x-16y=0 \\ f_y(x,y)=16(x^2+4y^2)y-16x=0 \end{cases}(x,y\ge 0)(i)x=1,y=\frac{1}{2}(ii)x=0,y=0$

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y)=16y^2+12x^2 \\ f_{yy}(x,y)=16x^2+16\cdot 12y^2 \\ f_{xy}(x,y)=32xy-16 \end{cases}$$

$(i)x=1,y=\frac{1}{2};A=16>0,C=60,B=0,D=B^2-AC<0,$ 極小値 -4

$(ii)x=0,y=0;A=C=0,B=-16,D=B^2-AC>0,$ 極値とらない

最小値 $-4(x=1,y=\frac{1}{2})$

１９．自然数nについて、平面上の領域$D_n=\{(x,y);0\le x\le 1,0\le y\le 1,|x-y|\ge\frac{1}{n}\}$を考える。以下に答えよ。

（1）領域D_nを図示せよ。

（2）$0<a<1$のときに$I_{n,a}=\int\int_{D_n}\frac{1}{|x-y|^a}dxdy$を求めよ。

（3）$\lim_{n\to\infty}I_{n,a}$を求めよ。

（4）$a\ge 1$の場合に$\lim_{n\to\infty}I_{n,a}$を調べよ。

（解）（1）直線$x=1,x=0,y=1,y=0,x-y=\frac{1}{n},x-y=-\frac{1}{n}$で囲まれた部分（６角形）

（2）変数変換$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases},\begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{-u+v}{2} \end{cases}$をおこなうと、$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$

$D_n=\{(x,y);0\le x\le 1,0\le y\le 1,|x-y|\ge\frac{1}{n}\}\to D_n'=\{(u,v);-u\le v\le -u+2,u\le v\le u+2,u\ge\frac{1}{n},u\le -\frac{1}{n}\}.$

$I_{n,a}=\int\int_{D_n}\frac{1}{|x-y|^a}dxdy=\frac{1}{2}\int\int_{D_n'}\frac{1}{|u|^a}dudv=\int_{\frac{1}{n}}^1\int_u^{2-u}\frac{1}{u^a}dvdu=\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{u^a}(2-2u)=2\int_{\frac{1}{n}}^1(\frac{1}{u^a}-\frac{1}{u^{a-1}})du$

$=2[\frac{u^{1-a}}{1-a}-\frac{u^{2-a}}{2-a}]_{\frac{1}{n}}^1=2(\frac{1}{1-a}-\frac{1}{2-a}-\{\frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-a}-\frac{1}{2-a}\left(\frac{1}{n}\right)^{2-a}\})$

（3）（2）から、$\lim_{n\to\infty}I_{n,a}=2(\frac{1}{1-a}-\frac{1}{2-a})$

（4）(i)$a=1;I_{n,1}=2\int_{\frac{1}{n}}^1(\frac{1}{u}-1)du=2[\log u-u]_{\frac{1}{n}}^1=(-2+\frac{1}{n}-\log\frac{1}{n})=\infty$

(ii)$\lim_{n\to\infty}I_{n,a}=\infty$

1.3.7　体積・表面積など

１．正の実数r **と自然数**n **に対して、**$K_n(r)=\{(x_1,x_2,...,x_n);x_i\geq 0,1\leq i\leq n,\sum_1^n x_i\leq r\}$ **とおく。**$K_n(r)$ **の体積**$|K_n(r)|$ **は、**$|K_n(r)|=\int...\int_{K_n(r)}dx_1...dx_n$ **で与えられる。但し、**$n=1$ **の場合は線分の長さであり、**$n=2$ **の場合は三角形の面積である。以下に答えよ。**

(i)$|K_1(r)|$ **と**$|K_2(r)|$ **を計算せよ。**

(ii)$K_3(r)$ **と平面**$x_3=c,0\leq c\leq r,$ **との交わりの面積を考えて**$|K_3(r)|$ **を求めよ。**

(iii)$|K_n(r)|$ **を求めよ。**

（解）(i)$|K_1(r)|=\int_0^r dx=r,|K_2(r)|=\int\int_{K_2(r)}dx_1dx_2=\int_0^r\int_0^{r-x_2}dx_1dx_2=\int_0^r(r-x_2)dx_2=\frac{r^2}{2}$

(ii)$|K_3(r)|=\int\int\int_{K_n(r)}dx_1dx_2dx_3=\int_0^r(\int\int_{K_2(r-c)}dx_1dx_2)dx_3=\int_0^r\frac{(r-c)^2}{2}dc=\frac{r^3}{6}$

(iii)$|K_n(r)|=\int...\int_{K_n(r)}dx_1...dx_n=\int_0^r(\int\int_{K_{n-1}(r-c)}dx_1...dx_{n-1})dx_n$

$=K_{n-1}(1)\int_0^r(r-c)^{n-1}dx_n=\frac{|K_{n-1}(1)|}{n}r^n$. ここで、$r=1$ と置くと $|K_n(1)|=\frac{|K_{n-1}(1)|}{n}=\frac{|K_{n-2}(1)|}{n(n-1)}=...=\frac{|K_1(1)|}{n!}=\frac{1}{n!}$ だから、$|K_n(r)|=\frac{r^n}{n!}$.

２．円柱面$T;x^2+y^2=x$ **と曲面**$S;z=\sqrt{x^2+y^2}$ **について以下に答えよ。**

(i)S **と**T **と**xy **平面とで囲まれる部分の体積を計算せよ。**

(ii) **曲面**S **が円柱面**T **で切り取られる部分の曲面積を求めよ。**

（解）(i)$D;x^2+y^2\leq x\overset{\text{極座標}}{\rightarrow}D';-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},0\leq r\leq\cos\theta$

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow V=\int_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_{D'}r^2drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}r^2drd\theta=\frac{4}{9}$

(ii)$z=\sqrt{x^2+y^2}\rightarrow z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$

$S=\int_D\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}dxdy=\sqrt{2}\int_D dxdy=\sqrt{2}\int_{D'}rdrd\theta$

$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}rdrd\theta=\frac{1}{4}\pi\sqrt{2}$

３．円筒$x^2+y^2=a^2,(a>0)$ **の内部で、**xy **平面に上方にあり、かつ平面**$z=x$ **の下方にある部分の体積を計算せよ。**

（解）$\int\int_D xdxdy,D;x^2+y^2\leq a^2,x\geq 0\overset{\text{極座標}}{\rightarrow}\int\int_{D'}r^2\cos\theta drd\theta,D';0<r\leq a,-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos\theta drd\theta=\frac{2}{3}a^3$

４．不等式$x^2+y^2+z^2\leq 1,x^2+y^2\leq a^2(1>a>0)$ **で表される部分の体積を計算せよ。**

（解）$8\int\int_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,D;x^2+y^2\leq a^2,x\geq 0,y\geq 0\overset{\text{極座標}}{\rightarrow}$

$8\int\int_D r\sqrt{1-r^2}drd\theta,D';0<r\leq a,0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r\sqrt{1-r^2}drd\theta=8\pi\left(\frac{1}{6}a^2\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{6}\sqrt{1-a^2}+\frac{1}{6}\right)$

５．空間の図形$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq 1$ **の体積を計算せよ。**

（解）平面上の図形 $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq \sqrt{a}$ と、座標軸とで囲まれた部分の面積 D_a は、変数変換 $\begin{cases} x = a^2\cos^4\theta \\ y = a^2\sin^4\theta \end{cases}$ をして、

$D_a = \int_0^a y(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^4\theta(4a^2\cos^3\theta)\sin\theta d\theta = 4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos^3\theta d\theta = \frac{1}{6}a^4.$

$V = \int\int\int_V dxdydz = \int_0^1 D_{(1-\sqrt{z})^2}dz = \int_0^1 \frac{1}{6}(1-\sqrt{z})^8 dz = \frac{1}{270}$

（$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq 1 \to \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq \sqrt{(1-\sqrt{z})^2} \Longrightarrow D_{(1-\sqrt{z})^2}$）

６．密度が一様な半径a の$\frac{1}{4}$ 円$D = \{(x,y); x^2+y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ の重心を求めよ。

（解）$\int\int_D dxdy \overset{\text{極座標}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a rdrd\theta = \frac{1}{4}\pi a^2,$

$\int\int_D xdxdy \overset{\text{極座標}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos\theta drd\theta = \frac{1}{3}a^3 \to\to\to x_G = \frac{\int\int_D xdxdy}{\int\int_D dxdy} = \frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{4}\pi a^2} = \frac{4}{3\pi}a,$

$y_G = x_G = \frac{4}{3\pi}a$

７．２つの曲面$z^2 = ay, x^2+y^2 = 4ay$ に囲まれた立体の第一象限にある部分の体積を計算せよ。

（解）$\int\int_D \sqrt{ay}dxdy(D; x^2+y^2 \leq 4ay, x \geq 0) \overset{\text{極座標}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4a\sin\theta}\sqrt{ar\sin\theta}rdrd\theta$

$= \frac{64}{5}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = \frac{128}{15}a^3$

８．媒介変数表示された曲線$C; \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ を図示し、この曲線で囲まれた図形D 上での関数$z = xy+1$ の二重積分を計算せよ。

（解）$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \to \begin{cases} \frac{x}{3} = \cos t \\ \frac{y}{2} = \sin t \end{cases}$ $\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1, D; \left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1$

$\begin{cases} x = 3r\cos t \\ y = 2r\sin t \end{cases}$ $D'; 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \to\to\to$

$\int\int_D (xy+1)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (6r^2\cos t\sin t+1)6rdrdt = 6\pi$

９．円柱$x^2+y^2 \leq ax$ の内部にある球$x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ の部分の体積を計算せよ。

（解）$V = 2\int\int_D \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}dxdy, D; x^2+y^2 \leq ax \overset{\text{極座標}}{\to}$

$2\int\int_{D'}\sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta, D'; r \leq a\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \to$

$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta = 4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(1-\sin^3\theta)d\theta = 4a^3(\frac{1}{6}\pi - \frac{2}{9})$

１０．関数$\begin{cases} u = x^2-xy+y^2 \\ v = x^2+xy+y^2 \end{cases}$ で定まる(x,y) 平面から(u,v) 平面への写像F を考える。(x,y) 平面内の円$D; x^2+(y-1)^2 \leq \frac{1}{2}$ の写像F による像$F(D) = E$ の面積を計算せよ。

（解）$D' \leftrightarrow D; x^2+(y-1)^2 \leq \frac{1}{2},$

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x-y & 2y-x \\ 2x+y & 2y+x \end{vmatrix} = 4(x^2-y^2) < 0 \quad in \quad D.$$

$\int\int_{D'} dudv = \int\int_D |J|dxdy = \int\int_D 4(y^2-x^2)dxdy = 8\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int_{1-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{1+\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}(y^2-x^2)dydx$

$= 8\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int_{1-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{1+\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}(y^2-x^2)dydx = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}(7\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}-8x^2\sqrt{\frac{1}{2}-x^2})$
dx

$= 2\pi$

$\frac{56}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}dx \overset{x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta}{=} \frac{56}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}dx = \frac{56}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta =$

$\frac{7}{3}\pi$

$\frac{64}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}x^2\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx \overset{x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta}{=} \frac{64}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{3}\pi$

１１．空間にx 軸を軸にした無限に長い半径１の円柱がある。この円柱の$z \geq 0, x+y+z \leq 1$ の部分の側面積を計算せよ。

（解）平面の直線が軸に平行になるような座標変換を行う。$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$

そのときに、円柱 $x^2+y^2=1$、平面 $z=1-x-y$ はそれぞれ、$(\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y)^2+(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y)^2=1 \to X^2+Y^2=1$、$z=1-(\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y)-(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y)=1-\sqrt{2}X$ となる。側面の方程式 $X^2+Y^2=1$ から、$Y=\sqrt{1-X^2} \to \frac{\partial Y}{\partial X}=\frac{-X}{\sqrt{1-X^2}}, \frac{\partial Y}{\partial z}=0 \to \sqrt{1+(\frac{\partial Y}{\partial X})^2+(\frac{\partial Y}{\partial z})^2}=\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$

$\to 2\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{1-\sqrt{2}X}\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}dzdX = 2\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1-\sqrt{2}X}{\sqrt{1-X^2}}dX = 2(\frac{3}{4}\pi+1).$

1.3.8　１変数の積分への応用

１．以下に答えよ。但し、$a>0$ とする。

(i)$\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx$ **を計算せよ。**

(ii)$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy$ **を計算せよ。***(hint:***直交座標系を極座標系に変換せよ。）**

(iii)$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$ **を示せ。**

(iv)$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}dx$ **を計算せよ。但し、n は２以上の自然数とする。**

（解）(i)$\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx \overset{x^2=t,2xdx=dt}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-at}dt = \frac{1}{-2a}[e^{-at}]_0^\infty = \frac{1}{2a}$

(ii)$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a(x^2+y^2)}dxdy = 4\lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^R e^{-a(x^2+y^2)}dxdy = 4\lim_{R\to\infty}I_R$

$J_1 \leq I_R \leq J_2, \begin{cases} J_1 = \int\int_{D_1}e^{-a(x^2+y^2)}dxdy, D_1; x^2+y^2 \leq R^2, x,y \geq 0 \\ J_2 = \int\int_{D_2}e^{-a(x^2+y^2)}dxdy, D_2; x^2+y^2 \leq 2R^2, x,y \geq 0 \end{cases}$

$J_1 = \int\int_{D_1}e^{-a(x^2+y^2)}dxdy \overset{極座標}{=} \int\int_{D_1'}re^{-ar^2}drd\theta(D_1'; 0<r\leq R, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2a}(1-e^{-aR^2})$

$J_1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2a}(1-e^{-a2R^2}) \to\to\to \lim_{R\to\infty}I_R = \frac{\pi}{4a} \to \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy = \frac{\pi}{a}$

(iii)$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(iv)$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2}dx = \int_0^\infty x^{n-1}(xe^{-ax^2})dx = [-\frac{1}{2a}x^{n-1}e^{-ax^2}]_0^\infty + \frac{n-1}{2a}\int_0^\infty x^{n-2}e^{-ax^2}dx = \frac{n-1}{2a}I_{n-2}$

$= \frac{n-1}{2a}\frac{n-3}{2a}I_{n-4} = ... = \begin{cases} \frac{2m-2}{2a}\frac{2m-4}{2a}....\frac{2}{2a}I_1(n=2m-1; odd) \\ \frac{2m-1}{2a}\frac{2m-3}{2a}....\frac{3}{2a}\frac{1}{2a}I_0(n=2m; even) \end{cases}, I_1 = \frac{1}{2a}, I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$

1.3.9 発展問題

1．関数$f = f(x,y)$ **は、単位円周**$C = \{(x,y); x^2+y^2=1\}$ **上で定義された連続関数で、**$f(-x,-y) = f(x,y)$ **を満たすとする。単位円板**$D = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 1\}$ **上の関数**$g = g(x,y)$ **を**$g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}), ((x,y) \neq (0,0)), g(0,0) = 0$ **と定める。**

（1）$g(x,y)$ **は**D **上で連続であることを示せ。**

（2）積分$\int\int_D g(x,y)dxdy$ **を計算せよ。**

（解）（1）$(x,y) \neq (0,0)$ では連続。$g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) \overset{極座標}{=} \lim_{r\to 0} rf(\cos\theta, \sin\theta) = 0, g(0,0) = 0$ だから、$(0,0)$ でも連続。

（2）$\int\int_D g(x,y)dxdy \overset{極座標}{=} \int\int_{D'} rf(\cos\theta,\sin\theta)rdrd\theta, (D' = \{(r,\theta); 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\})$

$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

2．重積分$\int\int\int\int_V xwdxdydzdw, V = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 < x, 0 < y, 0 < z, 0 < w < 1\}$ **を計算せよ。**

（解）$\int\int\int\int_V xwdxdydzdw$

$= \int_0^1 (\int\int\int_{V'} xwdxdydz)dw, V' = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 < x, 0 < y, 0 < z\}$

$= \frac{1}{2}\int\int\int_{V'} xdxdydz, V' = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 < x, 0 < y, 0 < z\}$

ここで、球面座標 $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}, (0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2})$

に変数変換する。$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & 0 \\ r\cos\theta\cos\phi & r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\phi \end{vmatrix} = -r^2\sin\phi \to dxdydz = r^2\sin\phi drd\theta d\phi.$

$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\cos\theta\sin^2\phi d\theta d\phi dr = \frac{1}{32}\pi.$

（類題）重積分$\int\int\int_V |xyz|dxdydz, V = \{1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ **を計算せよ。**

（解）$8\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin^3\phi d\theta d\phi dr = \frac{21}{2}.$

3．定数R **に対して、**$D_R = \{\vec{x} = (x,y,z); r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} > R\}$ **とする。積分**$(i) \int_{D_R} \frac{e^{-|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}dxdydz (ii) \int_{D_R} \triangle(\frac{e^{-|\vec{x}|}}{|\vec{x}|})dxdydz$ **を**R **で表せ。但し、**$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

（解）(i) 球面座標で計算する。$8\int_R^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r}}{r}r^2\sin\phi d\theta d\phi dr = 4\pi e^{-R} + 4\pi Re^{-R}$

$(ii)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = -\frac{re^{-r}+e^{-r}}{r^3}x, \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \frac{r^2e^{-r}+3re^{-r}+3e^{-r}}{r^5}x^2 - \frac{re^{-r}+e^{-r}}{r^3} \to \triangle(\frac{e^{-|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}) = \frac{e^{-|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}$. 以下 (i) と同じ。

4．（1）変数変換 $\begin{cases} u = x+y+z \\ uv = y+z \\ uvw = z \end{cases}$ **について、関数行列式** $J\left(\frac{u,v,w}{x,y,z}\right) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$ **を計算せよ。**

（2）領域 $V = \{(u,v,w); 0 < u < 1, 0 < v < 1, 0 < w < 1\}$ **は（1）の変数変換でどのような領域に変換されるか。**

（3）重積分 $\int\int\int_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ **を計算せよ。但し、** $D = \{(x,y,z); x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z < 1\}$.

