線形微分方程式の解法について、主に定数係数の場合を中心に纏めた。授業では触れることができなかった3階以上の場合も言及してある。沢山の例題が載せてあるので、計算の道筋をそれらの例題を解くことで理解すること。後半では、変数係数の場合の取り扱いについて述べた。途中で記号 D を用いているが、授業で $\frac{d}{dx}$ と表したと同じ「作用素」である。

編入学を希望している学生は、微分方程式の分野は解析学の中では、比較的多く出題されている範囲である。勉強の参考にして欲しい。更に、難しい問題は、**「分野別」**の中の**「微分方程式」**、及び**「発展問題集」**を参考にして欲しい。

1 微分方程式の解法（定数係数の場合）

1.1 微分方程式の解の性質

次の n 階の**定数係数線形常微分方程式**を考える。

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=f(x)...(1)$$

ここで各係数は定数であるとする。上の式は $\frac{d^k y}{dx^k}=y^{(k)}$ と簡単に書けば

$$a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_n y=f(x)...(2)$$

と書ける。以下 (2) の形で取り扱う。(2) に対して、右辺の $f(x)$ を 0 としてできる

$$a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_n y=0...(3)$$

を考える。この (3) は**定数係数線形斉次常微分方程式**と呼ばれる。この時に、次の事実が大切である。

定理 1 (2) の一般解 $y(x)$ は、(3) の一般解 $y_1(x)$ と (2) の特殊解（*1* つの解）$y_2(x)$ を用いて $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$ と書ける。

従って、我々は、*(i)*(3) **の一般解**$y_1(x)$ **を求めること**、*(ii)*(2) **の特殊解（***1* **つの解）**$y_2(x)$ **を求めること**、の 2 つを実行すれば良い。

（注意）ここで、(3) の方程式の一般解のことについて触れておこう。(3) の方程式の一般解 $y_1(x)$ は n 個の独立な解 $Y_1(x),...,Y_n(x)$ と任意定数 $C_1,...,C_n$ を用いて

$$y_1(x)=C_1Y_1(x)+...+C_nY_n(x)$$

と表される。ここで、n 個の解 $Y_1(x), ..., Y_n(x)$ が独立であるとは、ベクトルの場合と同様に、どの 1 つも残りの一次結合で表すことが出来ないことであるとする。独立かどうかの判定の仕方は、ロンスキー行列と呼ばれる次の行列式 $W(Y_1(x), ..., Y_n(x))$ の値が 0 でないことで判定出来る。

$$W(Y_1(x), ..., Y_n(x)) = \begin{vmatrix} Y_1(x) & ... & Y_n(x) \\ Y_1'(x) & ... & Y_n'(x) \\ . & ... & . \\ Y_1^{(n-1)}(x) & ... & Y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

1.2 定数係数線形斉次常微分方程式の一般解の求め方

方程式 (3) の一般解を求める為に、一番簡単な一階の場合を考える。この時は、y' の係数でわり算をしておけば、

$$y' - ay = 0...(4)$$

となる。この方程式は変数分離形なので次ぎのよう解が求まる。(4) を丁寧に書けば、

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

従って、

$$\frac{dy}{y} = ax$$

両辺を積分して、

$$\int \frac{dy}{y} = \int adx、\log y = ax + c$$

よって、

$$y = e^{ax+c} = Ce^{ax}$$

となる。◀

但し、ここで、関数 e^{ax} の意味は定数 a が

(i) 実数の時には普通の指数関数

$$e^{ax}$$

であるが、

(ii) 複素数の時には、$a=\alpha+\beta i$ として、**オイラーの公式**

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

を用いて

$$e^{ax}=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

とする。

次に、一般に n 階の方程式 (3) に対しては、$y=e^{\rho x}$ が解になると仮定して代入すれば、ρ は次の代数方程式を満たすことがわかる。

$$a_0\rho^n+a_1\rho^{n-1}+...+a_{n-1}\rho+a_n=0...(5)$$

この方程式 (5) を (3) の**特性方程式**といい、この解（根）を**特性解（根）**という。特性解を、$\rho_1,...,\rho_n(\rho_i\neq\rho_j,i\neq j)$ として、各 $\rho_i(i=1,...,n)$ に対して、

$(i)\rho_i$ が実数の時には、

$$y=e^{\rho_i x}(\text{指数関数})$$

が得られ 、

(ii) 複素数 $\rho_j=\alpha_j\pm\beta_j i$ の時には、$y_\pm=e^{(\alpha_j\pm\beta_j i)x}=e^{\alpha_j}e^{\pm\beta_j ix}\overset{\text{オイラー}}{=}e^{\alpha_j x}(\cos\beta_j x\pm i\sin\beta_j x)$ が得られるが、これらの関数の和、差及び定数倍も解だから 、

$$y=e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x$$

が解であることがわかる。

それでは、特性方程式が重解を持つ場合はどのようになるであろう。最初に、特性方程式が重解を持つ最も簡単な場合について、未定係数法と呼ばれる方法で解いてみよう。

例題 *1.*$y''-2ay'+a^2y=0$ の 2 つの独立な解を求めよ。

(**解法）**先ず、特性方程式は $\rho^2-2a\rho+a^2=(\rho-a)^2=0$ で、特性解は $\rho=a$（二重解）だから、1 つの解は $y=e^{ax}$ であるが、それと独立な解を $y=u(x)e^{ax}$ の形で求める。この時に、

$$y'=u'(x)e^{ax}+au(x)e^{ax},$$

$$y''=u^{''}(x)e^{ax}+2au'(x)e^{ax}+a^2u(x)e^{ax}$$

だから、最初の方程式に代入して、

$$u^{''}(x)e^{ax}+2au'(x)e^{ax}+a^2u(x)e^{ax}-2a(u'(x)e^{ax}+au(x)e^{ax})+a^2u(x)e^{ax}=0,$$

となる。従って、

$$u^{''}(x)e^{ax} = 0$$

から ,

$$u^{''}(x) = 0$$

となり、

$$u(x) = Ax + B$$

を得る。

だから、

$$e^{ax}, xe^{ax}$$

が求める独立な解の組である。◀

今後の取り扱いを簡単にするために、ここで新しい記号を導入しておく。方程式 (4) は丁寧に書くと、

$$\frac{dy}{dx} - ay = 0$$

であるが、これを

$$(\frac{d}{dx} - a)y = 0$$

更に、$D = \frac{d}{dx}$ と書いて、

$$(D - a)y = 0$$

と書く。この記号を用いると、(2) 及び (3) はそれぞれ次のように簡単に書ける。

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n)y = f(x)...(2)'$$

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n)y = 0...(3)'$$

(3)′ の形にすれば、(5) は見やすい。

この表現の使い易さを例で示す.

