

1 応用数学学年末試験 (2 , 2 0 , 1 - 2)

1.1 1 . 次の関数を括弧内の点を中心としてべき級数に展開せよ。(「知識・能力 1,6」) 3 題以内選択 $3 \times 5 = 15$

- (1) $\frac{\sin z}{z}, (z = 0)$
- (2) $\frac{1}{(z-1)(z+1)}, (z = 1)$
- (3) $(z - 1)e^{z+1}, (z = 1)$
- (4) $\cos(z + \frac{\pi}{3}), (z = \frac{\pi}{3})$

1.2 2 . 次の関数の特異点を全て求めてその種類をいえ。(「知識・能力 1」) 3 題以内選択 $3 \times 5 = 15$

- (1) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$
- (2) $\frac{1}{z^3(z+2)^2}$
- (3) $\frac{1-\cos z}{z^2}$
- (4) $ze^{\frac{1}{z}}$

1.3 3 . 次の関数の特異点を全て求めて、各点における留数を求めよ。(「知識・能力 7,8」) 3 題以内選択 $3 \times 10 = 30$

- (1) $\frac{2z-3}{z^2-1}$
- (2) $\frac{\sin z}{(z-1)(z-2)^2}$
- (3) $\frac{ze^3}{(z-1)^3}$
- (4) * $\frac{1}{z^n-1}$; (解答は極形式のままでよい)

1.4 4 . 次の複素積分の値を求めよ。(「知識・能力 7,8」) $4 \times 10 = 40$

(1) $\int \frac{1}{(z-a)^n} dz, C; |z - a| = r, r > 0, n;$ 整数 (注意 ; 留数定理を用いてはいけない)

- (2) $\int \frac{2z+3}{z^3+z} dz, C; |z| = 2$
- (3) $\int \frac{e^z}{(z-1)^3(z-2)} dz, C; |z - 2| = \frac{1}{2}$
- (4) $\int \frac{\sin z\pi}{(z+1)^3(z+2)} dz, C; |z + 2| = 3$

(参考資料) 主な関数のマクローリン展開

(i) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots$

(ii) $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1} + \dots$

$$\text{(iii) } \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} + \dots$$

$$\text{(iv) } \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$