（解）（1）$\begin{cases} u - uv - uvw = x \\ uv - uvw = y \\ uvw = z \end{cases} \to J\left(\frac{u,v,w}{x,y,z}\right) = \begin{vmatrix} 1-v-vw & v-vw & vw \\ -u-uw & u-uw & uw \\ -uv & -uv & uv \end{vmatrix} = u^2v$

（2）$0 < x+y+z < 1, 0 < \frac{y+z}{x+y+z} < 1, 0 < \frac{z}{y+z} < 1 \to 0 < x+y+z < 1, 0 < x, 0 < y$

（3）$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(x^2+y^2+z^2)dzdydx = \frac{1}{20}$

$\int_0^{1-x-y}(x^2+y^2+z^2)dz = y^2 - y^3 - xy^2 - x^2y + x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-y-x)^3$

$\int_0^{1-x}(y^2 - y^3 - xy^2 - x^2y + x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-y-x)^3)dy = \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{6}$

$\int_0^1(\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{6})dx = \frac{1}{20}$

5．重積分 $I = \int\int_D \frac{1}{1-x^2y^2}dxdy, D = \{(x,y); 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ **を変数変換** $\begin{cases} u = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}\right) \\ v = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}\right) \end{cases}$ **を用いて以下のように計算せよ。ここで、領域** D **は** $D' = \{(u,v); u > 0, v > 0, u+v < \frac{\pi}{2}\}$ **に変換される。**

（1） x, y **を** u, v **で表せ。**

（2） I **を求めよ。**

（解）（1）$\begin{cases} \cos^2 u = \frac{1-x^2}{1-x^2y^2} \\ \cos^2 v = \frac{1-y^2}{1-x^2y^2} \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{\sin u}{\cos v} \\ y = \frac{\sin v}{\cos u} \end{cases}$

（2）$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin v \sin u}{\cos^2 u} \\ \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\sin^2 v \sin^2 u}{\cos^2 u \cos^2 v} = \frac{\cos^2 u \cos^2 v - \sin^2 v \sin^2 u}{\cos^2 u \cos^2 v}$

$\frac{1}{1-x^2y^2} = \frac{1}{1-(\frac{\sin u}{\cos v})^2(\frac{\sin v}{\cos u})^2} = \frac{1}{1-\frac{\sin^2 v \sin^2 u}{\cos^2 u \cos^2 v}} \to I = \int\int_D \frac{1}{1-x^2y^2}dxdy = \int\int_{D'} dudv = \frac{\pi^2}{8}$

6．累次積分で重積分 $\int\int_D xe^{-\frac{x^2(1+y^2)}{2}}\cos y dxdy, D = \{(x,y) : 0 < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$ **を求めよ。**

（解）$\int_0^\infty \cos y(\int_0^\infty xe^{-\frac{x^2(1+y^2)}{2}}dx)dy = \int_0^\infty \frac{\cos y}{1+y^2}dy \overset{「関数論」：コーシーの積分定理}{=} \frac{1}{2}\pi e^{-1}$

$\int_0^\infty xe^{-\frac{x^2(1+y^2)}{2}}dx = [-\frac{1}{(1+y^2)}e^{-\frac{x^2(1+y^2)}{2}}]_0^\infty = \frac{1}{(1+y^2)}$

7．行列$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$**、実ベクトル**$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **について、重積分**$\int\int_{R^2} e^{(A\vec{x}+\vec{a},\vec{x})}dxdy$ **の収束・発散を判定せよ。但し、**$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx < \infty$ **を用いてよい。**

（解）$ax^2 + (b+c)xy + dy^2 + \alpha x + \beta y$

$ax^2 + (b+c)xy + dy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$

$A' = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化する。固有値λ, μ、正規化された固有ベクトル $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}$ について、$T = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix}$ とすると、$T^tAT = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. そこで、変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を行うと、$ax^2 + (b+c)xy + dy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda X^2 + \mu Y^2$

$\to\ ax^2 + (b+c)xy + dy^2 + \alpha x + \beta y = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \alpha' X + \beta' Y = \lambda(X-k)^2 + \mu(Y-l)^2 + C$

$= \lambda\xi^2 + \mu\eta^2 + C.$

このときに、$dxdy = dXdY = d\xi d\eta \to \int\int_{R^2} e^{(A\vec{x}+\vec{a},\vec{x})}dxdy = C_0\int\int_{R^2} e^{\lambda\xi^2+\mu\eta^2}d\xi d\eta$

この積分が収束するには、$\lambda < 0, \mu < 0.$

8．$\int\int_{R^2} \frac{1}{(5+2x^2+2y^2)^2}dxdy$ **を計算せよ。**

（解）極座標で、$\int\int_{R^2} \frac{1}{(5+2x^2+2y^2)^2}dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \frac{r}{(5+2r^2)^2}drd\theta \overset{5+2r^2=s}{=} \frac{1}{10}\pi$

9．(1) $0 < r_1 < r_2 \leq 1$ **とし、**$\int_{r_1}^{r_2} x^r dr$ **を計算せよ。**

(2) $0 < p \leq q$ **として**$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\log x}dx$ **を求めよ。但し、以下の事実は用いて良い。**

(i)$[0,1]\times[p,q]$ **で定義された関数**$f = f(x,y) = \begin{cases} x^y, (0 < x \leq 1, p \leq y \leq q) \\ 0, (x =, p \leq y \leq q) \end{cases}$ **は連続関数である。**

(ii) 関数$f(x,y)$ **が**$[a,b]\times[c,d]$ **で連続ならば、**$\int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx = \int_c^d(\int_a^b f(x,y)dx)dy$ **が成り立つ。**

（解）（１）$\int_{r_1}^{r_2} x^r dr \overset{x^r=e^{r\log x}}{=} [\frac{x^r}{\log x}]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\log x}(x^{r_2} - x^{r_1})$

（２）$\frac{x^p}{\log x} - \frac{x^q}{\log x} = \int_q^p x^r dr \to \int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\log x} dx = \int_0^1 \int_q^p x^r dr dx = \int_q^p \int_0^1 x^r dx dr = \int_q^p \frac{1}{r+1} dr = \log \frac{p+1}{q+1}$

１０.（１）関数$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ のマクローリン展開を求めて、その収束半径を計算せよ。

（２）$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, (-1 < x < 1)$ **を求めよ。**

（３）**重積分**$\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-(x^2+y^2)}}, (D; x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}, x \geq 0, y \geq 0)$ **を求めよ。**

（解）（１）$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + ... + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^n + ..., (|x| < 1)$

（２）$\arcsin x$

（３）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{r}{r\sqrt{1-r^2}} dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\arcsin r]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} d\theta = \frac{1}{6}\pi^2$

１１.（１）$\int\int_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$ **を計算せよ。**

（２）$m > 0$ **とし、**$\int\int_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^m}$ **の収束・発散を調べよ。**

（３）$m > 0$ **とし、**$\int\int_D \frac{dxdy}{(1+x^2y^2)^m}$ **の収束・発散を調べよ。**

但し、$D = \{(x,y); x \geq 0, y \geq 0\}$ **である。**

（解）（１）$\int\int_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{r}{(1+r^2)^2} dr d\theta = -\frac{\pi}{4}[\frac{1}{1+r^2}]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$

（２）$\int\int_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{r}{(1+r^2)^m} dr d\theta \overset{m\neq1}{=} -\frac{\pi}{4(m-1)}[\frac{1}{(1+r^2)^{m-1}}]_0^{\infty} =$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4(m-1)}, m > 1 \\ \text{発散、} m < 1 \end{cases}$$

$m = 1, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{r}{(1+r^2)} dr d\theta = \frac{\pi}{4}[\log r^2]_0^{\infty}$、発散

（３）$\int\int_D \frac{dxdy}{(1+x^2y^2)^m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{r}{(1+r^4\cos^2\theta\sin^2\theta)^m} dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{r}{(1+\frac{r^4\sin^2 2\theta}{4})^m} dr d\theta$

$\overset{\frac{r^2\sin 2\theta}{2}=s, r\sin 2\theta dr = ds}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sin 2\theta(1+s^2)^m} ds d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin 2\theta} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+s^2)^m} dr$、発散

１２.実定数λ**について、**$D_\varepsilon = \{(x,y); \varepsilon \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ **として次の広義積分が収束するか判定せよ。**$(i) \lim_{\varepsilon\to0} \int\int_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}} dxdy (ii) \lim_{\varepsilon\to0} \int\int_{D_\varepsilon} \frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}} dxdy$

（解）$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$(i) \to \lim_{\varepsilon\to0} \int\int_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}} dxdy = \lim_{\varepsilon\to0} 2\pi \int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda} dr = \lim_{\varepsilon\to0} \frac{2\pi}{2-\lambda}(1-\varepsilon^{2-\lambda})$

$$= \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\lambda}, (2-\lambda > 0) \\ \infty, (2-\lambda < 0) \end{cases}, \lambda = 2, \lim_{\varepsilon\to0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 r^{-1} dr d\theta = \infty$$

$(ii) \to \int\int_{D_\varepsilon} \frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda} \log r dr d\theta = 2\pi\{-\frac{1}{2-\lambda}\varepsilon^{2-\lambda}\log\varepsilon - \frac{1}{(2-\lambda)^2}(1-\varepsilon^{2-\lambda})\}$

$= -\frac{2\pi}{(2-\lambda)^2} - \frac{2\pi}{2-\lambda}\varepsilon^{2-\lambda}(\log\varepsilon - \frac{1}{(2-\lambda)})$

$$\to \begin{cases} -\frac{2\pi}{(2-\lambda)^2}, (2-\lambda > 0) \\ \infty, (2-\lambda < 0) \end{cases}, \lambda = 2, \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{\log r}{r} dr d\theta = \pi[(\log r)^2]_\varepsilon^1 \to \infty$$

$\int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda}\log r dr = \frac{1}{2-\lambda}[r^{2-\lambda}\log r]_{r=\varepsilon}^{r=1} - \frac{1}{2-\lambda}\int_\varepsilon^1 r^{1-\lambda}dr = \frac{1}{2-\lambda}[r^{2-\lambda}\log r]_{r=\varepsilon}^{r=1} - \frac{1}{(2-\lambda)^2}[r^{2-\lambda}]_{r=\varepsilon}^{r=1}$

$= -\frac{1}{2-\lambda}\varepsilon^{2-\lambda}\log\varepsilon - \frac{1}{(2-\lambda)^2}(1-\varepsilon^{2-\lambda}).$

１３． $\Omega = \{(x,y); x>0, y>0\}$ **として、** Ω **から** Ω **への写像** $\Phi:(x,y)\to(u,v)$ **を** $\begin{cases} u = \frac{x^2}{y} \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases}$ **で定める。以下に答えよ。**

（1） Φ **の Jacobi 行列、Jacobi 行列式を求めよ。**

（2） $0<p<q, 0<r<s$ **に対して、** $D = \{(x,y); py \le x^2 \le qy, rx \le y^2 \le sx\}$ **とする。関数** $z = xy$ **の** D **上の重積分を計算せよ。**

（解）（1） $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3$

（３） $I = \int\int_D xydxdy = \frac{1}{3}\int\int_{D'} uvdudv, D' = \{(u,v); p\le u\le q, r\le v\le s\}$

$\to I = \frac{1}{3}\int_r^s(\int_p^q uvdu)dv = \frac{1}{12}(s-r)(r+s)(q-p)(p+q).$

１４． $D = \{(x,y); x\ge 0, y\ge 0, 1\le x+y\le 2\}$ **とする。以下に答えよ。**

（1）変数変換 $\begin{cases} x = u-uv \\ y = uv \end{cases}$ **によって、** xy **平面の領域** D **は** uv **平面のどのような図形に写されるか。**

（２）**Jacobi 行列式** $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ **を求めよ。**

（2）関数 $z = \frac{x^2}{(x+y)^3}$ **の** D **上の重積分を計算せよ。**

（解）（１） $1\le x+y\le 2 \to 1\le u-uv+uv\le 2 \to\to\to 1\le u\le 2$

$x\ge 0 \to u(1-v)\ge 0 \xrightarrow{1\le u\le 2} 1\ge v$

$y\ge 0 \to uv\ge 0 \xrightarrow{1\le u\le 2} v\ge 0$

（２） $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$

（３） $I = \int\int_D \frac{x^2}{(x+y)^3}dxdy = \int\int_{D'}\frac{(u-uv)^2}{(u)^3}ududv, D' = \{(u,v); 1\ge v\ge 0, 1\le u\le 2\}$

$\to I = \int_1^2\int_0^1(1-v)^2dvdu = \frac{1}{3}.$

１５． $D = \{(x,y); -1\le x\le 1, -1\le y-x\le 1\}$ **とする。関数** $z = \cos^2\pi(x-y)$ **の** D **上の重積分を計算せよ。**

（解）変数変換 $\begin{cases} u = y-x \\ v = y+x \end{cases}$ を行うと、 $\begin{cases} x = \frac{-u+v}{2} \\ y = \frac{u+v}{2} \end{cases}$ となり、Jacobi 行列式は、 $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$ であり、領域 D は、 $D = \{(u,v); -2+u\le v\le 2+u, -1\le u\le 1\}$ に移る。故に、積分の値$= \int\int_D \cos^2\pi(x-y)dxdy$

$= \frac{1}{2}\int\int_{D'}\cos^2\pi ududv = \frac{1}{2}\int_{-1}^1\cos^2\pi u(\int_{u-2}^{u+2}dv)du = 2\int_{-1}^1\cos^2\pi udu = 2.$

１６.（1）変数変換$\begin{cases} u=\log x-\log(1-x-y) \\ v=\log y-\log(1-x-y) \end{cases}$ **を用いて、積分**$I(\alpha,\beta)=\int\int_{R^2}(1+e^{-u}+e^{v-u})^{-\alpha-2}(1+e^{-v}+e^{u-v})^{-\beta-2}(e^{-u-v}+e^{-v}+e^{-u})dudv$ **が収束する**α,β **の範囲を求めよ。**

（2）$I(1,1)$ **を求めよ。**

(解)（1）$\begin{cases} u=\log x-\log(1-x-y)=\log\frac{x}{1-x-y} \\ v=\log y-\log(1-x-y)=\log\frac{y}{1-x-y} \end{cases} \to e^{-u}=e^{-\log\frac{x}{1-x-y}}=\frac{1-x-y}{x}, e^{-v}=\frac{1-x-y}{y},$