例題 *2.*$y'' - y' - 2y = 0$ の独立な解を求めよ。

（解法）$(D^2 - D - 2)y = (D-2)(D+1)y = (D+1)(D-2)y$ が成り立つ。

このことから、$(D+1)y = 0$ 及び $(D-2)y = 0$ の解は何れも $(D^2-D-2)y = 0$ の解であるが、方程式 $(D+1)y = 0$ と $(D-2)y = 0$ はどちらも (4) の形を

しているので、それぞれの解は，e^{-x}, e^{2x} である．従って，$(D^2-D-2)y=0$ は 2 つの独立な解 e^{-x}, e^{2x} を持つ．◀

以下の計算では、次の関係式を良く使う。

$$(D-a)(e^{ax}y)=e^{ax}Dy$$

この関係式を用いると上の例題 1 の場合も含めて次の**例題**が簡単に解ける。

例題 *3.*$(D-a)^n y=0$ の独立な解を求めよ.

(解法)

$$(D-a)^n y=(D-a)^n(e^{ax}e^{-ax}y)=(D-a)^{n-1}(D-a)(e^{ax}e^{-ax}y)$$

$$=(D-a)^{n-1}e^{ax}D(e^{-ax}y)=(D-a)^{n-2}e^{ax}D^2(e^{-ax}y)$$

$$=...=e^{ax}D^n(e^{-ax}y)$$

だから、最初の方程式は

$$e^{ax}D^n(e^{-ax}y)=0$$

に変る。従って、

$$D^n(e^{-ax}y)=0$$

だから、上の式で n 回積分すれば、

$$e^{-ax}y=(n-1)\text{ 次の多項式}$$

となって、

$$y=x^{n-1}e^{ax}, x^{n-2}e^{ax}, ..., xe^{ax}, e^{ax}$$

の n 個の独立な解を得る。◀

（注意）例題 1 は上の例題 3 で $n=2$ の場合である。

上の例題 3 から、微分方程式 (3) の一次独立な解は、その特性方程式の解のようすによって次ぎのようにまとめることが出来る。

(i) 実数 ρ_i が m_i 重解の時には、

$$\{x^{m_i-1}e^{\rho_i x}, x^{m_i-2}e^{\rho_i x}, ..., xe^{\rho_i x}, e^{\rho_i x}\}$$

の m_i 個が独立な解である.

更に,

(ii) 複素数 $\rho_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ が m_j 重解の時には、

$$\{x^{m_j-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, x^{m_j-2}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, ..., xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x\},$$

$$\{x^{m_j-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, x^{m_j-2}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, ..., xe^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x\}$$

の $2m_j$ 個が独立な解である。

これらは何れも独立であることに注意しておこう。

1.3 定数係数線形非斉次常微分方程式の特殊解の求め方

以下は方程式 (2) または $(2)'$ の特殊解（1 つの解）を求める。右辺の関数がそれぞれ以下のような具体的な形の時に解法を与える。

1.3.1 f(x)=e^{kx} の場合

最初に一番簡単な場合を考える。

例題 *4.*

$$(D-a)y = e^{kx}$$

の特殊解は

$$(i)k \neq a \text{ の場合は } y = \frac{1}{k-a}e^{xk}$$
$$(ii)k = a \text{ の場合は } y = xe^{xk}$$

となる。

（解法）(i)

$$(D-a)y = (D-a)(e^{ax}e^{-ax}y) = e^{ax}D(e^{-ax}y)$$

だから、方程式

$$(D-a)y = e^{kx}$$

は

$$e^{ax}D(e^{-ax}y) = e^{kx}$$

即ち、

$$D(e^{-ax}y) = e^{(k-a)x}$$

となる。ここで両辺を積分すれば、$k \neq a$ だから

$$e^{-ax}y = \int e^{(k-a)x}dx = \frac{1}{k-a}e^{(k-a)x}$$

ここで、解を 1 つ求めれば良いので、積分定数は省略してある。これからの計算も同様である。

よって、

$$y = \frac{1}{k-a}e^{kx}$$

を得る。◀

(ii) 上と同様にして、方程式

$$(D-a)y = e^{ax}$$

は

$$e^{ax}D(e^{-ax}y) = e^{ax}$$

即ち、

$$D(e^{-ax}y) = 1$$

となる。ここで両辺を積分すれば、

$$e^{-ax}y = \int dx = x$$

よって、

$$y = xe^{kx}$$

◀

（注意）上の問題は 1 階線形方程式であるから、教科書などにある公式を用いても同じ結果を得る。

一般の場合については、次の例題を考えよう。

例題 *5.* 微分方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx}$$

の解は、

$$F(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n$$

としたときに、

$$F(k) \neq 0 \text{ ならば、} y = \frac{1}{F(k)} e^{kx}$$

で与えられる。

(**解法）** 作用素 D を普通の文字のように扱って

$$a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n = a_0 (D - \alpha_1)(D - \alpha_2)...(D - \alpha_n)$$

のように因数分解する。但し、α_i は実数または、複素数とする。この時に、方程式

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n) y = e^{kx}$$

は

$$a_0 (D - \alpha_1)(D - \alpha_2)...(D - \alpha_n) y = e^{kx}$$

となる。

ここで、例題 1 の方法によって上の方程式は、$\alpha_1 \neq k$ だから、

$$(D - \alpha_2)...(D - \alpha_n) y = \frac{1}{a_0 (k - \alpha_1)} e^{kx}$$

になる。以下順にこれを繰り返すと、$\alpha_1 \neq k, \alpha_2 \neq k, ...\alpha_n \neq k$ だから

$$(D - \alpha_n) y = \frac{1}{a_0 (k - \alpha_1)(k - \alpha_2)...(k - \alpha_{n-1})} e^{kx}$$

従って、

$$y = \frac{1}{a_0 (k - \alpha_1)(k - \alpha_2)...(k - \alpha_{n-1})(k - \alpha_n)} e^{kx} = \frac{1}{F(k)} e^{kx}$$

を得る。◀

例題 *6.* 微分方程式

$$(D - k)^n y = e^{kx}$$

の解は

$$y = \frac{x^n}{n!} e^{kx}$$

で与えられる。

（解法） 方程式

$$(D - k)^n y = e^{kx}$$

を

$$(D-k)^{n-1}(D-k)y = e^{kx}$$

と書き直して例題４で用いた方法を使うと

$$(D-k)^{n-1}e^{kx}D(e^{-kx}y) = e^{kx}$$

となる。以下この方法を繰り返し用いて

$$(D-k)e^{kx}D^{n-1}(e^{-kx}y) = e^{kx}$$

最後に

$$e^{kx}D^n(e^{-kx}y) = e^{kx}$$

を得るが、両辺を e^{kx} で割って

$$D^n(e^{-kx}y) = 1$$

となり、両辺を n 回積分して、

$$e^{-kx}y = \frac{x^n}{n!}$$

となり、

$$y = \frac{x^n}{n!}e^{kx}$$

が得られる。

（注意）求める解を $y = u(x)e^{kx}$ とおいて $u(x)$ についての方程式を求めそれを解く方法（定数変化法）でも同様な結果が得られる。◀

まとめ 2 微分方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx}$$

の解は

$$F(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n$$

として、

$$F(D) = (D-k)^m G(D), G(k) \neq 0$$

と因数分解したときに、

$$y = \frac{x^m}{G(k)m!}e^{kx}$$

の特殊解を持つ。但し、$0! = 1$ とする。

例題 *7.* 次の微分方程式の特殊解を求めよ。

$(1)y'' + y' - 2y = e^{2x}(2)y'' - y' - 2y = e^{2x}(3)y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

