

## 1 応用数学後期中間試験 ( 1 2 月 5 日 3 ・ 4 限 )

( 注意 ) 1 . 解答は解答用紙 ( 白紙 ) の両面を使用すること。用紙が不足したときには、追加分を貰うこと。

2 . 途中の計算は消さないで残すこと。

3 . 問題の指示に従って答え、100点を越えた分は採点の対象としない。

### 1.1 次の関数のフーリエ係数を求めて、級数展開の形で表せ。

( ( 1 ) ~ ( 3 ) 1 題以内選択合計 5 題以内  $5 \times 15 = 75$  )

( 「 知識 ・ 能力 1 , 2 , 3 」 )

$$( 1 ) (i) f(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq \pi \\ 0, -\pi < x < 0 \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$$

$$(ii) f(x) = x(-1 \leq x \leq 1), f(x+2) = f(x)$$

$$(iii) f(x) = |x|, (-2 \leq x \leq 2), f(x+4) = f(x)$$

$$( 2 ) (i) f(t) = \begin{cases} 1, 0 < t \leq \pi \\ -1, -\pi < t \leq 0 \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} 1, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$$

$$( 3 ) (i) f(x) = x^2(-2 \leq x \leq 2), f(x+4) = f(x)$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} x(\pi-x), 0 \leq x \leq \pi \\ x(\pi+x), -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$$

$$( 4 ) f(x) = |\cos x|(-\pi \leq x \leq \pi), f(x+2\pi) = f(x)$$

$$( 5 ) f(x) = \begin{cases} x, -\pi \leq x \leq 0 \\ 2x, 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$$

### 1.2 次の三角関数をフーリエ級数展開せよ。但し、周期は $2\pi$ 。

( 合計 2 題以内、( 1 )  $1 \times 5 = 5$ , ( 2 )  $1 \times 10 = 10$ , ( 3 )

$1 \times 10 = 10$  ) ( 「 知識 ・ 能力 1 , 2 , 3 」 )

$$( 1 ) \cos^2 x$$

$$( 2 ) \sin 3x \cos 5x$$

$$( 3 ) \sin^3 x$$

### 1.3 次に答えよ。( ( 1 ) $1 \times 15 = 15$ , ( 2 ) $1 \times 5 = 5$ ) ( 「 知識 ・

能力 1 , 2 , 3 )

関数  $f(x) = \cos(kx + a)$ ,  $(-\pi \leq x \leq \pi)$  について以下に答えよ。但し、 $a$  は定数。

- ( 1 )  $k$  が整数でないときに、フーリエ係数  $a_0, a_n, b_n$  を求めよ。
- ( 2 )  $k$  が整数のときに、フーリエ係数  $a_0, a_n, b_n$  を求めよ。

1.4 次に答えよ。(  $1 \times 5 = 5$  )(「知識・能力 1 , 2 , 3 」)

区間  $[0, \pi]$  で定義された関数  $f(x)$  が  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  のように展開される為にはこの関数  $f(x)$  を区間  $[-\pi, 0]$  にどのように拡張すれば良いのか答えよ。また、区間  $[0, \pi]$  で定義された関数  $g(x)$  が  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$  のように展開される為にはこの関数  $g(x)$  を区間  $[-\pi, 0]$  にどのように拡張すれば良いのか答えよ。

1.5 追加問題 (  $1 \times 10 = 10$  )(「知識・能力 1 , 2 , 3 」)

弦の振動方程式の解の有限伝播性について、図を用いて説明せよ。

参考資料

( 1 ) 周期  $2l$  の周期関数  $f(x)$  のフーリエ級数  $a_n, b_n$  は 
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \end{cases}$$

で計算できる。このときに、フーリエ級数展開は  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x)$  である。

( 2 ) 三角関数の加法定理 
$$\begin{cases} \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{cases}$$