$v-u=\log y-\log x=\log\frac{y}{x}\to e^{v-u}=\frac{y}{x}$

$u-v=\log\frac{x}{y}\to e^{u-v}=\frac{x}{y}$

$-u-v=2\log(1-x-y)-\log x-\log y=\log\frac{(1-x-y)^2}{xy}\to e^{-u-v}=\frac{(1-x-y)^2}{xy}$

$\to(1+e^{-u}+e^{v-u})^{-\alpha-2}=(1+\frac{1-x-y}{x}+\frac{y}{x})^{-\alpha-2}=\left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha-2}=x^{\alpha+2}$

$(1+e^{-v}+e^{u-v})^{-\beta-2}=(1+\frac{1-x-y}{y}+\frac{x}{y})^{-\beta-2}=y^{\beta+2}$

$(e^{-u-v}+e^{-v}+e^{-u})=\frac{(1-x-y)^2}{xy}+\frac{1-x-y}{x}+\frac{1-x-y}{y}$

$=\frac{1}{xy}\left(y-y^2-xy\right)+\frac{1}{xy}\left(x-xy-x^2\right)+\frac{1}{xy}\left(2xy-2y-2x+x^2+y^2+1\right)=\frac{1-y-x}{xy}$

変数変換のヤコビアンは、

$\begin{cases} u=\log\frac{x}{1-x-y} \\ v=\log\frac{y}{1-x-y} \end{cases} \to \begin{cases} u_x=\frac{1-x-y}{x}\frac{1-x-y+x}{(1-x-y)^2}=\frac{1-y}{x(1-x-y)}, u_y=\frac{1-x-y}{x}\frac{x}{(1-x-y)^2}=\frac{1}{(1-x-y)} \\ v_x=\frac{1-x-y}{y}\frac{y}{(1-x-y)^2}=\frac{1}{(1-x-y)}, v_y=\frac{1-x-y}{y}\frac{1-x-y+y}{(1-x-y)^2}=\frac{1-x}{y(1-x-y)} \end{cases}$

$\to J\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)=\begin{vmatrix} \frac{1-y}{x(1-x-y)} & \frac{1}{(1-x-y)} \\ \frac{1}{(1-x-y)} & \frac{1-x}{y(1-x-y)} \end{vmatrix}=\frac{1-y-x}{xy(1-x-y)^2}=\frac{1}{xy(1-x-y)}\to\to\to J=xy(1-x-y)$

また、積分の範囲 R^2 は、$D;0<x,0<y,x+y<1$ に移る。

故に、$I(\alpha,\beta)=\int\int_D x^{\alpha+2}y^{\beta+2}(\frac{1-y-x}{xy})xy(1-x-y)dxdy=\int\int_D x^{\alpha+2}y^{\beta+2}(1-x-y)^2dxdy\to\alpha+2>-1,\beta+2>-1.$

（2）$I(1,1)=\int\int_D x^3y^3(1-x-y)^2dxdy=\int_0^1\int_0^{1-x}x^3y^3(1-x-y)^2dydx=\frac{1}{50\,400}.$

１８. 関数$f(x,y)$ **は、単位円周上**$C=\{(x,y);x^2+y^2=1\}$ **で定義された連続関数で、条件**$f(-x,-y)=-f(x,y)$ **を満たす。単位円板**$D=\{(x,y);x^2+y^2\leq 1\}$ **上の関数**g **を**$g(x,y)=\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}),(x,y)\neq(0,0) \\ 0,(x,y)=(0,0) \end{cases}$ **と定義する。以下に答えよ。**

（1）$g(x,y)$ **は**D **上で連続であることを示せ。**

（2）積分$\int\int_D g(x,y)dxdy$ **を求めよ。**

(解)（１）条件 $f(-x,-y)=-f(x,y)$ により、$f(0,0)=-f(0,0)$ から、$f(0,0)=0.\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})=0.$ 従って、関数 $g(x,y)$ は、$(0,0)$ で連続。それ以外の点で連続なことは明らか。

（2）$\int\int_D g(x,y)dxdy=\int\int_D\sqrt{x^2+y^2}f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2f(\cos\theta,\sin\theta)drd\theta$

$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 0.$

19.（1）$\alpha > -3, n = 1, 2, ...$ **として、積分**$I_n = \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr$ **について、**I_n **を**I_{n-1} **で表せ。**

（2）$\alpha > -3, n = 1, 2, ...$ **として、積分**$\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le 1}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\log(x^2+y^2+z^2))^n dxdydz$ **の収束・発散を調べ、収束するときには、その値を求めよ。**

(解)（1）$I_n = \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr = [\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}(\log r)^n]_0^1 - n\int_0^1 \frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}(\log r)^{n-1}\frac{1}{r}dr$

$= -\frac{n}{\alpha+3}\int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^{n-1}dr = -\frac{n}{\alpha+3}I_{n-1}.$

ここで、$\lim_{r\to 0}(\log r)^n r^{\alpha+3} = 0, (\alpha > -3, n = 1, 2, ...)$ に注意する。

（2）球面座標 $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$ に変換して、

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & 0 \\ r\cos\theta\cos\phi & r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\phi \end{vmatrix} = -r^2\sin\phi$$

$\to \int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le 1}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\log(x^2+y^2+z^2))^n dxdydz = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi\int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr = 8\int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr = 8I_n = 8(-\frac{n}{\alpha+3}I_{n-1}) = 8(-\frac{n}{\alpha+3})(-\frac{n-1}{\alpha+3}I_{n-2}) = ... = 8(-\frac{n}{\alpha+3})(-\frac{n-1}{\alpha+3})...(-\frac{1}{\alpha+3})I_0$

$= 8(-1)^n n!(\frac{1}{\alpha+3})^n\frac{1}{\alpha+3}.$

20.関数$f(x,y)$ **は、単位円周上**$C = \{(x,y); x^2+y^2 = 1\}$ **で定義された連続関数で、条件**$f(-x,-y) = -f(x,y)$ **を満たす。単位円板**$D = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}$ **上の関数**g **を**$g(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), (x,y) \ne (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$

と定義する。以下に答えよ。

（1）$g(x,y)$ **は**D **上で連続であることを示せ。**

（2）積分$\int\int_D g(x,y)dxdy$ **を求めよ。**

(解)（1）条件 $f(-x,-y) = -f(x,y)$ により、$f(0,0) = -f(0,0)$ から、$f(0,0) = 0. \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) = 0.$ 従って、関数 $g(x,y)$ は、$(0,0)$ で連続。それ以外の点で連続なことは明らか。

（2）$\int\int_D g(x,y)dxdy = \int\int_D \sqrt{x^2+y^2}f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 f(\cos\theta, \sin\theta)drd\theta$

$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 0.$

21.xy **平面上に不等式**$\begin{cases} x^2+y^2 \le a^2 \\ y \le x \end{cases}$ **で表される半円**D **がある。このときに、変数変換**$\begin{cases} u = x+y \\ v = xy \end{cases}$ **によりこの半円を**uv **平面に移す。このときにできる**uv **平面上の曲線の概形を描き、その閉曲線で囲まれる図形**D' **の面積を求めよ。**

(解) $a^2 = x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$

$x = y \to \begin{cases} u = x+x = 2x \\ v = xx = x^2 \end{cases} \to v = \frac{u^2}{4}.$ 故に、uv 平面の図形は二曲線

$a^2=u^2-2v, v=\frac{u^2}{4}$ で囲まれた領域となる。（図は省略）

面積は、$2\int_0^{\sqrt{2}a}(\frac{u^2}{4}-\frac{u^2}{2}+\frac{a^2}{2})du=\frac{2}{3}\sqrt{2}a^3.$

（別解）$\int\int_{D'} dudv=\int\int_D |J|dxdy.$ ここで、$J=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix}=$ $x-y$ だから、

$\int\int_D |J|dxdy=\int\int_D(x-y)dxdy=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^a r^2(\cos\theta-\sin\theta)drd\theta=\frac{2}{3}\sqrt{2}a^3.$

２２．(i) **変数変換**$u=\log x-\log(1-x-y), v=\log y-\log(1-x-y)$ **をおこなって、積分**$I(\alpha,\beta)=\int\int_{R^2}(1+e^{-u}+e^{v-u})^{-\alpha-2}(1+e^{-v}+e^{u-v})^{-\beta-2}(e^{-u}+e^{-v}+e^{-u-v})dudv$ **が収束するようなの範囲を求めよ。**

$(ii)I(1,1)$ **を求めよ。**

（解）(i)$\begin{cases} u=\log x-\log(1-x-y)=\log\frac{x}{1-x-y} \\ v=\log y-\log(1-x-y)=\log\frac{y}{1-x-y}\end{cases}\to\begin{cases} x=\frac{e^u}{1+e^v+e^u} \\ y=\frac{e^v}{1+e^v+e^u}\end{cases}$,

$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{x}{1-x-y}\right)=\frac{1}{x}\frac{y-1}{x+y-1}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\log\frac{x}{1-x-y}\right)=-\frac{1}{x+y-1} \\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{y}{1-x-y}\right)=-\frac{1}{x+y-1}, \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\log\frac{y}{1-x-y}\right)=\frac{1}{y}\frac{x-1}{x+y-1}\end{cases}$

$\to J=\begin{vmatrix}\frac{1}{x}\frac{y-1}{x+y-1} & -\frac{1}{x+y-1} \\ -\frac{1}{x+y-1} & \frac{1}{y}\frac{x-1}{x+y-1}\end{vmatrix}=\frac{1}{xy(1-x-y)}=\frac{(1+e^v+e^u)^3}{e^ue^v},$

$1+e^{-u}+e^{v-u}=\frac{1+e^v+e^u}{e^u}=\frac{1}{x}, 1+e^{-v}+e^{u-v}=\frac{1+e^v+e^u}{e^v}=\frac{1}{y}, e^{-u}+e^{-v}+e^{-u-v}=\frac{1+e^v+e^u}{e^ue^v}$

$\to(1+e^{-u}+e^{v-u})^{-\alpha-2}(1+e^{-v}+e^{u-v})^{-\beta-2}(e^{-u}+e^{-v}+e^{-u-v})dudv=(\frac{1}{x})^{-\alpha-2}(\frac{1}{y})^{-\beta-2}\frac{1+e^v+e^u}{e^ue^v}\frac{(1+e^v+e^u)^3}{e^ue^v}dxdy$

$=(\frac{1}{x})^{-\alpha-2}(\frac{1}{y})^{-\beta-2}\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(\frac{1}{y}\right)^2dxdy, (\frac{(1+e^v+e^u)^4}{(e^u)^2(e^v)^2}=\left(\frac{1+e^v+e^u}{e^u}\right)^2\left(\frac{1+e^v+e^u}{e^v}\right)^2=\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(\frac{1}{y}\right)^2)$

$R^2\to D; 0<x<1, 0<y<1, x+y<1$

$I(\alpha,\beta)=\int\int_D x^\alpha y^\beta dxdy\to -1<\alpha, -1<\beta$

(ii)$I(\alpha,\beta)=\int\int_D x^\alpha y^\beta dxdy=\frac{1}{(\beta+1)}\int_0^1 x^\alpha(\int_0^{1-x}y^{\beta+1}dy)dx=\frac{1}{(\beta+1)}\int_0^1 x^\alpha(1-x)^{\beta+1}dx$

$I(1,1)=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx=\frac{1}{24}$

２３．広義積分$I(a,b,c)=\int\int_{R^2}\frac{|\log(x^2+y^2)|^c}{(x^2+y^2)^a+(x^2+y^2)^b}(a>b>\frac{1}{2}, c\in R)$ **について以下に答えよ。**

$(i)I(a,b,c)<\infty$ **となるの条件を求めよ。**

（解）$\int\int_{R^2}\frac{|\log(x^2+y^2)|^c}{(x^2+y^2)^a+(x^2+y^2)^b}=2^c\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\frac{|\log r|^c}{(r^{2a}+r^{2b})}rdrd\theta=2^{c+1}\pi\int_0^\infty\frac{|\log r|^c}{(r^{2a}+r^{2b})}rdr$

$r\to\infty, 0<\frac{(\log r)^c}{(r^{2a-1}+r^{2b-1})}=\frac{(\log r)^c}{r^k(r^{2a-k-1}+r^{2b-k-1})}<\frac{\epsilon}{(r^{2a-k-1}+r^{2b-k-1})}<\frac{\epsilon}{r^{2a-k-1}}, (k>0)$

$\to 0<\int^\infty\frac{(\log r)^c}{(r^{2a}+r^{2b})}rdr<\int^\infty\frac{\epsilon}{r^{2a-1-k}}dr<\infty, if\quad 2+k<2a, (k>0)\to 1<a$

$\lim_{r\to\infty}\frac{\log r}{r^k}\overset{\log r=t}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{kt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{ke^{kt}}=0, (k>0)\to\frac{(\log r)^c}{r^k}\to 0$

$r \to 0, 0 < \frac{|\log r|^c}{(r^{2a-1}+r^{2b-1})} = \frac{(-\log r)^c}{r^{-k}(r^{2a+k-1}+r^{2b+k-1})} < \frac{\epsilon}{(r^{2a+k-1}+r^{2b+k-1})} < \frac{\epsilon}{r^{2b+k-1}}, (k > 0)$

$\lim_{r\to 0}\frac{\log r}{r^{-k}} \overset{\log r = t}{=} \lim_{t\to -\infty}\frac{t}{e^{-kt}} \overset{t=-s}{=} \lim_{s\to\infty}\frac{-s}{e^{ks}} = -\lim_{s\to\infty}\frac{1}{ke^{ks}}0, (k > 0) \to \frac{(-\log r)^c}{r^{-k}} \to 0$

$\to 0 < \int_0 \frac{(-\log r)^c}{(r^{2a}+r^{2b})} r dr < \int_0 \frac{\epsilon}{r^{2b+k-1}} dr < 0, if \quad 2 > 2b+k, (k > 0) \to 1 > b$

$(ii) I(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 0)$ の値を計算せよ。

（解）$I(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 0) = 2\pi\int_0^\infty \frac{r}{(r^{\frac{5}{2}}+r^{\frac{3}{2}})} dr = 2\pi\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r}(r+1)} dr = 2\pi^2, (\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r}(r+1)} dr \overset{r=s^2}{=} \int_0^\infty \frac{2s}{s(s^2+1)} ds = \int_0^\infty \frac{2}{(s^2+1)} ds = \pi)$

２５．領域$R = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y\}$ に質量が密度$\rho(x, y) = 1$ で分布しているときに、$(i)R$ の重心の座標を求めよ。$(ii)x$ 軸の周りの慣性モーメント$I_x = \int\int_R y^2\rho(x, y)dxdy$ を計算せよ。

（解）(i) 重心の座標を $(\bar{x}, \bar{y})$ とすると、重心の x 座標 $\bar{x}$ は、$\bar{x} = \frac{\int\int_R x\rho(x,y)dxdy}{\int\int_R \rho(x,y)dxdy} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}}. = \frac{4}{3\pi} = \bar{y}$

分母$= \int\int_R \rho(x, y)dxdy = \frac{\pi}{4}$, 分子$= \int\int_R x\rho(x, y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\cos\theta dr d\theta = \frac{1}{3}$

(ii)$I_x = \int\int_R y^2\rho(x, y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3 \sin\theta dr d\theta = \frac{1}{4}$

２６．積分$\int_0^1\int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dxdy$ で順序を変更して値を求めよ。

（解）$\int_0^1\int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dxdy = \int_0^1\int_0^x e^{\frac{y}{x}} dydx = \int_0^1 [xe^{\frac{y}{x}}]_{y=0}^{y=x} dx = e\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}e.$

２７．(i) 変数変換$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$ を行うとき、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$ を示せ。

但し、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ であり、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$ を用いよ。

$(ii)D$（$x^2 - y^2 = 2, x^2 - y^2 = 4, xy = 1, xy = \frac{1}{2}$ で囲まれた領域）における関数$(a)x^2 + y^2 (b)\frac{8xy}{(x^2+y^2)^3}$ の重積分を計算せよ。

（解）(i)$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \to \begin{cases} u_x = 2x, u_y = -2y \\ v_x = 2y, v_y = 2x \end{cases} \to \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2)$

$\to \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{4(x^2+y^2)} = \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}, u^2 + v^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2$