（解法）（１）$F(D) = D^2 + D - 2, F(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4 \neq 0$ だから、$y = \frac{1}{4}e^{2x}$

$(2)F(D) = D^2 - D - 2 = (D-2)(D+1)$ だから、$y = \frac{x}{(2+1)}e^{2x} = \frac{x}{3}e^{2x}$

$(3)F(D) = D^2 - 4D + 4 = (D-2)^2$ だから、$y = \frac{x^2}{2!}e^{2x} = \frac{x^2}{2}e^{2x}$ ◀

（注意）上のまとめからもわかるように、微分方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx}$$

の解は

$$F(\rho) = a_0\rho^n + a_1\rho^{n-1} + ... + a_{n-1}\rho + a_n$$

として、

$$F(k) \neq 0$$

ならば、

$$y = Ae^{kx}$$

の形の解を持ち、

$$F(\rho) = (\rho - k)^m G(\rho), G(k) \neq 0$$

と因数分解したときには、

$$y = Ax^m e^{kx}$$

の形の解を持つので、それぞれ $y = Ae^{kx}$ または、$y = Ax^m e^{kx}$ と置いて、方程式に代入して係数 A を決めることも出来る。

上の例題をその方法でやって見よう。

（別の解法）（１）$F(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4 \neq 0$ だから、$y = Ae^{2x}$ の形の解を持つので $y = Ae^{2x}$ から、

$$y' = 2Ae^{2x}, y'' = 4Ae^{2x}$$

となるので、これらをもとの方程式に代入して、

$$4Ae^{kx} = e^{2x}$$

よって

$$A = \frac{1}{4}$$

$(2)F(\rho) = \rho^2 - \rho - 2 = (\rho - 2)(\rho + 1)$ だから、$y = Axe^{2x}$ の形の解を持つので $y = Axe^{2x}$ から

$$y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}, y'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

となるので、これらをもとの方程式に代入して、

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - (Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) - 2Axe^{2x} = e^{2x},$$

$$3Ae^{2x} = e^{2x}$$

よって

$$A = \frac{1}{3}$$

(3)$F(\rho) = \rho^2 - 4\rho + 4 = (\rho - 2)^2$ だから、$y = Ax^2e^{2x}$ の形の解を持つので $y = Ax^2e^{2x}$ から

$$y' = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}, y'' = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x}$$

となるので、これらをもとの方程式に代入して、

$$2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} - 4(2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}) + 4Ax^2e^{2x} = e^{2x},$$

$$2Ae^{2x} = e^{2x},$$

よって

$$A = \frac{1}{2}$$

◀

1.3.2 $f(x) = \sin\omega x$(または$\sin\omega x$) の場合

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

に注意して、方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = \cos\omega x(\text{または}\sin\omega x)...(1)$$

が与えられた時には、方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)Y = e^{i\omega x}...(2)$$

を考える。この方程式の解 Y の実部と虚部をそれぞれ y_1, y_2 と置き、右辺をオイラーの公式で書き直すと、

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)(y_1 + iy_2) = \cos\omega x + i\sin\omega x...(3)$$

となる。両辺の実部と虚部をそれぞれ比較すれば、y_1, y_2 はそれぞれ次の 2 つの方程式の解になっていることがわかる。

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y_1 = \cos\omega x...(4)$$
$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y_2 = \sin\omega x....(5)$$

以下で方程式 (2) の解法を考える。しかし、この方程式の特殊解の求め方は、前節でやった

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx}; k \text{ は実数}$$

の場合の結果がそのまま適用出来る。即ち、

まとめ 3 微分方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)Y = e^{i\omega x}$$

の解は

$$F(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n$$

として

$$F(D) = (D - i\omega)^m G(D), G(i\omega) \neq 0$$

と因数分解したときに、

$$Y = \frac{x^m}{G(i\omega)m!}e^{i\omega x}$$

の特殊解を持つ。以下、(4), (5) の解を求めるには、$Y = \frac{x^m}{G(i\omega)m!}e^{i\omega x}$ でオイラーの公式

$$e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x$$

を用い、

$$\frac{x^m}{G(i\omega)m!}(\cos\omega x + i\sin\omega x)$$

全体の実部と虚部を計算することになる。

以下に具体的な例題で方法を示そう。

例題 *8.* 次の方程式の特殊解を求めよ。

１．$y'' - 3y' + 2y = \cos x$(又は $\sin x$)

２．$y'' + 4 = \cos 2x$(又は $\sin 2x$)

*(***解法）** １．$F(D) = D^2 - 3D + 2$ と置いて、

$$F(i) = i^2 - 3i + 2 = 1 - 3i \neq 0$$

だから、方程式

$y'' - 3y' + 2y = e^{ix}$ の解は、

$$Y=\frac{1}{1-3i}e^{ix}=(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i)(\cos x+i\sin x)=\frac{1}{10}\cos x-\frac{3}{10}\sin x+i(\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x)$$

である。従って、

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{10}\cos x-\frac{3}{10}\sin x, \\ y_2 &= \frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x \end{aligned}$$

がそれぞれ

$$\begin{aligned} y''-3y'+2y &= \cos x, \\ y''-3y'+2y &= \sin x \end{aligned}$$

の解である。◀

２．$F(D)=D^2+4$ と置いて、

$$F(2i)=0$$

だから、

$$F(D)=D^2+4=(D+2i)(D-2i)$$

と因数分解して、方程式

$$y''+4y=e^{i2x}$$

の解は、

$$Y=\frac{x}{4i}e^{i2x}=-\frac{1}{4}ix(\cos 2x+i\sin 2x)=\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{4}ix\cos 2x$$

である。従って、

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{4}x\sin 2x, \\ y_2 &= -\frac{1}{4}x\cos 2x \end{aligned}$$