(ii)$D \to D' = \{2 \leq u \leq 4, \frac{1}{2} \leq v \leq 1\}$

$(a)\int\int_D (x^2 + y^2)dxdy = \int\int_{D'} \sqrt{u^2 + v^2}\frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}} dudv = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$(b)\int\int_D \frac{8xy}{(x^2+y^2)^3} dxdy = \int\int_{D'} \frac{4v}{\sqrt{u^2+v^2}^3}\frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}} dudv = \int_2^4\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{v}{(u^2+v^2)^2} dvdu = \frac{1}{2}\int_2^4 (\frac{1}{u^2+(\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{u^2+1})du$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1} 2 - \frac{3}{2}\tan^{-1} 4 + \tan^{-1} 8$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{v}{(u^2+v^2)^2} dv = \frac{1}{2}[-\frac{1}{u^2+v^2}]_{v=\frac{1}{2}}^{v=1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{u^2+(\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{u^2+1})$

$\int_2^4 \frac{1}{u^2+(\frac{1}{2})^2}du = 2[\tan^{-1} 2u]_2^4 = 2(\tan^{-1} 8 - \tan^{-1} 4)$, $\int_2^4 \frac{1}{u^2+1}du = [\tan^{-1} u]_2^4 = \tan^{-1} 4 - \tan^{-1} 2$

２８.(x, y, z) 空間に球面座標(r, θ, ϕ) を導入するときに、x, y, z をr, θ, ϕ で表せ。直交座標系で表される線素$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ を球面座標系で表される線素で表せ。

（解）$\left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} dx = \cos\theta\sin\phi dr - r\sin\theta\sin\phi d\theta + r\cos\theta\cos\phi d\phi \\ dy = \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi \\ dz = \cos\phi dr - r\sin\phi d\phi \end{array} \right.$

$(dx)^2 = \cos^2\theta\sin^2\phi(dr)^2 + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi(d\theta)^2 + r^2\cos^2\theta\cos^2\phi(d\phi)^2$
$-2r\cos\theta\sin\phi\sin\theta\sin\phi d\theta dr + 2r\cos\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi d\phi dr - 2r^2\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi d\theta d\phi$
$(dy)^2 = \sin^2\theta\sin^2\phi(dr)^2 + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi(d\phi)^2$
$+2r\sin\theta\sin\phi\cos\theta\sin\phi d\theta dr + 2r^2\cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi d\phi d\theta + 2r\sin\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi dr d\phi$
$(dz)^2 = \cos^2\phi(dr)^2 + r^2\sin^2\phi(d\phi)^2 - 2r\cos\phi\sin\phi d\phi dr$
$\rightarrow (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2\sin^2\phi(d\theta)^2 + r^2(d\phi)^2$

２９．xy 平面内の図形$y \leq \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ を軸の周りに回転してできる空間内の回転体をV とする。V の密度は一定であるとして、以下に答えよ。$(i)V$ の重心を求めよ。$(ii)V$ のx 軸の周りの慣性能率$I_x = \int\int\int_V (y^2 + z^2) dxdydz$ を計算せよ。

（解）回転体 V の方程式は $z^2 + y^2 = \sin^2 x$ である。

(i)V の体積は、$V = \int\int\int_V dxdydz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin x}\int_0^{\sqrt{\sin^2 x - y^2}} dzdydx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin x}\sqrt{\sin^2 x - y^2}dydx$
$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[y\sqrt{\sin^2 x - y^2} + \sin^2 x \sin^{-1}\left(\frac{y}{\sin x}\right)]_{y=0}^{y=\sin x}dx = \frac{\pi^2}{4}$.

重心 $G(X, Y, Z)$ の座標 $X = \frac{\int\int\int_V xdxdydz}{V}$ により、$\int\int\int_V xdxdydz$ を計算すると、

$\int\int\int_V xdxdydz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin x}\int_0^{\sqrt{\sin^2 x - y^2}} xdzdydx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin x} x\sqrt{\sin^2 x - y^2}dydx$
$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x[y\sqrt{\sin^2 x - y^2} + \sin^2 x\sin^{-1}\left(\frac{y}{\sin x}\right)]_{y=0}^{y=\sin x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}x\sin^2 xdx$
$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x - x\cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\{[\frac{x^2}{2} - \frac{x\sin 2x}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx\} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{8}\pi^2\right) \rightarrow$
$X = \frac{\frac{1}{16}\pi^3}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{4}\pi, Y = Z = 0$

(ii)$I_x = \int\int\int_V (y^2 + z^2)dxdydz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin x}\int_0^{\sqrt{\sin^2 x - y^2}}(y^2 + z^2)dzdydx = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin x}\sqrt{\sin^2 x - y^2}\left(2y^2 + \sin^2 x\right)dydx$

$\int_0^{\sqrt{\sin^2 x - y^2}}(y^2 + z^2)dz = [y^2 z + \frac{1}{3}z^3]_0^{\sqrt{\sin^2 x - y^2}} = y^2\sqrt{\sin^2 x - y^2} + \frac{1}{3}(\sqrt{\sin^2 x - y^2})^3$
$= \frac{1}{3}\sqrt{\sin^2 x - y^2}\left(3y^2 + \sin^2 x - y^2\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\sin^2 x - y^2}\left(2y^2 + \sin^2 x\right)$

$\int_0^{\sin x}\sqrt{\sin^2 x - y^2}\left(2y^2 + \sin^2 x\right)dy \overset{a=\sin x, y=a\sin\theta}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1 - \sin^2\theta)}\left(2a^2\sin^2\theta + a^2\right)a\cos\theta d\theta = \frac{3\pi}{8}a^4$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta(2\sin^2\theta + 1)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin^2 2\theta}{2} + \cos^2\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1 - \cos 4\theta}{4} + \frac{1 + \cos 2\theta}{2})d\theta = \frac{3\pi}{8}$

$I_x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx = \frac{1}{16}\pi^3$

３０．正の整数n **に対して、**n **次元空間における半径**a **の球の体積**$V_n(a) = \int\int ... \int_{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \le a^2} dx_1dx_2...dx_n$ **を考える。以下に答えよ。**

$(i)V_n(a)$ **が漸化式**$V_n(a) = aI_nV_{n-1}(a)$ **を満たすことを示せ。但し、**$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta$ **である。**

（解）$V_n(a) = \int\int ... \int_{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \le a^2} dx_1dx_2...dx_n = \int_{-a}^{a}(\int ... \int_{x_1^2+x_2^2+...+x_{n-1}^2 \le a^2-x_n^2} dx_1dx_2...dx_{n-1})dx_n$

$= \int_{-a}^{a} V_{n-1}(\sqrt{a^2-x_n^2})dx_n = \int_{-a}^{a} V_{n-1}(a)\left(\frac{\sqrt{a^2-x_n^2}}{a}\right)^{n-1} dx_n = \frac{V_{n-1}(a)}{a^{n-1}}\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{a^2-x_n^2}\right)^{n-1} dx_n$

$\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{a^2-x_n^2}\right)^{n-1} dx_n \overset{x_n=a\sin\theta, dx_n=a\cos\theta d\theta}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\theta)^{n-1} a\cos\theta d\theta = a^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta$

$\to V_n(a) = \frac{V_{n-1}(a)}{a^{n-1}} a^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta = aI_nV_{n-1}(a)$

$(ii)V_n(a)$ **を漸化式**$V_n(a) = a^2c_nV_{n-2}(a)$ **で表し、その係数**c_n **を求めよ。**

（解）$V_n(a) = aI_nV_{n-1}(a) = a^2I_nI_{n-1}V_{n-2}(a)$

$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos^{n-1}\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)'\cos^{n-1}\theta d\theta = [\sin\theta\cos^{n-1}\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^{n-2}\theta d\theta$

$= (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\cos^{n-2}\theta d\theta = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \to I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

$\to I_nI_{n-1} = \frac{n-1}{n}I_{n-2}\frac{n-2}{n-1}I_{n-3} = \frac{n-2}{n}I_{n-2}I_{n-3} = \frac{n-4}{n}I_{n-4}I_{n-5} = \frac{n-6}{n}I_{n-6}I_{n-7} = ... = \begin{cases} \frac{2}{2m}I_2I_1, n = 2m \\ \frac{1}{2m-1}I_1I_0, n = 2m-1 \end{cases}$

$\to c_n = \begin{cases} \frac{1}{m}I_2I_1 = \frac{\pi}{m}, n = 2m \\ \frac{1}{2m-1}I_1I_0 = \frac{2\pi}{2m-1}, n = 2m-1 \end{cases}, I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi, I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = 2, I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\pi$

$(iii)\lim_{n\to\infty} V_n(a)$ **を求めよ。**

（解）$V_n(a) = a^2c_nV_{n-2}(a) = a^4c_nc_{n-2}V_{n-4}(a) = a^6c_nc_{n-2}c_{n-4}V_{n-6}(a)$

$= ... = \begin{cases} a^{2m-2}c_{2m}c_{2m-2}c_{2m-4}....c_4V_2(a), n = 2m \\ a^{2m-2}c_{2m-1}c_{2m-3}c_{2m-5}....c_3V_1(a), n = 2m-1 \end{cases}$

$= \begin{cases} a^{2m-2}\left(\frac{\pi}{m}\right)\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\left(\frac{\pi}{m-2}\right)...\left(\frac{\pi}{2}\right)V_2(a), n = 2m \\ a^{2m-2}\left(\frac{2\pi}{2m-1}\right)\left(\frac{2\pi}{2m-3}\right)\left(\frac{2\pi}{2m-5}\right)...\left(\frac{2\pi}{3}\right)V_1(a), n = 2m-1 \end{cases} \to 0$

$(i)I_n = \int_{R^n} e^{-r^2}dx_1dx_2...dx_n (ii)I_n = \int_{R^n} e^{-r^2}dx_1dx_2...dx_n = nC_n\int_0^\infty e^{-r^2}r^{n-1}dr = C_n\Gamma(\frac{n}{2}+1)$

（解）$(i)I_n = \int_{R^n} e^{-r^2}dx_1dx_2...dx_n = \left(\int_{R^1} e^{-x^2}dx\right)^n = \sqrt{\pi}^n$

$(ii)I_n = \int_{R^n} e^{-r^2}dx_1dx_2...dx_n = \int_0^\infty(\int\int ... \int e^{-r^2}r^{n-1}F(\theta_1,\theta_2,..,\theta_{n-1})d\theta_1d\theta_2..d\theta_{n-1})dr$

$= \int_0^\infty e^{-r^2}r^{n-1}(\int\int ... \int F(\theta_1,\theta_2,..,\theta_{n-1})d\theta_1d\theta_2..d\theta_{n-1})dr$

$(C_n = \int_{V_n(1)} dx_1dx_2...dx_n = \int_0^1(\int\int ... \int r^{n-1}F(\theta_1,\theta_2,..,\theta_{n-1})d\theta_1d\theta_2..d\theta_{n-1})dr$

$= \int_0^1 r^{n-1}dr\int\int ... \int F(\theta_1,\theta_2,..,\theta_{n-1})d\theta_1d\theta_2..d\theta_{n-1} = \frac{1}{n}\int\int ... \int F(\theta_1,\theta_2,..,\theta_{n-1})d\theta_1d\theta_2..d\theta_{n-1}$

$\to \int\int ... \int F(\theta_1,\theta_2,..,\theta_{n-1})d\theta_1d\theta_2..d\theta_{n-1} = nC_n)$

$= nC_n \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr \overset{s=r^2, ds=2rdr}{=} nC_n \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2s^{\frac{1}{2}}} ds = \frac{n}{2} C_n \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1} ds =$
$\frac{n}{2} C_n \Gamma(\frac{n}{2}) \overset{(*)}{=} C_n \Gamma(\frac{n}{2}+1)$

$\to \sqrt{\pi}^n = C_n \Gamma(\frac{n}{2}+1) \to C_n = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!}, n = 2m \\ \frac{4(2\pi)^{m-1}}{(2m-1)(2m-3)...(3)(1)}, n = 2m-1 \end{cases},$

$\Gamma(\frac{n}{2}+1) = \int_0^\infty e^{-r} r^{\frac{n}{2}} dr = [-e^{-r} r^{\frac{n}{2}}]_0^\infty + \frac{n}{2} \int_0^\infty e^{-r} r^{\frac{n}{2}-1} dr \overset{(*)}{=} \frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2}) =$
$\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1) = ...$

$= \begin{cases} (\frac{n}{2})!\Gamma(1) = (\frac{n}{2})! = m!, n = 2m \\ \frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)...(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) = (\frac{2m-1}{2})(\frac{2m-3}{2})...(\frac{1}{2})\frac{\sqrt{\pi}}{4}, n = 2m-1 \end{cases},$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-r} dr = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-r} r^{-\frac{1}{2}} dr \overset{r=s^2, dr=2sds}{=} \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-s^2} s^{-1} s ds =$
$\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

３２.（１）xy 平面上で原点を中心とし、半径a の円のうちで直線$y = x$ より下にある部分をD とする。この部分を座標変換$\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$ によってuv 平面に写すときに、その図形D' の概形を描きその面積を計算せよ。

（２）（１）の変数変換で$f(x, y) = g(u, v)$ とする。このときに、g_u, g_v をx, y, f_x, f_y で表せ。

（３）（２）で関数$f(x, y)$ が$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみの関数になっている場合に、f_x, f_y の間に成り立つ関係式を出せ。

（解）（１）$x^2 + y^2 = a^2 \to (x + y)^2 - 2xy = a^2 \to u^2 - 2v = a^2$

$y = x \to \begin{cases} u = 2x \\ v = x^2 \end{cases} \to v = \frac{u^2}{4} \to D' = \{(u, v); u^2 - 2v \le a^2, v \ge \frac{u^2}{4}\}$

面積は、$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (\frac{u^2}{4} - \frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{2}) du = a^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}}$

（２）$\begin{cases} f_x = g_u u_x + g_v v_x = g_u + y g_v \\ f_y = g_u u_y + g_v v_y = g_u + x g_v \end{cases} \to \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 1 & x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x f_x - y f_y}{x - y} \\ \frac{f_y - f_x}{x - y} \end{pmatrix}$

（３）$f(x, y) = g(u, v) = F(\sqrt{u^2 - 2v})$

$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{uF'}{\sqrt{u^2-2v}} \\ \frac{-F'}{\sqrt{u^2-2v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{xF'}{\sqrt{u^2-2v}} \\ \frac{yF'}{\sqrt{u^2-2v}} \end{pmatrix} \to y f_x = x f_y$

３３．xy 平面内の長方形領域K での重積分$\int\int_K f(x, y) dxdy$ を考える。以下に答えよ。

（１）変数x, y を$\begin{cases} x = Ap + Bq \\ y = Cp + Dq \end{cases}$ で変数変換する。領域K がpq 平面の領域K' に１対１に対応しているとし、$\int\int_K f(x, y) dxdy = \int\int_{K'} f(Ap + Bq, Cp + Dq) J dpdq$ が成り立つ場合に、$J = |AD - BC|$ であることを示せ。

（解）$\begin{cases} x = Ap + Bq \\ y = Cp + Dq \end{cases} \to \begin{cases} x_p = A, x_q = B \\ y_p = C, y_q = D \end{cases} \to \frac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)} = \begin{vmatrix} x_p & x_q \\ y_p & y_q \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \to J = |AD - BC|$

（２）一般に、変数変換$\begin{cases} x = \phi(p,q) \\ y = \psi(p,q) \end{cases}$ **により、領域**K **が**pq **平面の領域**K' **に１対１に対応しているとし、**$\int\int_K f(x,y)dxdy = \int\int_{K'} f(\phi(p,q),\psi(p,q))Jdpdq$ **が成り立つ場合**J **を求めよ。**

（解）$\begin{cases} x = \phi(p,q) \\ y = \psi(p,q) \end{cases} \to \begin{cases} x_p = \phi_p(p,q), x_q = \phi_q(p,q) \\ y_p = \psi_p(p,q), y_q = \psi_q(p,q) \end{cases} \to \frac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)} = \begin{vmatrix} \phi_p(p,q) & \phi_q(p,q) \\ \psi_p(p,q) & \psi_q(p,q) \end{vmatrix} = \phi_p\psi_q - \phi_q\psi_p$

$\to J = |\phi_p\psi_q - \phi_q\psi_p|$

（３）（２）でpq **座標系が極座標系である場に**$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ **として、積分**$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = I$ **を求めよ。**