がそれぞれ

$$\begin{aligned} y''+4 &= \cos 2x, \\ y''+4 &= \sin 2x \end{aligned}$$

の解である。◀

（注意） この例のように、純虚数 $i\omega$ が $F(D)=0$ の解であるとは、$F(D)$ が $D^2+\omega^2$ の因子を持つことであり、一般には

$$F(D)=(D^2+\omega^2)^k G(D)$$

$G(i\omega)\neq 0$ と因数分解出来ることである。

(注意） 上のまとめからもわかるように、微分方程式

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+...+a_{n-1}D+a_n)y=\cos\omega x(\text{または}\sin\omega x)$$

の解は

$$F(\rho)=a_0\rho^n+a_1\rho^{n-1}+...+a_{n-1}\rho+a_n$$

として、

$$F(i\omega)\neq 0$$

ならば、

$$y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$$

の形の解を持ち、

$$F(\rho)=(\rho-i\omega)^m G(\rho), G(i\omega)\neq 0$$

と因数分解したときには、

$$y=x^m(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$$

の形の解を持つので、それぞれ $y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$ または、$y=x^m(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$ と置いて、方程式に代入して係数 A,B を決めることも出来る。

上の例題をこの方法でやって見よう。

（別の解法） 1． $F(D)=D^2-3D+2$ と置いて、$F(i)=i^2-3i+2=1-3i\neq 0$ だから、

$$y=A\cos x+B\sin x$$

の形の解を持つ、

$$y\prime=-A\sin x+B\cos x, y''=-A\cos x-B\sin x$$

これらをもとの方程式に代入して、

$$-A\cos x-B\sin x-3(-A\sin x+B\cos x)+2(A\cos x+B\sin x)=\cos x(\text{又は}\sin x),$$

よって

$$(A-3B)\cos x+(B+3A)\sin x=\cos x(\text{又は}\sin x),$$

よって、連立方程式

$$\begin{cases} A-3B=1 \\ B+3A=0 \end{cases}, \text{又は} \begin{cases} A-3B=0 \\ B+3A=1 \end{cases}$$

を解けば、それぞれ

$$A=\frac{1}{10}, B=-\frac{3}{10}, \text{又は } B=\frac{1}{10}, A=\frac{3}{10}$$

となる。だから、求める解はそれぞれ

$$y=\frac{1}{10}\cos x-\frac{3}{10}\sin x, \text{又は } y=\frac{1}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x$$

を得る。◀

２． $F(\rho)=\rho^2+4=(\rho+2i)(\rho-2i)$、だから

$$y=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$$

の形の解を持つ、

$$y\prime=-2Ax\sin 2x+A\cos 2x+2Bx\cos 2x+B\sin 2x,$$

$$y''=-4A\sin 2x-4Ax\cos 2x+4B\cos 2x-4Bx\sin 2x$$

をもとの方程式に代入して、

$$-4A\sin 2x-4Ax\cos 2x+4B\cos 2x-4Bx\sin x+4\,(Ax\cos 2x+Bx\sin 2x)$$
$$=\cos 2x(\text{又は}\sin 2x),$$

よって

$$-4A\sin 2x+4B\cos 2x=\cos 2x(\text{又は}\sin 2x),$$

だから、連立方程式

$$\begin{cases} A=0 \\ 4B=1 \end{cases}, \text{又は} \begin{cases} -4A=1 \\ 4B=0 \end{cases}$$

を解けば、それぞれ

$$A=0, B=\frac{1}{4}, \text{又は } B=0, A=-\frac{1}{4}$$

となる。だから、求める解はそれぞれ

$$y=\frac{1}{4}x\sin 2x, \text{又は } y=-\frac{1}{4}x\cos 2x$$

を得る。◀

1.3.3 f(x)=e$^{kx}\cos\omega x$(**または** $e^{kx}\sin\omega x$) **の場合**

この場合も前の 2 つの場合と同様に出来る。
詳しく書けば、

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx}\cos\omega x(\text{または } e^{kx}\sin\omega x)$$

の特殊解を求めるには、

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)Y = e^{(k+i\omega)x}$$

の解 Y を求めて、$Y = y_1 + iy_2$ としたときに、y_1, y_2 はそれぞれ次の方程式の特殊解になっている。

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y_1 = e^{kx}\cos\omega x$$

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y_2 = e^{kx}\sin\omega x$$

従って、前節と同様な結果が得られる。

まとめ 4 微分方程式

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)Y = e^{(k+i\omega)x}$$

の解は

$$F(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n$$

として

$$F(D) = (D - (k + i\omega))^m G(D), G(k + i\omega) \neq 0$$

と因数分解したときに、

$$Y = \frac{x^m}{G(k+i\omega)m!}e^{(k+i\omega)x}$$

の特殊解を持つ。以下、y_1, y_2 を求めるには $\frac{x^m}{G(k+i\omega)m!}e^{(k+i\omega)x}$ に再びオイラーの公式

$$e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x$$

用い、として $\frac{x^m}{G(k+i\omega)m!}e^{kx}(\cos\omega x + i\sin\omega x)$ 全体の実部と虚部を計算することになる。

具体的な例題で実際の計算を示す。
例題 *9.*$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\cos 2x$(又は $\sin 2x$) の特殊解を求めよ。

（解法）$F(D)=D^2-3D+2$ と置いて、

$$F(3+2i)=(3+2i)^2-3(3+2i)+2=-2+6i\neq 0$$

だから、方程式

$$y''-3Y'+2Y=e^{(3+2i)x}$$

の解は、

$$Y=\frac{1}{-2+6i}e^{(3+2i)x}$$

であるが、これを計算すると、

$$Y=(-\frac{1}{20}-\frac{3}{20}i)e^{3x}(\cos 2x+i\sin 2x)$$

$$=-\frac{1}{20}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{20}e^{3x}\sin 2x+i\left(-\frac{3}{20}e^{3x}\cos 2x-\frac{1}{20}e^{3x}\sin 2x\right)$$

となるので、

$$y_1=-\frac{1}{20}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{20}e^{3x}\sin 2x=-\frac{1}{20}e^{3x}\left(\cos 2x-3\sin 2x\right)$$

または

$$y_2=-\frac{3}{20}e^{3x}\cos 2x-\frac{1}{20}e^{3x}\sin 2x=-\frac{1}{20}e^{3x}\left(3\cos 2x+\sin 2x\right)$$

が求める解である。◀

（注意）上のまとめからもわかるように、微分方程式

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+...+a_{n-1}D+a_n)y=e^{kx}\cos\omega x(e^{kx}\sin\omega x)$$

の解は

$$F(\rho)=a_0\rho^n+a_1\rho^{n-1}+...+a_{n-1}\rho+a_n$$

として、

$$F(k+i\omega)\neq 0$$

ならば、

$$y=e^{kx}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$$

の形の解を持ち、

$$F(\rho)=(\rho-(k+i\omega))^mG(\rho),G(k+i\omega)\neq 0$$

と因数分解できる時は、

$$y=x^me^{kx}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$$

の形の解を持つので、それぞれ $y = e^{kx}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ または、$y = x^m e^{kx}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ と置いて、方程式に代入して係数 A, B を決めることも出来る。

上の例題をこの方法でやって見よう。

（別の解法） $F(D) = D^2 - 3D + 2$ と置いて、$F(3+2i) = (3+2i)^2 - 3(3+2i) + 2 = -2 + 6i \neq 0$ だから、方程式は

$$y = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

形の解を持つ。

$y = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ から、

$$y' = 3e^{3x}A\cos 2x + 3e^{3x}B\sin 2x - 2e^{3x}A\sin 2x + 2e^{3x}B\cos 2x,$$

$$y'' = 5e^{3x}A\cos 2x + 5e^{3x}B\sin 2x - 12e^{3x}A\sin 2x + 12e^{3x}B\cos 2x$$

となり、これらをもとの方程式に代入して、

$$\begin{aligned}&5e^{3x}A\cos 2x + 5e^{3x}B\sin 2x - 12e^{3x}A\sin 2x + 12e^{3x}B\cos 2x\\&- 3(3e^{3x}A\cos 2x + 3e^{3x}B\sin 2x - 2e^{3x}A\sin 2x + 2e^{3x}B\cos 2x)\\&+ 2e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)\\&\qquad\qquad = e^{3x}\cos 2x(\text{又は}\sin 2x),\end{aligned}$$

従って,

$$-2e^{3x}(A - 3B)\cos 2x - 2e^{3x}(B + 3A)\sin 2x = e^{3x}\cos 2x(\text{又は}\sin 2x),$$

よって連立方程式

$$\begin{cases} A - 3B = -\frac{1}{2} \\ B + 3A = 0 \end{cases}, \text{又は} \begin{cases} A - 3B = 0 \\ B + 3A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

を解けば、それぞれ

$$A = -\frac{1}{20}, B = \frac{3}{20}\text{又は } B = -\frac{1}{20}, A = -\frac{3}{20}$$

となる。だから、求める解はそれぞれ

$$y = e^{3x}(-\frac{1}{20}\cos 2x + \frac{3}{20}\sin 2x)\text{ 又は、} y = e^{3x}(-\frac{3}{20}\cos 2x + -\frac{1}{20}\sin 2x)$$

を得る。◀

1.3.4　ｆ（ｘ）＝多項式の場合

右辺 $f(x)$ が多項式の場合は山辺の方法といわれるわり算で解を求めることが出来る。例題でその方法を紹介する。

例題 *10.* １．$y'' - y' - 2y = -48x^2 - 76x + 44$

２．$y'' - y' = 48x^2 - 76x + 44$ の特殊解を求めよ。

(解法） 方程式を

$$(D^2 - D - 2)y = -48x^2 - 76x + 44$$

と書いて、形式的に

$$y = (D^2 - D - 2)^{-1}(-48x^2 - 76x + 44)$$

と置き、

$$(-48x^2 - 76x + 44) \div (-2 - D + D^2)$$

のわり算を実行すると、

$$(-48x^2 - 76x + 44) \div (-2 - D + D^2) = 24x^2 + 14x - 5$$

となる。◀

２．方程式 $(D^2 - D)y = -48x^2 - 76x + 44$ を

$$(D - 1)Dy = -48x^2 - 76x + 44$$

と書いて、

$$Dy = Y$$

と置くと、Y は

$$(D - 1)Y = -48x^2 - 76x + 44$$

の解だから１．と同じようにわり算をして、

$$Y = (D - 1)^{-1}(-48x^2 - 76x + 44)$$
$$= (-48x^2 - 76x + 44) \div (-1 + D) = 48x^2 + 172x + 128$$

だから、

$$Dy = 48x^2 + 172x + 128$$

積分して、

$$y = 16x^3 + 86x^2 + 128x$$

◀

（注意）上の例から推測されるように、微分方程式

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n) y = (x \text{ の } n \text{ 次の多項式})$$

の解は、

$$F(\rho) = a_0 \rho^n + a_1 \rho^{n-1} + ... + a_{n-1} \rho + a_n$$

と置いた時に、

$$(i) F(0) \neq 0$$

の場合は、

$$y = x \text{ の } n \text{ 次の多項式、}$$

$$(ii) F(0) = 0 (0 \text{ が } m \text{ 重解})$$

の場合には、

$$y = x \text{ の } (n+m) \text{ 次の多項式}$$

の形の解をそれぞれ持つ。このことを用いて係数を決める方法がある。

例題 *11.*$y'' - y' - 2y = x^2 + x + 1$

（解法）求める解を

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

とおいて、

$$y' = 2Ax + B, y'' = 2A,$$

を代入すると、

$$2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x + 1,$$

つまり

$$-2Ax^2 - (2A + 2B)x + (2A - B - 2C) = x^2 + x + 1,$$

両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ -2A - 2B = 1 \\ 2A - B - 2C = 1 \end{cases}$$

この方程式を解くと、

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0, C = -1$$

を得る。従って、求める解は

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$$

である。◀

1.3.5　f(x)=e^{kx} $\times$ (x の多項式）

最初に簡単な例で解法を示そう。

例題 *1* 2. 方程式

$$(D-a)y = xe^{kx}$$

の解は、$(i)k \neq a$ のとき、

$$y = \frac{1}{k-a}(xe^{kx} - \frac{1}{k-a}e^{kx})$$

$(ii)k = a$ のとき、

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{ax}$$

（解法）$(D-a)(e^{ax}e^{-ax}y) = e^{ax}D(e^{-ax}y)$ から、

$$e^{ax}D(e^{-ax}y) = xe^{kx}$$

よって、方程式は

$$D(e^{-ax}y) = xe^{(k-a)x}$$

となる。

$(i)k \neq a$ のとき、両辺を積分して

$$\begin{aligned} e^{-ax}y = \int xe^{(k-a)x}dx &= \frac{1}{k-a}\{xe^{(k-a)x} - \int e^{(k-a)x}dx\} \\ &= \frac{1}{k-a}(xe^{(k-a)x} - \frac{1}{k-a}e^{(k-a)x})...(*) \end{aligned}$$

から、

$$y = \frac{1}{k-a}(xe^{kx} - \frac{1}{k-a}e^{kx})$$

を得る。

$(ii)k = a$ のとき、$(*)$ 式は、

$$e^{-ax}y = \int xdx = \frac{1}{2}x^2...(**)$$

よって、

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{ax}$$

を得る。◀

（注意）1. 方程式

$$(D-a)y = x^ne^{kx}$$

の場合には、上の計算で、式 $(*)(**)$ は、それぞれ

$$e^{-ax}y=\int x^n e^{(k-a)x}dx...(*)^{'}$$

$$e^{-ax}y=\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}...(**)'$$

となる。$(*)^{'}$ で、$\int x^n e^{(k-a)x}dx$ を計算するには、

$$I_n=\int x^n e^{(k-a)x}dx$$

と置き、部分積分の計算によって、n に関する漸化式

$$\begin{aligned}I_n&=\int x^n e^{(k-a)x}dx\\&=\frac{x^n}{k-a}e^{(k-a)x}-\frac{n}{k-a}\int x^{n-1}e^{(k-a)x}dx\\&=\frac{x^n}{k-a}e^{(k-a)x}-\frac{n}{k-a}I_{n-1}\end{aligned}$$