（解）$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \to \begin{cases} x_r = \cos\theta, x_\theta = -r\sin\theta \\ y_r = \sin\theta, y_\theta = r\cos\theta \end{cases} \to \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}rdrd\theta = 2\pi[-\frac{e^{-r^2}}{2}]_0^{\infty} = \pi \to I = \sqrt{\pi}$

（４）xy **座標系と**pq **座標系とで線素の長さが**$dx^2+dy^2 = g_{pp}dp^2+2g_{pq}dpdq+g_{qq}dq^2$ **となる場合、２つの座標系での積分が（２）における式と同様に表現されるとするとき、**J **と**g_{pp}, g_{qq}, g_{pq} **の関係を求めよ。**

（解）$\begin{cases} x = \phi(p,q) \\ y = \psi(p,q) \end{cases} \to \begin{cases} dx = \phi_p dp + \phi_q dq \\ dy = \psi_p dp + \psi_q dq \end{cases} \to dx^2 + dy^2 = (\phi_p dp + \phi_q dq)^2 + (\psi_p dp + \psi_q dq)^2$

$= (\phi_p^2+\psi_p^2)dp^2+2(\phi_p\phi_q+\psi_p\psi_q)dpdq+(\phi_q^2+\psi_q^2)dp^2 \to \begin{cases} g_{pp} = \phi_p^2 + \psi_p^2 \\ g_{pq} = \phi_p\phi_q + \psi_p\psi_q \\ g_{qq} = \phi_q^2 + \psi_q^2 \end{cases} \to g_{pp}g_{qq} - g_{pq}^2 = J^2$

３４．ガンマ関数$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-s}s^{x-1}ds$**、ベータ関数**$B(x,y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds$ **は、このように定義される。以下に答えよ。**

（１）$\Gamma(x)$ **で**$s = \eta^2$**、**$\Gamma(y)$ **で**$s = \xi^2$ **の変数変換を行い、**$\Gamma(x)\Gamma(y)$ **を二重積分で表せ。**

（解）$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-s}s^{x-1}ds \overset{s=\eta^2,ds=2\eta d\eta}{=} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2}(\eta^2)^{x-1}2\eta d\eta = 2\int_0^{\infty} e^{-\eta^2}\eta^{2x-1}d\eta$

$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} e^{-s}s^{y-1}ds \overset{s=\xi^2,ds=2\xi d\xi}{=} 2\int_0^{\infty} e^{-\xi^2}\xi^{2y-1}d\xi \to \Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(\eta^2+\xi^2)}\eta^{2x-1}\xi^{2y-1}d\xi d\eta$

（２）（１）の二重積分を極座標(r,θ) **で表せ。**

（解）$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(\eta^2+\xi^2)}\eta^{2x-1}\xi^{2y-1}d\xi d\eta$

$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2x-1}(r\sin\theta)^{2y-1}rd\theta dr$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{\infty} e^{-r^2}r^{(2x+2y-2)}rdr)\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta d\theta$

$= 4(\int_0^{\infty} e^{-r^2}r^{(2x+2y-2)}rdr)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta d\theta)$

（３）（２）のθ **成分を**$s^{\frac{1}{2}} = \sin\theta$ **として関係式**$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y)$ **を示せ。**

（解）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-2}\theta \sin^{2y-1}\theta \cos\theta d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^{x-1} \sin^{2y-1}\theta \cos\theta d\theta \overset{s^{\frac{1}{2}}=\sin\theta, s=\sin^2\theta, ds=2\sin\theta\cos\theta d\theta}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^{x-1} s^{y-1} ds = \frac{B(x,y)}{2}$

$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{(2x+2y-2)} r dr \overset{s=r^2, ds=2rdr}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-s} s^{x+y-1} dr = \frac{\Gamma(x+y)}{2}$

（類題）（１）定数$h, (h > 0)$ **について、**$D_h = \{(x,y); 0 \le x+y \le h, x \ge 0, y \ge 0\}$ **とする。変数変換**$\begin{cases} x = ts \\ y = t(1-s) \end{cases}$ **を用いて**$\int\int_{D_h} f(x+y) x^{p-1} y^{q-1} dxdy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^h f(t) t^{p+q-1} dt$ **を示せ。**

（２）$V_1 = \{(x,y,z); 0 \le x+y+z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$ **とする。**$\int\int\int_{D_1} f(x+y+z) x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dxdydz = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)} \int_0^1 f(t) t^{p+q+r-1} dt$ **を示せ。**

（解）（１）$\begin{cases} x = ts \\ y = t(1-s) \end{cases}, J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} = \begin{vmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & t \\ 1-s & -t \end{vmatrix} = -t.$

$D_h = \{(x,y); 0 \le x+y \le h, x \ge 0, y \ge 0\} \to D'_h = \{(s,t); 0 \le t \le h, 1 \ge s \ge 0\}$

$\int\int_{D_h} f(x+y) x^{p-1} y^{q-1} dxdy = \int\int_{D'_h} f(t)(ts)^{p-1}(t(1-s))^{q-1} t dtds = \int_0^1 (\int_0^h f(t) t^{p+q-1} dt) s^{p-1}(1-s)^{q-1} ds = B(p,q)\int_0^h f(t) t^{p+q+r-1} dt$

$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^h f(t) t^{p+q-1} dt$

（２）$\int\int\int_{D_1} f(x+y+z) x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dxdydz = \int_0^1 \left(\int\int_{D_{1-z}} f(x+y+z) x^{p-1} y^{q-1} dxdy \right) z^{r-1} dz$

$= \int_0^1 \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} (\int_0^{1-z} f(t+z) t^{p+q-1} dt) z^{r-1} dz = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 \int_0^{1-z} f(t+z) t^{p+q-1} z^{r-1} dtdz = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int\int_{D_1} f(t+z) t^{p+q-1} z^{r-1} dtdz$

$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)} \int_0^1 f(t) t^{p+q+r-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)} \int_0^1 f(t) t^{p+q+r-1} dt$

３５．楕円放物面$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ **と、平面**$z = cx$ **とで囲まれた部分の体積**V **を以下の手順で計算せよ。但し、**$a, b, c (> 0)$ **は定数。**

（１）この部分に含まれる(x,y) **が満たす不等式を導け。**

（解）$\begin{cases} z \le \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \\ z \le cx \end{cases} \to D = \{(x,y); cx \ge \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\}$

（２）体積V **を**xy **についての重積分で表せ。**

（解）$\int\int_D cx dxdy$

（３）（２）の重積分を変数変換$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ **によって、**(r,θ) **に変換する。体積**V **を**r, θ **に関する重積分で表せ。**

（解）$D = \{(x,y); cx \ge \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\} \xrightarrow{\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}} car\cos\theta \ge \left(\frac{ar\cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{br\sin\theta}{b}\right)^2 = r^2$

$J = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr \to \int\int_D cx dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{ca\cos\theta} a^2 bcr^2 \cos\theta drd\theta$

（4）（3）の積分を計算せよ。

（解）$\int\int_D cxdxdy = \frac{2}{3}a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,(ca\cos\theta)^3\,d\theta = \frac{2}{3}a^5bc^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta = \frac{1}{8}\pi a^5bc^3$

（5）定数a, b, c **が関係式**$\begin{cases} a+b=2 \\ b=c \end{cases}$ **を満たす場合に体積**V **の最大値を求めよ。**

（解）$\frac{1}{8}\pi a^5bc^3 = \frac{1}{8}\pi(2-b)^5b^4 = f(b) \to f'(b) = \frac{1}{8}\pi\{4(2-b)^5b^3 - 5(2-b)^4b^4\} = \frac{1}{8}\pi(2-b)^4b^3\{4(2-b)-5b\}$

$= \frac{1}{8}\pi b^3\,(b-2)^4\,(8-9b) \to b = \frac{8}{9}, f'(b) = 0 \to$ 関数 $f(b)$ は最大値 $\frac{1}{8}\pi(2-\frac{8}{9})^5(\frac{8}{9})^4 = \frac{8^3\cdot(10)^5\pi}{9^9}$ を取る。

３６．積分$\int_0^1\int_y^1 \frac{1+2y+9y^8}{1+x+x^8}dxdy$ **で順序を変更して値を求めよ。**

（解）$\int_0^1\int_y^1 \frac{1+2y+9y^8}{1+x+x^8}dxdy = \int_0^1\int_0^x \frac{1+2y+9y^8}{1+x+x^8}dydx = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^8}\int_0^x(1+2y+9y^8)dydx = \int_0^1 \frac{x^9+x^2+x}{1+x+x^8}dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$

３７．（1）積分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\cos\theta)^2}d\theta$ **を変数変換**$t=\tan\frac{\theta}{2}$ **で求めよ。**

（解）$t = \tan\frac{\theta}{2} \to \begin{cases} \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 2\frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1} = \frac{2}{1+t^2} \\ \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ dt = \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta = \frac{1+t^2}{2}d\theta \end{cases}$

$\to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\cos\theta)^2}d\theta = \int_0^1 \frac{1}{(1+\frac{2}{1+t^2})^2}\frac{2}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{(\frac{3+t^2}{1+t^2})^2}\frac{2}{1+t^2}dt = 2\int_0^1 \frac{1+t^2}{(3+t^2)^2}dt \overset{t=\sqrt{3}\tan u, dt=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}du}{=}$

$= \frac{2}{9}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+3\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}du = \frac{2\sqrt{3}}{9}(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1+\tan^2 u)^2}\frac{1}{\cos^2 u}du + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\frac{1}{\cos^2 u}du) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{4}{6}\pi = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1+\tan^2 u)^2}\frac{1}{\cos^2 u}du = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 udu = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3}$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\frac{1}{\cos^2 u}du = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 udu = \frac{1}{2}\pi - \frac{3}{8}\sqrt{3}$

（2）xy **平面上の図形**D **の面積**S **は積分**$S = \int\int_D dxdy$ **で与えられる。極座標**(r,θ) **を用いて、図形**D **を**$\{(r,\theta); g(\theta) \le r \le f(\theta), a \le \theta \le b\}, (-\pi \le a, b \le \pi)$ **と表示できる場合に、変数変換をして重積分を計算することで、この図形**D **の面積**S **を**g, f **を使ってできる関数の定積分で表せ。ここで、**g, f **を使ってできる関数とは、例えば、**$gf, f^3, \log f$ **等のような関数をいう。**

（解）$\int\int_D dxdy = \int_a^b\int_{g(\theta)}^{f(\theta)} rdrd\theta = \int_a^b[\frac{r^2}{2}]_{g(\theta)}^{f(\theta)}d\theta = \int_a^b \frac{f^2(\theta)-g^2(\theta)}{2}d\theta$

（3）極座標を用いて表される２つの曲線$\begin{cases} C_1; r = 1+\cos\theta, (-\pi \le \theta \le \pi) \\ C_2; r = \frac{1}{1+\cos\theta}, (-\pi < \theta < \pi) \end{cases}$ **があり、原点から見て曲線**C_1 **の内部かつ曲線**C_2 **の外部である部分の面積を計算せよ。**

（解）（2）により、$2\int_0^{\pi} \frac{(1+\cos\theta)^2 - (\frac{1}{1+\cos\theta})^2}{2}d\theta = \int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta - \int_0^{\pi}(\frac{1}{1+\cos\theta})^2d\theta = \frac{3}{2}\pi - \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

$\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta = \frac{3}{2}\pi$

$\int_0^{\pi}(\frac{1}{1+\cos\theta})^2d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{1+\cos\theta})^2d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\frac{1}{1+\cos\theta})^2d\theta = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27} + \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{(1+\cos\theta)^2}d\theta = \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{2}{1+t^2})^2}\frac{2}{1+t^2}dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{(\frac{3+t^2}{1+t^2})^2}\frac{2}{1+t^2}dt = 2\int_1^{\infty} \frac{1+t^2}{(3+t^2)^2}dt \overset{t=\sqrt{3}\tan u, dt=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}du}{=}$

$= \frac{2}{9}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+3\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}du = \frac{2\sqrt{3}}{9}(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2 u)^2}\frac{1}{\cos^2 u}du + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\frac{1}{\cos^2 u}du) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{4}{12}\pi = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2 u)^2}\frac{1}{\cos^2 u}du = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{1}{12}\pi - \frac{1}{8}\sqrt{3}$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\frac{1}{\cos^2 u}du = 3\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du = \frac{1}{4}\pi + \frac{3}{8}\sqrt{3}$

３８．座標変換$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ **を考える。**

（1）この変換によるヤコビアンは、$J = r^2\sin\theta$ **であることを計算せよ。**

（2）密度ρ **が**$\rho = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **で与えられる半球**$x^2+y^2+z^2 \le a^2, z > 0 (a > 0)$ **の質量と重心を計算せよ。**

（解）（１）$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix}$

$= r^2\cos^2\theta\cos^2\phi\sin\theta + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi\sin\theta + r^2\cos^2\phi\sin^3\theta + r^2\sin^2\phi \sin^3\theta = r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta$

（２）質量 $M = \int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le a^2, z>0} k\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} kr^3\sin\theta d\theta d\phi dr = \frac{1}{2}\pi a^4 k$

重心 $G(X,Y,Z) \to X = Y = 0, Z = \frac{\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le a^2, z>0} kz\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz}{M} = \frac{\frac{1}{5}\pi a^5 k}{\frac{1}{2}\pi a^4 k} = \frac{2}{5}a$

$\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le a^2, z>0} kz\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} kr^4\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi dr = \frac{1}{5}\pi a^5 k$

３９.（1）変数変換$\begin{cases} u = x+y \\ uv = x \end{cases}$ **を行って、**$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy = \int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}du\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv$ **を証明せよ。**

（2）$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx$ **として、**$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ **を証明せよ。**

（解）（１）$\begin{cases} u = x+y \\ uv = x \end{cases} \to \begin{cases} y = u(1-v) \\ x = uv \end{cases}$ $, J = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = |\begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix}| = u$

$A_n = \{(x,y); \frac{1}{n} \le x+y \le n, \frac{1}{n-1} \le y \le (n-1)x\} \Leftrightarrow B_n = \{(u,v); \frac{1}{n} \le u \le n, \frac{1}{n} \le v \le 1-\frac{1}{n}\}$

$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy = \lim_{n\to\infty}\int\int_{A_n} e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy = \lim_{n\to\infty}\int\int_{B_n} e^{-u}(uv)^{p-1}(u(1-v))^{q-1}ududv$

$= \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^n e^{-u}u^{p+q-1}du \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv = \int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}du\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv$

（２）$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy}{\int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}du} = \frac{\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx\int_0^\infty e^{-x}x^{q-1}dx}{\int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}du} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

４０．行列$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$**、ベクトル**$\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **につい**

て、二重積分$\int\int_{x+y>0} e^{(A\vec{x}+\vec{b},\vec{x})}dxdy$ **の収束・発散を調べよ。但し、**$(\quad,\quad)$ **は通常の内積を表す。必要ならば、**$\int_0^\infty e^{-x^2}dx < \infty$ **を用いてよい。**

（解）$(A\vec{x}+\vec{b},\vec{x}) = -x^2+2xy-y^2+bx+cy = -(x-y)^2+bx+cy$

変数変換 $\left\{\begin{array}{l} u = x+y \\ v = x-y \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{array}\right., \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left|\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right| = -\frac{1}{2}$

$\int\int_{x+y>0} e^{(A\vec{x}+\vec{b},\vec{x})}dxdy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{-u^2+\frac{b+c}{2}u+\frac{b-c}{2}v}dvdu = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{-(u-\frac{b+c}{4})^2-(\frac{b+c}{4})^2+(\frac{b-c}{2})v}dvdu = \frac{1}{2}e^{-(\frac{b+c}{4})^2}\int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}ds\int_0^\infty e^{(\frac{b-c}{2})v}dv$

故に、(i)$\frac{b-c}{2} \geq 0 \to \int_0^\infty e^{(\frac{b-c}{2})v}dv$（発散）(ii)$\frac{b-c}{2} < 0 \to \int_0^\infty e^{(\frac{b-c}{2})v}dv$（収束）

４１．関数$f(t)$ **が**$[0,\infty)$ **上で定義された連続な実数値関数で広義積分**$\int_0^\infty f(t)dt$ **が収束するとする。**

（１）$\int\int_{R^2} f(x^2+y^2)dxdy = \pi\int_0^\infty f(t)dt$ **を示せ。**

（２）定数a,b,c **が**$a>0, b^2-ac<0$ **を満たすときに、**$\int\int_{R^2} f(ax^2+2bxy+cy^2)dxdy$ **を**$\int_0^\infty f(t)dt$ **で表せ。**

（解）（１）極座標で座標変換すると、$\int\int_{R^2} f(x^2+y^2)dxdy = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(r^2)rd\theta dr$

$= 2\pi\int_0^\infty f(r^2)rdr = 2\pi\int_0^\infty f(r^2)rdr \overset{r^2=s,2rsr=ds}{=} \pi\int_0^\infty f(s)ds$

（２）$ax^2+2bxy+cy^2 = \vec{x}^tA\vec{x}, A = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array}\right), \vec{x} = \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)$. ここで、対称行列 A を直交行列 T で対角化して、$T^tAT = D, D = \left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{array}\right)$ とする。但し、α,β は A の固有値。このときに、変数変換 $\vec{x} = T\vec{X}, \vec{X} = \left(\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}\right)$ を行うと、

$ax^2+2bxy+cy^2 = \vec{x}^tA\vec{x} = \vec{X}^tD\vec{X} = \alpha X^2+\beta Y^2, \frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)} = |T| = 1.$

以上により、$\int\int_{R^2} f(ax^2+2bxy+cy^2)dxdy = \int\int_{R^2} f(\alpha X^2+\beta Y^2)dXdY.$

次に、座標変換 $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\alpha}X = \xi \\ \sqrt{\beta}Y = \eta \end{array}\right.$ を行うと、$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(\xi,\eta)} = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{c}{a}}$ だから、

$\int\int_{R^2} f(\alpha X^2+\beta Y^2)dXdY = \sqrt{\frac{c}{a}}\int\int_{R^2} f(\xi^2+\eta^2)d\xi d\eta = \pi\sqrt{\frac{c}{a}}\int_0^\infty f(t)dt$

４２．関数$f = f(x,y) = \frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ **について、**$D = \{(x,y); 0<x,y\leq 1\}$ **とする。**

（１）$D_j = \{(x,y); \frac{1}{j}<x,y\leq 1\}$ **とするときに、**$\lim_{j\to\infty}\int\int_{D_j} f(x,y)dxdy$ **を求めよ。**

（２）$E_j = \{(x,y); \frac{1}{j^2}\leq x\leq 1, \frac{1}{j}\leq y\leq 1\}$ **とするときに、**$\lim_{j\to\infty}\int\int_{E_j} f(x,y)dxdy$ **を求めよ。**

（３）広義積分は定義できないことを示せ。

（解）（１）$\int\int_{D_j} f(x,y)dxdy = \int_{\frac{1}{j}}^1(\int_{\frac{1}{j}}^1(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})dy)dx = \int_{\frac{1}{j}}^1(\frac{1}{x}-\frac{1}{xj}-\log j)dx = [(1-\frac{1}{j})\log x - x\log j]_{\frac{1}{j}}^1$

$= -\log j - \{(1-\frac{1}{j})\log\frac{1}{j}-\frac{1}{j}\log j\} = 0$

（２）$\int\int_{E_j} f(x,y)dxdy = \int_{\frac{1}{j^2}}^1 (\int_{\frac{1}{j}}^1 (\frac{1}{x} - \frac{1}{y})dy)dx = \int_{\frac{1}{j^2}}^1 (\frac{1}{x} - \frac{1}{xj} - \log j)dx = [(1-\frac{1}{j})\log x - x\log j]_{\frac{1}{j^2}}^1$

$= -\log j - \{(1-\frac{1}{j})\log\frac{1}{j^2} - \frac{1}{j^2}\log j\} = -\log j + \frac{2(j-1)}{j}\log j + \frac{1}{j^2}\log j = \frac{1-j^2+2(j-1)j}{j^2}\log j = \frac{(j-1)^2}{j^2}\log j \to \infty$

（３）（１）、（２）から領域の近似列によって、極限値が異なり広義積分は定義できない。

４３．(i) 積分$\int_0^1(\int_1^\infty(e^{-xy} - 2e^{-2xy})dx)dy$ **の値は正に収束することを示せ。**

(ii) 積分$\int_1^\infty(\int_0^1(e^{-xy} - 2e^{-2xy})dy)dx$ **の値は負に収束することを示せ。**

(解) (i)$\int_0^1(\int_1^\infty(e^{-xy} - 2e^{-2xy})dx)dy = \int_0^1[-\frac{e^{-xy}}{y} + \frac{e^{-2xy}}{y}]_{x=1}^{x=\infty}dy = -\int_0^1(\frac{e^{-2y}}{y} - \frac{e^{-y}}{y})dy = \int_0^1 \frac{e^{-y}}{y}(1-e^{-y})dy$

ここで、区間 $(0,1)$ で $(1-e^{-y}) > 0$ であり、また、$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}(1-e^{-y}) = \lim_{y\to 0} e^{-y} = 1$ だから、積分は正の値に収束する。

(ii)$\int_1^\infty(\int_0^1(e^{-xy} - 2e^{-2xy})dy)dx = \int_1^\infty[-\frac{e^{-xy}}{x} + \frac{e^{-2xy}}{x}]_{y=0}^{y=1}dx = \int_1^\infty\{(\frac{e^{-2x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x}) - (\frac{1}{x} - \frac{1}{x})\}dx = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}(e^{-x}-1)dx$

ここで、区間 $(1,\infty)$ で $(e^{-x}-1) < 0$ であり、また、$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ から、$\lim_{x\to\infty}$ で不等式 $\frac{e^{-x}}{x} < \frac{1}{x^2}$ が成り立つから、積分は収束し、正である。

４４．自然数n **について、**$I_n = \int\int_{R^2}(x+y)^n(x-y)^n e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ **とする。以下に答えよ。**

（１）$I_n = \frac{1}{2}\left(\int_R t^n e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2$ **を示せ。**

（２）$I_n = \begin{cases} 0, n; odd \\ 2^n\Gamma^2(\frac{n+1}{2}), n; even \end{cases}$ **を示せ。但し、**$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx, (s > 0)$.

(解)（１）$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$

$I_n = \int\int_{R^2}(x+y)^n(x-y)^n e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{R^2} u^n v^n e^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}}dxdy = \frac{1}{2}\left(\int_R u^n e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)\left(\int_R v^n e^{-\frac{v^2}{2}}dv\right)$

（２）(i)$n; even \to \int_R t^n e^{-\frac{t^2}{2}}dt \overset{\frac{t^2}{2}=x, tdt=dx}{=} 2\int_0^\infty e^{-x}(2x)^{\frac{n-1}{2}}dx = 2^{\frac{n+1}{2}}\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{n-1}{2}}dx = 2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})$

$\to I_n = \frac{1}{2}(2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2}))^2 = 2^n\Gamma^2(\frac{n+1}{2})$

(ii)$n; odd \to \int_R u^n e^{-\frac{u^2}{2}}du = 0$

４５．$D = \{(x,y); 0 < r = \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$ **上の非負連続関数**$f = f(x,y)$ **について以下に答えよ。**

（１）極限値$I(f) = \lim_{t\to+0}\int\int_{t\leq r\leq 1} f(x,y)dxdy$ **が存在することを示せ。但し、極限値として**∞ **も考える。**

（２）次の (i)、(ii)、(iii) は正しいか。正しいものには証明を与え、間違っているものには反例を挙げよ。

(i)$I(f) =$ **ならば、**$f = 0$ **である。**

（ｉｉ）定数$a>-2$ **について、**$f(x,y)\le r^a,((x,y)\in D)$ **ならば**$I(f)<\infty$ **である。**

(iii) 関数$f=f(x,y)$ **が**D **で一階連続的微分可能ならば、**$I(f)<\infty$ **である。**

（解）（１）一般に連続関数は積分可能である。

(i) 正しい。証明；$f(x_0,y_0)=c>0$ とすると、関数 $f=f(x,y)$ の連続性により、ある正数 $\delta(>0)$ が存在して $D_\delta=\{(x,y);0\le r\le\delta\}$ では恒に $f(x,y)=\frac{c}{2}>0$ が成り立つ。このときに、$I(f)\ge\frac{c}{2}\pi\delta^2>0$ であり仮定に反する。

(ii) 正しい。極座標に変換して、$\int\int_{t\le r\le 1}f(x,y)dxdy\le 2\int_0^\pi\int_t^1 r^{a+1}drd\theta=2\pi[\frac{r^{a+2}}{a+2}]_{r=t}^{r=1}=\frac{2\pi}{a+2}(1-t^{a+2})\to\frac{2\pi}{a+2}(as\quad t\to 0)$

(iii) 正しくない。例えば、$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$.

４６．半径a **の**n **次元の球体**$D_n(a)=\{x\in R^n;|x|^2\le a^2\},(|x|^2=\sum_{j=1}^n x_j^2)$ **の体積を以下の手順で求める。問に答えよ。**

（1）n **次元球面極座標**
$$\begin{cases} x_1=r\cos\theta_1 \\ x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ . \\ x_j=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot....\cdot\sin\theta_{j-1}\cos\theta_j \\ . \\ x_{j-2}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot....\cdot\sin\theta_{j-3}\cos\theta_{j-2} \\ x_{j-1}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot....\cdot\sin\theta_{j-3}\sin\theta_{j-2}\cos\theta_{j-1} \\ x_{j-1}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot....\cdot\sin\theta_{j-3}\sin\theta_{j-2}\sin\theta_{j-1} \end{cases}$$
を導入する。領域$D_n(a)$ **を変数**$(r,\theta_1,\theta_2,....\theta_{j-3},\theta_{j-2},\theta_{j-1})$ **で表せ。**

（2）新しい変数$(y_1,y_2,...,y_n)$ **を** $\begin{cases} y_1=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2} \\ y_j=x_{j-1},(j=2,3,...,n) \end{cases}$ **とする。変数変換のヤコビ行列の行列式の値を求めよ。**

（3）変数$(x_1,x_2,...,x_n)$ **から**n **次元球面極座標**$(r,\theta_1,\theta_2,....\theta_{j-3},\theta_{j-2},\theta_{j-1})$ **への変数変換のヤコビ行列の行列式の値を求めよ。**

（4）整数$k,l(>0)$ **について**$I(k,l)=\int_0^\pi\sin^k x\cos^l xdx$ **とする。**$D_n(a)$ **の体積を**$I(k,l)$ **で表せ。**

（5）$I(k+2,l),I(k,l)$ **の関係式を求めよ。**

（6）$D_n(a)$ **を求めよ。但し、**n **は偶数。**

（解）（１）$0<r<a,0<\theta_i<\pi,(i=1,2,...,n-2),0<\theta_{n-1}<2\pi$

（２）$\begin{cases} y_1=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2} \\ y_j=x_{j-1},(j=2,3,...,n) \end{cases}$, $\begin{cases} x_j=y_{j+1},j=1,2,3,..,n-1 \\ x_n^2=y_1^2-(y_2^2+y_3^2+...+y_n^2) \end{cases}$ $x_n=\pm\sqrt{y_1^2-(y_2^2+y_3^2+...+y_n^2)}$

$\frac{\partial(x_1,x_2,..,x_n)}{\partial(y_1,y_2,...,y_n)}$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2-(y_2^2+y_3^2+\ldots+y_n^2)}} & \frac{-y_2}{\sqrt{y_1^2-(y_2^2+y_3^2+\ldots+y_n^2)}} & \frac{-y_3}{\sqrt{y_1^2-(y_2^2+y_3^2+\ldots+y_n^2)}} & . & \frac{-y_{n-1}}{\sqrt{y_1^2-(y_2^2+y_3^2+\ldots+y_n^2)}} & \frac{\ldots}{\sqrt{y_1^2-(y\ldots}} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2-(y_2^2+y_3^2+\ldots+y_n^2)}} \to \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2-(y_2^2+y_3^2+\ldots+y_n^2)}}$$

（3） $\frac{\partial(x_1,x_2,..,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2,\ldots.\theta_{j-3},\theta_{j-2},\theta_{j-1})}$

$$= \det\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & . & \sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & \sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot \\ -r\sin\theta_1 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & . & r\cos\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot \\ 0 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & . & r\sin\theta_1\cos\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\sin\theta_1\cos\theta_2\cdot\ldots.\cdot \\ . & . & . & . & \\ 0 & 0 & . & r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot \\ 0 & 0 & . & -r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot \end{pmatrix}$$

$$= r^{n-1}(\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2})(\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3})\ldots(\sin\theta_1)$$

$$\times\det\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & . & \sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & \sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3} \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & . & \cos\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & \cos\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3} \\ 0 & -\sin\theta_2 & . & \cos\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & \cos\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & \cos\theta_{n-2}\sin\theta \\ 0 & 0 & . & -\sin\theta_{n-1} & \cos\theta_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}$$

（別法） $\begin{cases} \frac{\partial x_j}{\partial r} = \sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{j-1}\cos\theta_j, (1\le j\le n-1), \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} = \sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$ $, g_1 =$ $\sqrt{\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial x_j}{\partial r}\right)^2} = 1$

$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial\theta_1} = -r\sin\theta_1, \\ \frac{\partial x_j}{\partial\theta_1} = r\cos\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{j-1}\cos\theta_j, \\ \frac{\partial x_n}{\partial\theta_1} = r\cos\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$ $, g_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial x_j}{\partial\theta_1}\right)^2} =$ r

$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial\theta_2} = 0, \\ \frac{\partial x_2}{\partial\theta_2} = -r\sin\theta_1\sin\theta_2, \\ \frac{\partial x_j}{\partial\theta_2} = r\sin\theta_1\cos\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{j-1}\cos\theta_j, \\ \frac{\partial x_n}{\partial\theta_2} = r\sin\theta_1\cos\theta_2\cdot\ldots.\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$ $, g_3 = \sqrt{\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial x_j}{\partial\theta_1}\right)^2} =$ $r\sin\theta_1$

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial x_1}{\partial\theta_3}=0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial\theta_3}=0 \\ \frac{\partial x_3}{\partial\theta_3}=-r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 \\ \\ \frac{\partial x_j}{\partial\theta_3}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\cdot....\cdot\sin\theta_{j-1}\cos\theta_j \\ . \\ \frac{\partial x_{n-1}}{\partial\theta_3}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\cdot....\cdot\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ \frac{\partial x_n}{\partial\theta_3}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\cdot....\cdot\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{array}\right. , g_4=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial x_j}{\partial\theta_2}\right)^2}=$$

$r\sin\theta_1\sin\theta_2$

$, ...,$

$g_i=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial x_j}{\partial\theta_{i-1}}\right)^2}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot...\cdot\sin\theta_{i-1}$

$...,$

$g_n=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial x_j}{\partial\theta_{n-1}}\right)^2}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot...\cdot\sin\theta_{n-2},$

$dV=\prod_{i=1}^{n}g_i dr d\theta_1...d\theta_{n-1}=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdot...\cdot\sin\theta_{n-2}drd\theta_1...d\theta_{n-1}.$

（4）$D_n(a)=\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}...\int_0^{\pi}(r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdot...\cdot\sin\theta_{n-2})d\theta_1 d\theta_2...d\theta_{n-2}d\theta_{n-1}dr$
$=2\pi\frac{a^n}{n}I(n-2,0)I(n-3,0)...I(1,0)$

（5）$I(k+2,l)=\int_0^{\pi}\sin^{k+2}x\cos^l xdx=\int_0^{\pi}\sin^{k+1}x\sin x\cos^l xdx=[-\frac{\cos^{l+1}x}{l+1}\sin^{k+1}x]_0^{\pi}+\frac{(k+1)}{l+1}\int_0^{\pi}\cos^{l+1}x\sin^k x\cos xdx$
$=\frac{(k+1)}{l+1}\int_0^{\pi}\cos^{l+2}x\sin^k xdx=\frac{(k+1)}{l+1}\int_0^{\pi}\cos^l x(1-\sin^2 x)\sin^k xdx=\frac{(k+1)}{l+1}(I(k,l)-I(k+2,l)),$