を得る。この漸化式から、I_n を求めて $(*)^{'}$ に代入すれば、$k\neq a$ の場合の特殊解が得られる。また、$k=a$ のときには、$(**)'$ から、特殊解 $y=\frac{x^{n+1}}{n+1}e^{ax}$ が得られる。◀

2.(1) 方程式

$$(D-a)^2y=xe^{kx}(k\neq a)$$

の解を求めるには、$(D-a)^2y=xe^{kx}$ を

$$(D-a)(D-a)y=xe^{kx}$$

と変形して、

$$(D-a)y=Y$$

と置けば、Y は、方程式

$$(D-a)Y=xe^{kx}(k\neq a)$$

を満たす。この方程式の解 Y は、上の主張により、

$$Y=\frac{1}{k-a}(xe^{kx}-\frac{1}{k-a}e^{kx})$$

と与えられる。よって、未知関数 y は、方程式

$$(D-a)y=\frac{1}{k-a}(xe^{kx}-\frac{1}{k-a}e^{kx})$$

の解である。この方程式を解くには、2つの方程式 $\left\{\begin{array}{l}(D-a)y=\frac{1}{k-a}xe^{kx}...(1)\\(D-a)y=\frac{1}{(k-a)^2}e^{kx}...(2)\end{array}\right.$ に分けて考える。方程式 (1) の解 y_1 は、**例題12.** *(ii)* により $y_1=\frac{1}{k-a}\{\frac{1}{k-a}(xe^{kx}-$

$\frac{1}{k-a}e^{kx})\} = \frac{1}{(k-a)^2}xe^{kx} - \frac{1}{(k-a)^3}e^{kx}$ であり、また、方程式 (2) の解 y_2 は、**例題４．** *(i)* により $y_2 = \frac{1}{(k-a)^3}e^{kx}$ である。以上によって、求める解 y は、$y = y_1 - y_2 = \frac{1}{(k-a)^2}xe^{kx} - \frac{1}{(k-a)^3}e^{kx} - \frac{1}{(k-a)^3}e^{kx} = \frac{1}{(k-a)^2}xe^{kx} - \frac{2}{(k-a)^3}e^{kx}$ となる。

（２）方程式

$$(D-a)^2 y = xe^{ax}$$

の解を求めるには、（１）と同様に、

$$(D-a)y = Y$$

と置けば、Y は、方程式

$$(D-a)Y = xe^{ax}$$

を満たす。この方程式の解は、**例題１２．** *(ii)* によって $Y = \frac{1}{2}x^2e^{ax}$ である。従って、未知関数 y は、方程式

$$(D-a)y = \frac{1}{2}x^2e^{ax}$$

の解である。この方程式の解は、上の注意**１**によって、

$$y = \frac{1}{2}\frac{1}{2+1}x^{2+1}e^{ax} = \frac{1}{6}x^3e^{ax}$$

である。◀

例題１３． $y'' - 4y = xe^{2x}$ の特殊解を求めよ。

(解法) $(D^2-4)y = (D+2)(D-2)y$ と因数分解すると、

$$(D+2)(D-2)y = xe^{2x}$$

の解は**例題１２．** *(i)* により先ず

$$(D-2)y = \frac{1}{4}(xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x})$$

となる。次に右辺を 2 つにわけて、最初に

$$(D-2)y_1 = \frac{1}{4}xe^{2x}$$

の解は**例題１２．** *(ii)* により

$$y_1 = \frac{1}{2\cdot 4}x^2e^{2x}$$

となり、また第２項については

$$(D-2)y_2 = \frac{1}{16}e^{2x}$$

の解を求めれば良いが、これは**例題４** *(ii)* によって、

$$y_2 = \frac{1}{16}xe^{2x}$$

となる。

よって、

$$y = y_1 - y_2 = \frac{1}{8}x^2e^{2x} - \frac{1}{16}xe^{2x}$$

が求める解である。◀

（注意）一般に右辺が $e^{kx}\times(x$ の n 次の多項式）となっている場合は、上の主張及びその後の注意にある計算を繰り返し行えば良い。このことから、次のような方法もある。

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)y = e^{kx}\times(x\text{ の }n\text{ 次の多項式})$$

の解は、

$$F(\rho) = a_0\rho^n + a_1\rho^{n-1} + ... + a_{n-1}\rho + a_n$$

と置いた時に、

$$(i)F(k) \neq 0$$

の場合は、

$$y = e^{kx}\times(x\text{ の }n\text{ 次の多項式}),$$

$$(ii)F(\rho) = (\rho-k)^mG(\rho), (G(k) \neq 0, k\text{ が }m\text{ 重解})$$

の場合は、

$$y = e^{kx}\times(x\text{ の }n+m\text{ 次の多項式})$$

の形の解をそれぞれ持つ。このことを用いて係数を決める方法がある。

（注意）更に、右辺が $\cos\omega x$(または、$\sin\omega x$) $\times$ (x の n 次の多項式) の場合にも、オイラーの公式と上の手法を用いれば類似の結果が得られる。

2　２階線形方程式の解について（変数係数の場合）

ここでは、次の形の方程式を取り扱う。

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)....(1)$$

（1）で $R(x)=0$ の場合、即ち

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0....(2)$$

を同次方程式という。

2.1 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ の一般解の求め方

まず、方程式 (1) の解 $y_1(x), y_2(x)$ が一次独立であるときに、$y_1(x), y_2(x)$ を基本解という。(1) の一般解 $y(x)$ は c_1, c_2 を任意の定数として、$y(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ とかけることに注意しよう。

次に、以下の主張が成り立つ

主張 5 $y_1(x)$ を１つの解としたときに、

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$$

は $y_1(x)$ と独立な１つの解である。

例題１． $y''+ay'+\frac{a^2}{4}y=0$

（解法） この方程式は定数係数なので既に定式化された方法があるが上の主張に従って求める。

まず、1 つの解を $y=e^{\rho x}$ の形で探すと、方程式に代入して ρ は二次方程式

$$\rho^2+a\rho+\frac{a^2}{4}=0$$

の解である。因数分解をして、

$$(\rho+\frac{a}{2})^2=0$$

だから、

$$\rho=-\frac{a}{2}$$

となる。だから、1 つの解は

$$y=e^{-\frac{a}{2}x}$$

である。

以下は主張の方法で

$$y_2(x)=e^{-\frac{a}{2}x}\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx=e^{-\frac{a}{2}x}\int\frac{e^{-\int adx}}{e^{-ax}}dx=e^{-\frac{a}{2}x}\int\frac{e^{-ax}}{e^{-ax}}dx=xe^{-\frac{a}{2}x}$$