$(k+l+2)I(k+2,l)=(k+1)I(k,l),$

$I(k+2,l)=\frac{(k+1)}{(k+l+2)}I(k,l)=\frac{(k+1)(k-1)}{(k+l+2)(k+l)}I(k-2,l)=\frac{(k+1)(k-1)(k-3)}{(k+l+2)(k+l)(k+l-2)}I(k-4,l)=...$

$$=\left\{\begin{array}{l} \frac{(k+1)(k-1)(k-3)\cdot...\cdot3\cdot1}{(k+l+2)(k+l)(k+l-2)\cdot...\cdot(l+2)}I(0,l),k;even \\ \frac{(k+1)(k-1)(k-3)\cdot...\cdot4\cdot2}{(k+l+2)(k+l)(k+l-2)\cdot...\cdot(l+3)}I(1,l),k;odd \end{array}\right.$$

$$I(m,0)=\left\{\begin{array}{l} \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot...\cdot3\cdot1}{(2n)(2n-2)\cdot...\cdot(2)}\pi=\pi\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2},m=2n;even \\ \frac{(2n-2)(2n-4)\cdot...\cdot4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdot...\cdot3}2=\frac{2(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!},m=2n-1;odd \end{array}\right. ,$$

$I(n-2,0)=I(2m-2,0)=\pi\frac{(2n-2)!}{(2^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!)^2},I(n-4,0)=\pi\frac{(2n-4)!}{(2^{\frac{n-2}{2}}(n-2)!)^2},...,I(2,0)=\pi\frac{(2)!}{(2)^2}=\frac{\pi}{2}$

$I(n-3,0)=I(2m-3,0)=\frac{2(2^{n-2}(n-2)!)^2}{(2n-3)!},I(n-5,0)=\frac{2(2^{n-3}(n-3)!)^2}{(2n-5)!},...,I(1,0)=2$

（他の方法）n 次元の半径 a の球の体積を $I_n(a)$ とする。$I_n(1)=\int_{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2<1}dx_1dx_2...dx_n=\int_{-1}^{1}(\int_{x_1^2+x_2^2+...+x_{n-1}^2<1-x_n^2}dx_1dx_2...dx_{n-1})dx_n=\int_{-1}^{1}I_{n-1}(\sqrt{1-x_n^2})dx_n$
$=I_{n-1}(1)\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x_n^2}^{\,n-1}dx_n=2I_{n-1}(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\cos\theta d\theta=2I_{n-1}(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta=\left\{\begin{array}{l} \frac{2^{2m+1}(m!)^2}{(2m+1)!},n=2m+1 \\ \frac{(2m)!\pi}{2^{2m}(m!)^2},n=2m+1 \end{array}\right.$$

$I_{2m+1}(1)=\frac{2\pi}{2m+1}I_{2m-1}(1)=\frac{2\pi}{2m+1}\frac{2\pi}{2m-1}I_{2m-3}(1)=...=\frac{2\pi}{2m+1}\frac{2\pi}{2m-1}...\frac{2\pi}{3}I_1=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\frac{n-2}{2}....\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

$I_{2m}(1)=\frac{\pi}{m}I_{2m-2}(1)=\frac{\pi}{m}\frac{\pi}{m-1}I_{2m-4}(1)=...=\frac{\pi}{m}\frac{\pi}{m-1}....\frac{\pi}{2}I_2(1)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\frac{n-2}{2}....\frac{4}{2}\frac{2}{2}}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

$I_n(a)=\frac{(a\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

４７．極座標系による２点$\vec{r}_1(r_1,\theta_1,\varphi_1),\vec{r}_2(r_2,\theta_2,\varphi_2)$の関数$f(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\frac{1}{\pi}e^{-(r_1+r_2)}$について、積分の値$I=\int\int\frac{(f(\vec{r}_1,\vec{r}_2))^2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}d\vec{r}_1d\vec{r}_2$を以下の方法で計算せよ。

（１）球面調和関数$Y_{l,m}(\theta,\varphi)$を用いて、関数$\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$は

$\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_m^l}{r_M^{l+1}}Y_{l,m}(\theta_1,\varphi_1)Y_{l,m}^*(\theta_2,\varphi_2)$ **のように展開される。**

ここで、$r_m=\min(r_1,r_2),r_M=\max(r_1,r_2)$。このことを使って、$I=16\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{r_1^2e^{-2r_1}r_2^2e^{-2r_2}}{r_M}dr_1dr_2$を示せ。

（２）指数関数を含む不定積分$\int xe^{ax}dx,\int x^2e^{ax}dx$を求めよ。

（３）（１）、（２）の結果を使ってIを求めよ。

（解）（１）積分を極座標に変換して、$d\vec{r}_1d\vec{r}_2=r_1^2\sin\theta_1r_2^2\sin\theta_2dr_1d\theta_1d\phi_1dr_2d\theta_2d\phi_2$

$\int\int\frac{(f(\vec{r}_1,\vec{r}_2))^2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}d\vec{r}_1d\vec{r}_2=\int\int\frac{(f(\vec{r}_1,\vec{r}_2))^2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}r_1^2\sin\theta_1r_2^2\sin\theta_2dr_1d\theta_1d\phi_1dr_2d\theta_2d\phi_2$

$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{1}{\pi^2}\int\int e^{-2(r_1+r_2)}\frac{r_m^l}{r_M^{l+1}}Y_{l,m}(\theta_1,\varphi_1)Y_{l,m}^*(\theta_2,\varphi_2)r_1^2\sin\theta_1r_2^2\sin\theta_2dr_1d\theta_1d\phi_1dr_2d\theta_2d\phi_2$

$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{16}{2l+1}\int\int e^{-2(r_1+r_2)}\frac{r_m^l}{r_M^{l+1}}r_1^2r_2^2dr_1dr_2=16\sum_{l=0}^{\infty}\int\int e^{-2(r_1+r_2)}\frac{r_m^l}{r_M^{l+1}}r_1^2r_2^2dr_1dr_2=16\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{r_1^2e^{-2r_1}r_2^2e^{-2r_2}}{r_M}dr_1dr_2$

$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_m^l}{r_M^{l+1}}=\frac{1}{r_M}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_m^l}{r_M^l}=\begin{cases}\frac{1}{r_M}\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{r_1}{r_2})^l=\frac{1}{r_2}\frac{1}{1-\frac{r_1}{r_2}}=\frac{1}{r_M}\frac{r_2}{r_2-r_1},(r_1<r_2)\\ \frac{1}{r_M}\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{r_2}{r_1})^l=\frac{1}{r_1}\frac{1}{1-\frac{r_2}{r_1}}=\frac{1}{r_M}\frac{r_1}{r_1-r_2},(r_1>r_2)\end{cases}=\frac{1}{r_M}\frac{r_2}{r_2-r_1}+\frac{1}{r_M}\frac{r_1}{r_1-r_2}=\frac{1}{r_M}\frac{r_2-r_1}{r_1-r_2}=\frac{1}{r_M}$

（２）$\int xe^{ax}dx=\frac{1}{a}xe^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}xe^{ax}-\frac{1}{a^2}e^{ax},\int_0^{\infty}xe^{ax}dx=\frac{1}{a^2},(a<0)$

$\int x^2e^{ax}dx=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a}\int xe^{ax}dx=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a}(\frac{1}{a}xe^{ax}-\frac{1}{a^2}e^{ax}),\int_0^{\infty}x^2e^{ax}dx=-\frac{2}{a^3},(a<0)$

$\int x^3e^{ax}dx=\frac{1}{a}x^3e^{ax}-\frac{3}{a}\int x^2e^{ax}dx=\frac{1}{a}x^3e^{ax}-\frac{3}{a}(\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a}(\frac{1}{a}xe^{ax}-\frac{1}{a^2}e^{ax})),\int_0^{\infty}x^3e^{ax}dx=\frac{6}{a^4},(a<0)$

（３）$I=16\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{r_1^2e^{-2r_1}r_2^2e^{-2r_2}}{r_M}dr_1dr_2=16(\int\int_{R_+^2\cap(r_1>r_2)}\frac{r_1^2e^{-2r_1}r_2^2e^{-2r_2}}{r_M}dr_1dr_2+\int\int_{R_+^2\cap(r_1<r_2)}\frac{r_1^2e^{-2r_1}r_2^2e^{-2r_2}}{r_M}dr_1dr_2)$

$\int\int_{R_+^2\cap(r_1>r_2)}\frac{r_1^2e^{-2r_1}r_2^2e^{-2r_2}}{r_M}dr_1dr_2=\int\int_{R_+^2\cap(r_1>r_2)}\frac{r_1^2e^{-2r_1}r_2^2e^{-2r_2}}{r_1}dr_1dr_2=\int\int_{R_+^2\cap(r_1>r_2)}r_1e^{-2r_1}r_2^2e^{-2r_2}dr_1dr_2$

$=\int_0^{\infty}r_1e^{-2r_1}(\int_0^{r_1}r_2^2e^{-2r_2}dr_2)dr_1=\int_0^{\infty}r_1e^{-2r_1}(-\frac{1}{2}r_1^2e^{-2r_1}-\frac{1}{2}r_1e^{-2r_1}-\frac{1}{4}e^{-2r_1}+\frac{1}{4})dr_1$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}(-2r_1^3e^{-4r_1}-2r_1^2e^{-4r_1}-r_1e^{-4r_1}+r_1e^{-2r_1})dr_1=-\frac{3}{128}-\frac{1}{64}-\frac{1}{64}+\frac{1}{16}=\frac{1}{128}$

４８．ガンマ関数について以下を示せ。

（１） $I(p,q)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\theta\cos^q\theta d\theta=\frac{1}{2}B(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2}+1)}$

（解） $\begin{cases} t=\sin\theta \\ dt=\cos\theta d\theta \end{cases}, I(p,q)=\int_0^1 t^p(1-t^2)^{\frac{q}{2}-\frac{1}{2}}dt.$

$\begin{cases} t^2=x \\ 2tdt=dx \end{cases}, I(p,q)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{q}{2}-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{p+1}{2}-1}(1-x)^{\frac{q+1}{2}-1}dt=$
$\frac{1}{2}B(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2}+1)}$

（２） $B(p,q)=2a^qb^p\int_0^1\frac{\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta}{(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)^{p+q}}d\theta$

（解） $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, x=\frac{by}{a+(b-a)y}, B(p,q)$
$=\int_0^1(\frac{by}{a+(b-a)y})^{p-1}(\frac{a+(b-a)y-by}{a+(b-a)y})^{q-1}\frac{b(a+(b-a)y)-by(b-a)y}{(a+(b-a)y)^2}dy$
$=\int_0^1\frac{(by)^{p-1}(a-ay)^{q-1}}{(a+(b-a)y)^{p+q-2}}\frac{ba}{(a+(b-a)y)^2}dy=a^qb^p\int_0^1\frac{y^{p-1}(1-y)^{q-1}}{(a+(b-a)y)^{p+q}}dy$
$\overset{,y=\sin^2\theta,dy=2\sin\theta\cos\theta d\theta}{=} 2a^qb^p\int_0^1\frac{\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta}{(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)^{p+q}}d\theta$

（３）(i)R^2 **内の領域**$D_2=\begin{cases} x+y<1 \\ x>0,y>0 \end{cases}$ **における関数**$x^{m-1}y^{n-1}$ **の重積分**$I_2=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}$.

（解） $I_2=\int_{D_2}x^{m-1}y^{n-1}dxdy=\int_0^1 x^{m-1}(\int_0^{1-x}y^{n-1}dy)dx=\int_0^1 x^{m-1}([\frac{y^n}{n}]_{y=0}^{y=1-x})dx=$
$\frac{1}{n}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n dx$
$=\frac{1}{n}B(m,n+1)=\frac{1}{n}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}$

(ii)R^3 **内の領域**$D_3=\begin{cases} x+y+z<1 \\ x>0,y>0,z>0 \end{cases}$ **における関数**$x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}$ **の重積分**$I_3=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}$.

（解） $I_3=\int_{D_3}x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}dxdydz=\int_0^1 x^{l-1}\{\int_0^{1-x}y^{m-1}(\int_0^{1-x-y}z^{n-1}dz)dy\}dx=$
$\int_0^1 x^{l-1}\{\int_0^{1-x}y^{m-1}([\frac{z^n}{n}]_{z=0}^{z=1-x-y})dy\}dx$
$=\frac{1}{n}\int_0^1 x^{l-1}(\int_0^{1-x}y^{m-1}(1-x-y)^n dy)dx=\frac{B(m,n+1)}{n}\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m+n}dx=$
$\frac{B(m,n+1)}{n}B(l,m+n+1)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n+1)}{n\Gamma(m+n+1)}\frac{\Gamma(l)\Gamma(m+n+1)}{n\Gamma(l+m+n+1)}$
$=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}$

計算；$\int_0^{1-x}y^{m-1}(1-x-y)^n dy\overset{y=s(1-x),dy=(1-x)ds}{=}\int_0^1(s(1-x))^{m-1}(1-x-s(1-x))^n(1-x)ds=(1-x)^{m+n}\int_0^1 s^{m-1}(1-s)^n ds$
$=(1-x)^{m+n}B(m,n+1)$

(iii)R^n **内の領域**$D_n=\begin{cases} x_1+x_2+...+x_n<1 \\ x_i>0,(i=1,2,...,n) \end{cases}$ **における関数**$x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}\cdot...\cdot x_n^{l_n-1}$ **の重積分**$I_n=\frac{\Gamma(l_1)\Gamma(l_2)\cdot...\cdot\Gamma(l_n)}{\Gamma(l_1+l_2+...+l_n+1)}$

(iv)R^n **内の領域**$V_n=\begin{cases} (\frac{x_1}{a_1})^{b_1}+(\frac{x_2}{a_2})^{b_2}+...+(\frac{x_n}{a_n})^{b_n}<1 \\ x_i>0,(i=1,2,...,n) \end{cases}$ **における関数**$x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}\cdot...\cdot x_n^{l_n-1}$ **の重積分**$J_n=\frac{{a_1}^{l_1}{a_2}^{l_2}\cdot...\cdot{a_n}^{l_n}}{b_1b_2\cdot...\cdot b_n}\frac{\Gamma(\frac{l_1}{b_1})\Gamma(\frac{l_2}{b_2})\cdot...\cdot\Gamma(\frac{l_n}{b_n})}{\Gamma(\frac{l_1}{b_1}+\frac{l_2}{b_2}+...+\frac{l_n}{b_n}+1)}$.