を得る。◀

2.2 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ の一般解の求め方

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ の一般解 $y(x)$ は、

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0...(1)$$

の一般解 $Y_1(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ と

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)...(2)$$

の 1 つの解 (特殊解)$y_0(x)$ を用いて、$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_0(x)$ と表される。従って、ここでは (2) の特殊解を求める方法について調べる。

主張 6 方程式 (2) の特殊解 $y_0(x)$ は、方程式 (1) の一次独立な解 $y_1(x), y_2(x)$

を用いて,

$$y_0(x) = y_1(x) \int \frac{-R(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{R(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

とかける。ここで、$W(y_1, y_2)(x)$ は、解 $y_1(x), y_2(x)$ のロンスキー行列である。

例題２.

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^3 - x^2...(1)$$

（解法） 最初に (1) で右辺を零と置いて方程式

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0...(2)$$

を考える。この方程式の解を

$$y = x^k$$

の形で求める。$y' = kx^{k-1}, y'' = k(k-1)x^{k-2}$ を (2) に代入して

$$k(k-1)x^k - 3kx^k + 3x^k = 0$$

係数を取り出して

$$k(k-1) - 3k + 3 = 0$$

即ち

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$
$$(k-3)(k-1) = 0$$

よって

$$k = 1, 3$$

だから (2) の独立な解として

$$y_1 = x, y_2 = x^3$$

が得られた。この時に、ロンスキー行列は

$$W(x, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3$$

でまた、公式を使う為に y'' の係数を 1 にして、

$$R(x) = 2x - 1$$

となり、一般解を求める公式

$$y_0(x) = y_1(x) \int \frac{-R(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{R(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

に代入すると、

$$\begin{aligned} y_0(x) &= x \int \frac{-(2x-1)x^3}{2x^3} dx + x^3 \int \frac{(2x-1)x}{2x^3} dx \\ &= x(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x) + x^3(\frac{1}{2x} + \log x) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \left(-x + 2 + 2 (\log x) x\right) \end{aligned}$$

だから、最初の方程式 (1) の一般解は

$$\begin{aligned} y &= C_1 x + C_2 x^3 + \frac{1}{2}x^2 \left(-x + 2 + 2 (\log x) x\right) \\ &= C_1 x + C_2 x^3 + x^2 \left(1 + (\log x) x\right) \end{aligned}$$

となる。◀

（注意１）途中から以下のように、**定数変化法**を用いるする方法もある。

（別解）$y_1 = x$ から、他の解を $y = xu(x)$ の形で求めると、$y' = xu'(x) + u(x), y'' = xu''(x) + 2u'(x)$ から方程式 $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^3 - x^2$ は、$x^2(xu''(x) + 2u'(x)) - 3x(xu'(x) + u(x)) + 3xu(x) = 2x^3 - x^2$

$\to x^3u''(x) - x^2u'(x) = 2x^3 - x^2 \to u'' - \frac{1}{x}u' = 2 - \frac{1}{x} \stackrel{u'=U}{\to} U' - \frac{1}{x}U = 2 - \frac{1}{x}$

この方程式を解くには、最初に斉次方程式は、$U' - \frac{1}{x}U = 0 \to \frac{dU}{U} = \frac{dx}{x}$（変数分離形）だから解は、$U = x$ であり、$U = c(x)x$ の形で求めると、$c'(x)x + c(x) - c(x) = 2 - \frac{1}{x} \to c'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \to c(x) = 2\log x + \frac{1}{x}$. よって、$U = x(2\log x + \frac{1}{x}) + Cx$.

即ち、$u' = (2x\log x + 1) + Cx \to u = 2(\frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4}) + x + Cx^2$

故に、$y = 2(\frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4})x + x^2 + Cx^3 + Dx$ ◀

（注意２）上の例題は、オイラーの微分方程式と呼ばれている。上の解法にあるように、斉次方程式（２）の特殊解は $y = x^k$ の形で求めることができる。（**教科書 p.147”練習問題２.（１）,（２）及び３．**）また、オイラーの微分方程式の解法として、独立変数 x を $x = e^t$ と変換する方法もある。

（例）方程式$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$ **を**$x = e^t$ **と独立変数の変換を行って**$y(t)$ **の満たす方程式を求めて解け。**

(解）最初に、合成関数の微分の法則から、$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{e^t} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$, となる。更に、$x$ で微分して $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}e^{-t})e^{-t} = (\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t})e^{-t} = (\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})e^{-2t}$ となる。故に、方程式 $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$ は、$e^{2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})e^{-2t} - 3e^t\frac{dy}{dt}e^{-t} + 4y = e^{2t}$ から、$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = e^{2t}$

となるが、この方程式は定数係数の場合の結果により、特殊解 $y = \frac{t^2}{2!}e^{2t} = \frac{t^2}{2}e^{2t}$ をもつ。また、$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$ は、e^{2t}, te^{2t} の独立な解を持っている。従って、一般解は、$y = \frac{t^2}{2}e^{2t} + C_1e^{2t} + C_2te^{2t}$. 変数を x に戻して、$y = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 + C_1x^2 + C_2x^2\log x$ が解である。◀

方程式 (1) の 1 つの解 $y_1(x)$ が見つかれば、前節の方法でこれと独立な方程式 (1) の解 $y_2(x)$ を求め、その後で上の主張に従って方程式 (2) の特殊解を求めることが出来るが、次の主張は方程式 (1) の 1 つの解 $y_1(x)$ が見つかった時に、直接方程式の特殊解を求める方法をいっている。

主張 7 $y_1(x)$ が方程式 (1) の解であるとすると、方程式 (2) の特殊解 $y_0(x)$ は次の式で求めることができる。

$$y_0(x) = y_1(x)\int \phi(x)dx$$

ここで、

$$\phi(x) = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}\int y_1(x)R(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

（注意）前節の結果によれば、$y_1(x)$ が方程式 (1) の解であるとすると、

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$$

が $y_1(x)$ と独立な方程式 (1) の解である。従って、方程式 (2) の一般解 $y(x)$ は次の式で求めることができる。

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx + y_1(x)\int \phi(x)dx,$$

$$\phi(x) = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}\int y_1(x)R(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