（解）$\frac{x_j}{a_j}=X_j, \frac{\partial(x)}{\partial(X)}=a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n, V_n=\begin{cases}(\frac{x_1}{a_1})^{b_1}+(\frac{x_2}{a_2})^{b_2}+\ldots+(\frac{x_n}{a_n})^{b_n}<1\\ x_i>0,(i=1,2,\ldots,n)\end{cases}$

$\to V'_n=\begin{cases}X_1{}^{b_1}+X_2{}^{b_2}+\ldots+X_n{}^{b_n}<1\\ x_i>0,(i=1,2,\ldots,n)\end{cases}$,

$J_n=\int_{V_n}x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}\cdot\ldots\cdot x_n^{l_n-1}dx=\int_{V'_n}(a_1X_1)^{l_1-1}(a_2X_2)^{l_2-1}\cdot\ldots\cdot(a_nX_n)^{l_n-1}a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_ndX$

$=a_1{}^{l_1}a_2{}^{l_2}\cdot\ldots\cdot a_n{}^{l_n}\int_{V'_n}(X_1)^{l_1-1}(X_2)^{l_2-1}\cdot\ldots\cdot(X_n)^{l_n-1}dX$

$X_j{}^{b_j}=\xi_j, X_j=\xi_j^{\frac{1}{b_j}}, \frac{dX_j}{d\xi_j}=\frac{1}{b_j}\xi_j^{\frac{1}{b_j}-1}, \frac{\partial(X)}{\partial(\xi)}=\frac{1}{b_1}\xi_1^{\frac{1}{b_1}-1}\frac{1}{b_2}\xi_2^{\frac{1}{b_2}-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{b_n}\xi_n^{\frac{1}{b_n}-1}$,

$V'_n=\begin{cases}X_1{}^{b_1}+X_2{}^{b_2}+\ldots+X_n{}^{b_n}<1\\ x_i>0,(i=1,2,\ldots,n)\end{cases}\to D_n=\begin{cases}\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n<1\\ \xi_j>0,(j=1,2,\ldots,n)\end{cases}$

$J_n=\frac{a_1{}^{l_1}a_2{}^{l_2}\cdot\ldots\cdot a_n{}^{l_n}}{b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_n}\int_{D_n}\xi_1^{\frac{l_1-1}{b_1}}\xi_2^{\frac{l_2-1}{b_2}}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{\frac{l_n-1}{b_n}}\xi_1^{\frac{1}{b_1}-1}\xi_2^{\frac{1}{b_2}-1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{\frac{1}{b_n}-1}d\xi$

$=\frac{a_1{}^{l_1}a_2{}^{l_2}\cdot\ldots\cdot a_n{}^{l_n}}{b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_n}\int_{D_n}\xi_1^{\frac{l_1}{b_1}-1}\xi_2^{\frac{l_2}{b_2}-1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{\frac{l_n}{b_n}-1}d\xi=\frac{a_1{}^{l_1}a_2{}^{l_2}\cdot\ldots\cdot a_n{}^{l_n}}{b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_n}\frac{\Gamma(\frac{l_1}{b_1})\Gamma(\frac{l_2}{b_2})\cdot\ldots\cdot\Gamma(\frac{l_n}{b_n})}{\Gamma(\frac{l_1}{b_1}+\frac{l_2}{b_2}+\ldots+\frac{l_n}{b_n}+1)}$

(v) 内R^3 **の領域**$V_3(r)=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\le r^2\}$ **における関数**$f(ax+by+cz)$ **の積分の値は**$K_3(r)=\int_{V_3(r)}f(ax+by+cz)dx$ **である。**

（解） 直交変換$\vec{x}=A\vec{u},\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\vec{u}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$,

$\begin{cases}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=1,\\ x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2\\ a_1^2+a_2^2+a_3^2=1\\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=1\\ c_1^2+c_2^2+c_3^2=1\\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0\\ c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3=0\\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0\end{cases}$ により $\begin{cases}ax+by+cz=ku\\ k^2=a^2+b^2+c^2\end{cases}$ となるように変数の係数を選ぶ。$K_3(r)=\int_{V_3(r)}f(ax+by+cz)dx=\int_{V_3(r)}f(ku)dudvdw=\int_{-r}^{r}(\int\int_{v^2+w^2\le r^2-u^2}dvdw)f(ku)du.$ ここで、(iv) の結果により、$\int\int_{v^2+w^2\le r^2-u^2}dvdw=(r^2-u^2)\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}=\pi(r^2-u^2)$

$K_3(r)=\int_{-r}^{r}\pi(r^2-u^2)f(ku)du.$

一般に n 次元の場合；$K_n(r)=\int_{V_n(r)}f(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)dx=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\int_{-r}^{r}(r^2-u^2)^{\frac{n-1}{2}}f(ku)du, k=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$

４９．平面の第一象限D **を積分領域とした二重積分**$\int\int_D e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}dxdy$ **の値を考えて関係式**$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ **を示せ。**

（解） $\int\int_D e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}dxdy=\int_0^\infty(\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx)e^{-y}y^{q-1}dy=(\int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}dy)(\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx)=\Gamma(p)\Gamma(q).$

一方、二重積分 $\int\int_D e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}dxdy$ において、変数変換$\begin{cases}x+y=u\\ x=uv\end{cases}$

を考えると、$\begin{cases} y=u-uv \\ x=uv \end{cases}$, $\begin{cases} u=x+y \\ v=\frac{x}{x+y} \end{cases}$ であり、$D=\{(x,y);0<x<\infty,0<y<\infty\}\to D'=\{(u,v);0<u<\infty,0<v<1\}$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix}=-u.$

故に、$\int\int_D e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}dxdy=\int\int_{D'}e^{-u}(uv)^{p-1}(u-uv)^{q-1}ududv=(\int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}du)(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv)=\Gamma(p+q)B(p,q).$

よって、$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)B(p,q).$

５０．空間におい各、座標平面と平面$x+y+z=1$ **とで囲まれた部分を**V **とし、積分の値**$\int_V x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}(1-x-y-z)^{s-1}dxdydz$ **を求めよ。但し、**$p,q,r,s>0.$

（解）変数変換$\begin{cases} x+y+z=\xi \\ y+z=\xi\eta \\ z=\xi\eta\zeta \end{cases}$, $\begin{cases} \xi=x+y+z \\ \eta=\frac{y+z}{x+y+z} \\ \zeta=\frac{z}{y+z} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\xi-\xi\eta(1-\zeta)-\xi\eta\zeta=\xi(1-\eta) \\ y=\xi\eta-\xi\eta\zeta=\xi\eta(1-\zeta) \\ z=\xi\eta\zeta \end{cases}$,

$V=\{(x,y,z);0<x,0<y,0<z,x+y+z<1\}\to V'=\{(\xi,\eta,\zeta);0\le\xi\le 1,0\le\eta\le 1,0\le\zeta\le 1\}$,

$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}=\begin{vmatrix} 1-\eta & -\xi & 0 \\ \eta(1-\zeta) & \xi(1-\zeta) & -\xi\eta \\ \eta\zeta & \xi\zeta & \xi\eta \end{vmatrix}=\xi\eta\begin{vmatrix} 1-\eta & -\xi & 0 \\ \eta-\eta\zeta & \xi-\xi\zeta & -1 \\ \eta\zeta & \xi\zeta & 1 \end{vmatrix}=$
$\xi\eta\begin{vmatrix} 1-\eta & -\xi & 0 \\ \eta & \xi & 0 \\ \eta\zeta & \xi\zeta & 1 \end{vmatrix}=\xi^2\eta\begin{vmatrix} 1-\eta & -1 \\ \eta & 1 \end{vmatrix}=\xi^2\eta.$

$\int_V x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}(1-x-y-z)^{s-1}dxdydz=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(\xi(1-\eta))^{p-1}(\xi\eta(1-\zeta))^{q-1}(\xi\eta\zeta)^{r-1}(1-\xi)^{s-1}\xi^2\eta d\xi d\eta d\zeta$
$=(\int_0^1\xi^{p+q+r-1}(1-\xi)^{s-1}d\xi)(\int_0^1(1-\eta)^{p-1}\eta^{q-1+r}d\eta)(\int_0^1(1-\zeta)^{q-1}\zeta^{r-1}d\zeta)=B(p+q+r,s)B(q+r,p)B(r,q)$
$=\frac{\Gamma(p+q+r)\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)}\frac{\Gamma(q+r)\Gamma(p)}{\Gamma(p+q+r)}\frac{\Gamma(r)\Gamma(q)}{\Gamma(q+r)}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(r)\Gamma(q)\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)}$

（注意）n 次元の場合に拡張して $V_n=\{\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_j,...,x_n);0<x_j,\sum_{j=1}^n x_j<1\},p_j>0,q>0,$

$\int_{V_n}\prod_{j=1}^n x_j^{p_j-1}(1-\sum_{j=1}^n x_j)^{q-1}dx_1...dx_n=\frac{\Gamma(q)\prod_{j=1}^n\Gamma(p_j)}{\Gamma(\sum_{j=1}^n p_j+q)}$

５１．n **次元空間の領域**$V_n(a)=\{\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_j,...,x_n);\sum_{j=1}^n|x_j|^a<r^a\},(a>0)$ **の体積を求めよ。**

（解）$X_j=(\frac{x_j}{r})^a,x_j=rX_j^{\frac{1}{a}},dx_j=\frac{r}{a}X_j^{\frac{1}{a}-1}.$

$V_n(a)=\{\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_j,...,x_n);\sum_{j=1}^n|x_j|^a<r^a\}\to V_n'(1)=\{\vec{X}=(X_1,X_2,...,X_j,...,X_n);0<X_j,\sum_{j=1}^n X_j<1\}.$

$|V_n(a)|=\int_{V_n(a)}dx_1...dx_n=2^n\int_{V_n'(a)}(\prod_{j=1}^n\frac{r}{a}X_j^{\frac{1}{a}-1})dX_1...dX_n=2^n(\frac{r}{a})^n\int_{V_n'(1)}(\prod_{j=1}^n X_j^{\frac{1}{a}-1})dX_1...dX_n$

$$= 2^n(\tfrac{r}{a})^n \frac{\Gamma(1)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\frac{1}{a})}{\Gamma(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a}+1)} = 2^n(\tfrac{r}{a})^n \frac{\Gamma(1)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\frac{1}{a})}{\Gamma(\frac{n}{a}+1)} = 2^n r^n(\tfrac{1}{a})^{n-1}\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\frac{1}{a})}{n\Gamma(\frac{n}{a})}$$

注意；特に、$a=2$ とすれば n 次元の球の体積は、$2^n r^n(\frac{1}{2})^{n-1}\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\frac{1}{2})}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = r^n\frac{\sqrt{\pi}^n}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = r^n\frac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

５２．座標変換$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$,**特に、球面座標の場合**$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\omega \\ y = r\sin\theta\sin\omega \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

に関して以下の計算をせよ。

（１）(i)$dxdydz = |J|dudvdw = \sqrt{M}dudvdw, J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}, M = \begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix}$

(ii)$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

（解）(i)$J^2 = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix}$

球面座標の場合;$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\omega)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\omega & r\cos\theta\cos\omega & -r\sin\theta\sin\omega \\ \sin\theta\sin\omega & r\cos\theta\sin\omega & r\sin\theta\cos\omega \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta, dxdydz = (r^2\sin\theta)drd\theta d\omega$

(ii)$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = H_1(du)^2 + H_2(dv)^2 + H_3(dw)^2 + 2F_1(du)(dv) + 2F_2(dv)(dw) + 2F_3(dw)(du)$

$$\begin{cases} H_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ H_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\ H_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \end{cases}, \begin{cases} F_3 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ F_2 = \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v} \\ F_1 = \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} \end{cases}$$

球面座標の場合;$\begin{cases} H_1 = (\sin\theta\cos\omega)^2 + (\sin\theta\sin\omega)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \\ H_2 = (r\cos\theta\cos\omega)^2 + (r\cos\theta\sin\omega)^2 + (-r\sin\theta)^2 = r^2 \\ H_3 = (-r\sin\theta\sin\omega)^2 + (r\sin\theta\cos\omega)^2 = r^2\sin^2\theta \end{cases}$ $, F_3 = F_2 = F_1 = 0.$

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\omega)^2$

（２）曲面の面積$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv, \begin{cases} E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\ F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$

(解) $\left\{\begin{array}{l} x=\varphi_1(u,v) \\ y=\varphi_2(u,v) \\ z=\varphi_3(u,v) \end{array}\right.$ $, z=f(x,y).$ $\left\{\begin{array}{l} z_u=z_x x_u+z_y y_u \\ z_v=z_x x_v+z_y y_v \end{array}\right.$ $, z_x=\dfrac{\begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}=$

$\frac{\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}, z_y=\dfrac{\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}=\frac{\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$

$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=$
$\sqrt{\left(\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\right)^2+\left(\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2}dudv$

$=\sqrt{\left(\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}\right)^2}dudv$

$=\sqrt{(x_u y_v-x_v y_u)^2+(y_v z_u-y_u z_v)^2+(x_u z_v-x_v z_u)^2}dudv=\sqrt{EG-F^2}dudv$

球面座標の場合；$r=f(\theta,\omega), dr=f_\theta(\theta,\omega)d\theta+f_\omega(\theta,\omega)d\omega$

$(ds)^2=(f_\theta(\theta,\omega)d\theta+f_\omega(\theta,\omega)d\omega)^2+f^2(\theta,\omega)(d\theta)^2+f^2(\theta,\omega)\sin^2\theta(d\omega)^2$

$\left\{\begin{array}{c} x=f(\theta,\omega)\sin\theta\cos\omega \\ y=f(\theta,\omega)\sin\theta\sin\omega \\ z=f(\theta,\omega)\cos\theta \end{array}\right., \left\{\begin{array}{c} x_\theta=f_\theta(\theta,\omega)\sin\theta\cos\omega+f(\theta,\omega)\cos\theta\cos\omega \\ y_\theta=f_\theta(\theta,\omega)\sin\theta\sin\omega+f(\theta,\omega)\cos\theta\sin\omega \\ z_\theta=f_\theta(\theta,\omega)\cos\theta-f(\theta,\omega)\sin\theta \end{array}\right.,$

$\left\{\begin{array}{c} x_\omega=f_\omega(\theta,\omega)\sin\theta\cos\omega-f(\theta,\omega)\sin\theta\sin\omega \\ y_\omega=f_\omega(\theta,\omega)\sin\theta\sin\omega+f(\theta,\omega)\sin\theta\cos\omega \\ z_\omega=f_\omega(\theta,\omega)\cos\theta \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c} E=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=f_\theta^2(\theta,\omega)+f^2(\theta,\omega) \\ G=\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right)^2=f_\omega^2(\theta,\omega)+\sin^2\theta f^2(\theta,\omega) \\ F=\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\omega}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\omega}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial\omega}=f_\theta(\theta,\omega)f_\omega(\theta,\omega) \end{array}\right.$

$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}d\theta d\omega=f(\theta,\omega)\sqrt{(f^2(\theta,\omega)+f_\theta^2(\theta,\omega))\sin^2\theta+f_\omega^2(\theta,\omega)}d\theta d\omega$

（注意）特に、球面（$r=f(\theta,\omega)=r$（半径））の場合には、$\left\{\begin{array}{c} E=a^2 \\ G=a^2\sin^2\theta \\ F=0 \end{array}\right.$

から、$\left\{\begin{array}{c} (ds)^2=r^2\{(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\omega)^2\} \\ d\sigma=r^2(\sin\theta)d\theta d\omega \end{array}\right.$.

いま、北極 $N(0,0,r)$ から球面上の点 $P(x,y,z)=P(r,\theta,\omega)$ への距離を ρ とすると、$\rho=2r\sin\frac{\theta}{2}, \rho^2=4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}=4r^2\frac{1-\cos\theta}{2}=2r^2(1-\cos\theta)$。故に、$2\rho d\rho=2r^2\sin\theta d\theta, \rho d\rho=r^2\sin\theta d\theta.$

よって、$d\sigma=r^2(\sin\theta)d\theta d\omega=\rho d\rho d\omega.$

従って、球面が閉曲線 C により二つの部分に分かれたとき、その一方の部分 S の面積を計算するには北極 N が S の内部になるように座標軸を取り、C 上の

点 P に対して $\rho = F(\omega)$ とすると、$S = \int_C d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} sdsd\omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\omega$ で与えられる。

（関連問題）球面$x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2, (R > 0)$ **から錘面**$z^2 = ax^2 + by^2, (a, b > 0)$ **が切り取る部分の面積を求めよ。**

（解） 曲線の式は、$\rho = 2R\sin\theta, (r\cos\theta)^2 = a(r\sin\theta\cos\omega)^2 + b(r\sin\theta\sin\omega)^2 \rightarrow \cos^2\theta = a\sin^2\theta\cos^2\omega + b\sin^2\theta\sin^2\omega$

$\rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = (a\cos^2\omega + b\sin^2\omega + 1)\sin^2\theta, \sin^2\theta = \frac{1}{a\cos^2\omega + b\sin^2\omega + 1}.\rho^2 = 4R^2\sin^2\theta = \frac{4R^2}{a\cos^2\omega + b\sin^2\omega + 1}.$

$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\omega = 4R^2\int_0^{\pi}\frac{1}{(a+1)\cos^2\omega + (b+1)\sin^2\omega}d\omega \overset{\tan\omega = s}{=} 4R^2\int_0^{\pi}\frac{1}{(a+1)\cos^2\omega + (b+1)\sin^2\omega}d\omega = 4R^2\int_0^{\infty}\frac{1}{(a+1)\frac{1}{1+s^2} + (b+1)\frac{s^2}{1+s^2}}\frac{ds}{1+s^2}$

$= 4R^2\int_0^{\infty}\frac{1}{(a+1)+(b+1)s^2}ds = \frac{4R^2}{(b+1)}\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2 + \frac{(a+1)}{(b+1)}}ds = \frac{4R^2}{(b+1)}\sqrt{\frac{(b+1)}{(a+1)}}[\tan^{-1} x\sqrt{\frac{(b+1)}{(a+1)}}]_0^{\infty} = \pi R^2\sqrt{\frac{1}{(b+1)(a+1)}}$