例題３． 微分方程式 $(x+1)y'' + xy' - y = 1 ...(1)$ を以下の順序で解け。

1．斉次方程式 $(x+1)y''+xy'-y=0...(2)$ の１つの解（特殊解）y_1 を、$y_1=e^{kx}$ の形で求めよ。

2．一般解を上の特殊解 y_1 を用いて、$y=y_1u(x)$ の形で求めよ。

（解法）1．(2) の特殊解を $y_1=e^{kx}$ の形で求める。$y_1'=ke^{kx}, y_1''=k^2e^{kx}$ だから方程式 (2) に代入すると、

$$\begin{aligned}k^2(x+1)e^{kx}+kxe^{kx}-e^{kx}&=0\\k^2(x+1)+kx-1&=0\\(k^2+k)x+(k^2-1)&=0\end{aligned}$$

が得られる。従って、k は

$$\begin{aligned}k^2+k&=0\\k^2-1&=0\end{aligned}$$

を同時に満たせばよい。共通な解は、$k=-1$ だから

$$y_1=e^{-x}$$

が得られる。

2．$y=e^{-x}u(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned}y'&=-e^{-x}u+e^{-x}u'\\y''&=e^{-x}u-2e^{-x}u'+e^{-x}u''\end{aligned}$$

なので、方程式 $(x+1)y''+xy'-y=1$ に代入すると、

$$(e^{-x}u-2e^{-x}u'+e^{-x}u'')(x+1)+(-e^{-x}u+e^{-x}u')x-e^{-x}u=1$$

となり、簡単にして、

$$e^{-x}u''(x+1)-e^{-x}(x+2)u'=1$$

が得られる。よって、

$$u''(x+1)-(x+2)u'=e^x$$

となる。ここで、$u'=U$ とおけば、

$$U'(x+1)-(x+2)U=e^x$$

即ち、

$$\frac{dU}{dx}-\frac{(x+2)U}{x+1}=\frac{e^x}{x+1}$$

この１階線形方程式を、公式で解くと一般解

$$U\left(x\right)=-e^x+C_1e^x(x+1)$$

を得る。従って、

$$u(x)=\int U\left(x\right)dx=\int(-e^x+C_1e^x(x+1))dx=-e^x+C_1e^xx+C_2$$

となり、求める一般解は、

$$y=e^{-x}u(x)=e^{-x}(-e^x+C_1e^xx+C_2)=-1+C^1x+C_2e^{-x}$$

となる。

（注意）上の解法のように、斉次方程式の特殊解が$y=e^{kx}$ **の形で求められることがある。（教科書「高専の数学３」ｐ．１４７”練習問題１０”の中の２．（３）、（４））**

問題１． 次の方程式の一般解を求めよ。

(1)$x^2y''-3xy'+4y=2x^3+x^2$

(2)$x^2y''-2xy'+2y=-2x+2$

(3)$(1+x^2)y''-2xy'+2y=\frac{1-x^2}{x}$

(4)$x^2y''-(x+2)xy'+(x+2)y=x^4e^x$

(5)$^*x^2y''+xy'+y=x(hint;(1)-(5)y=x^k)$

(6)$xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=(x^2+x-1)e^{2x}$

(7)$(x+1)y''-(3x+4)y'+3y=(3x+2)e^{3x}$

(8)$xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=xe^x(hint;(4)-(6)y=e^{kx})$

（ヒントは、随伴する斉次方程式の特殊解の求め方である。）

2.3 ベキ級数解の求め方

微分方程式の解を求める方法として、解がベキ級数に展開できるとして解を求める方法がある。具体例で紹介しよう。

例題４． 微分方程式 $y'=y^2$ の解で,$x=0$ の時に $y=c$ となる解を求めよ。

（解法）

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_kx^k+...$$

とおき、項別に微分できるものとして、

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+2a_2x+...+ka_kx^{k-1}+...$$

また、

$$y^2=a_0^2+(a_0a_1+a_1a_0)x+...+(a_0a_k+a_1a_{k-1}+...+a_ja_{k-j}+...+a_ka_0)x^k+....$$

この２つをもとの方程式に代入して両辺を比較すると

$$(k+1)a_{k+1}=a_0a_k+a_1a_{k-1}+...+a_ja_{k-j}+...+a_ka_0,k=0,1,...$$

この式から，順に

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_0^2, \\
2a_2 &= a_0a_1 + a_0a_1 = 2a_0^3, a_2 = a_0^3 \\
3a_3 &= a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0 = 3a_0^4, a_3 = a_0^4 \\
&.... \\
a_k &= a_0^{k+1}, k = 1, ...
\end{aligned}$$

となる。

仮定から

$$a_0 = c$$

よって

$$a_k = c^{k+1}$$

となる。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c^{n+1}x^n = c(1 + cx + c^2x^2 + ... + c^kx^k + ..) = \frac{c}{1 - cx}(|cx| < 1)$$

ベキ級数は $|cx| < 1$ で収束する。

収束円 $|x| < \frac{1}{|c|}$ の中では、項別微分可能なので、これは解である。実際に関数 $\frac{c}{1-cx}$ が微分方程式 $y' = y^2$ の解であることは両辺に代入して計算すれば確かめられる。

また、最初の微分方程式

$$y' = y^2$$

は、変数分離形なので、

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

として、両辺を積分すれば、

$$-\frac{1}{y} = x + C,$$

$$y = -\frac{1}{x + C} = \frac{-1}{C(1 - (\frac{x}{-C}))} = \frac{c}{1 - cx}(c = -\frac{1}{C})$$

と解ける。◀

問題２．次の微分方程式のベキ級数解を求めよ。

１． $x^2y' = y - x(x = 0, y = 0)$

２． $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0((x = 0, y = a)$

2.4 教科書の問題解説（授業で触れることができなかった練習問題の中の問題）

１.（１）、（２）は二回積分すればよい。

１.（３）、（４）は、$y' = u$ とおくと方程式は u に関して１階の線形方程式になり、中間試験の範囲で解ける。

（例）$xy'' - 2y' = x^3, y' = u \to u' - \frac{2}{x}u = x^2, u = x^3 + Cx^2 \to y' = x^3 + Cx^2 \to y = \frac{x^4}{4} + Cx^3 + D$

１.（５）、（６）は、$y' = p$ とおく。$p = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

（例）$yy''+2(y')^2 = yy' \to yp\frac{dp}{dy}+2p^2 = yp \to \begin{cases} (i)p = 0 \\ (ii)\frac{dp}{dy} + \frac{2p}{y} = 1 \end{cases}, (i)p = 0 \to y' = 0 \to y = C(const.)$

$(ii)\frac{dp}{dy} + \frac{2p}{y} = 1 \stackrel{\text{１階線形方程式}}{\to} p = \frac{1}{3}y + \frac{C}{y^2} \to y' = \frac{1}{3}y + \frac{C}{y^2} = \frac{y^3+C}{3y^2} \to \frac{3y^2dy}{y^3+C} = dx \to \log(y^3 + C) = x + D$

２．及び３．は、**「$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ の一般解の求め方（例題２.、例題３.）」**参照