総合基礎数学序文

2005.9　　数学教室一同

総合基礎（数学）は、平成１４年度よりできた比較的新しい科目で、１，２年次の数学の総復習を行います。「数学の基礎学力を如何に定着させ、専門教科の学習に耐えうるようになるか」という課題に対して、長期に渡る学内の議論を経て制定されたものです。全国の高専で、このような数学の総復習をする科目は、めずらしいようです。このテキストについては、数学教室で編纂を行っています。当該分野の代表的な問題、基礎学力を涵養する問題、発展的な問題などをコンパクトな分量に配慮しつつ、工学との連携や最新の編入試験の動向を加味し、まとめあげたものです。また、すべての問題に対して簡単な解答を付けました。込み入った問題については答えへの筋道を付しました。このことで、自主的な学習が容易になりました。このテキストで、基礎学力をさらに確実なものに高めて下さい。

目 次

1　２次関数・方程式・不等式

＜例題１＞ 放物線 $y=-2x^2$ のグラフを次のように移動したときのグラフの方程式を求めよ．
(1) x 軸方向に -3　(2) y 軸方向に 4　(3) x 軸方向に 1, y 軸方向に -2
(4) x 軸対称　(5) y 軸対称　(6) 原点対称

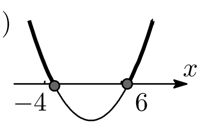
解答：
(1) $y=-2(x+3)^2$　(2) $y=-2x^2+4$　(3) $y=-2(x-1)^2-2$
(4) $(x,y)\to(x,-y)$　$-y=-2x^2$　$y=2x^2$
(5) $(x,y)\to(-x,y)$　$y=-2(-x)^2$　$y=-2x^2$
(6) $(x,y)\to(-x,-y)$　$-y=-2(-x)^2$　$y=2x^2$

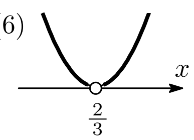
＜例題２＞ 次の２次関数のグラフの，頂点の座標と軸の方程式を求めよ．
(1) $y=x^2-4x+6$　(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{1}{2}$　(3) $y=-3x^2+9x-4$

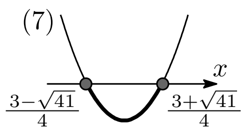
解答：
(1) $y=(x-2)^2-4+6=(x-2)^2+2$　よって，頂点 $(2\,,\,2)$，軸 $x=2$
(2) $y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x^2-6x)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{(x-3)^2-9\right\}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}(x-3)^2-4$　よって，頂点 $(3\,,\,-4)$，軸 $x=3$
(3) $y=-3x^2+9x-4=-3(x^2-3x)-4=-3\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}-4=-3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}-4$
$=-3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$　よって，頂点 $\left(\frac{3}{2}\,,\,\frac{11}{4}\right)$，軸 $x=\frac{3}{2}$

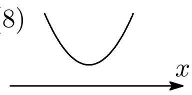
＜例題３＞ 次の方程式・不等式を解け．
(1) $x^2-2x-24=0$　(2) $9x^2-12x+4=0$　(3) $2x^2-3x-4=0$　(4) $2x^2-3x+4=0$
(5) $x^2-2x-24>0$　(6) $9x^2-12x+4>0$　(7) $2x^2-3x-4\leqq 0$　(8) $2x^2-3x+4<0$

解答：
(1) $(x-6)(x+4)=0$ より，　$x=6\,,\,-4$　(2) $(3x-2)^2=0$ より，　$x=\frac{2}{3}$（２重解）
(3) $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ より，　$x=\frac{3\pm\sqrt{41}}{4}$　(4) $x=\frac{3\pm\sqrt{-23}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{23}\,i}{4}$
(5) $(x-6)(x+4)>0$ より，　$x<-4\,,\,x>6$　(6) $(3x-2)^2>0$ より，　$x\neq\frac{2}{3}$ のすべての実数
(7) $\frac{3-\sqrt{41}}{4}\leqq x\leqq\frac{3+\sqrt{41}}{4}$
(8) $y=2x^2-3x+4$ のグラフは x 軸と共有点をもたず，常に $y>0$．よって，解なし．
(問題が $2x^2-3x+4>0$ であれば，解は「x はすべての実数」となる)

(5)


(6)


(7)


(8)


A 問題

1. $y=x^2$ のグラフを平行移動して, 頂点が次の点になる放物線の方程式を求めよ.

(1) $(1,2)$　　　(2) $(-3,4)$

2. 次の 2 次関数のグラフは $y=x^2$ のグラフをどのように平行移動したものか.

(1) $y=(x+3)^2$　　　(2) $y=(x-2)^2-1$　　　(3) $y=x^2+6x+4$

3. 次の放物線の頂点の座標を求めグラフをかけ.

(1) $y=x^2-4x-3$　　　(2) $y=2(x-3)(x+1)$

4. 次の 2 次関数の (　) の範囲での最大値，最小値を求めよ.

(1) $y=-x^2+4x-2$　$(0 \leqq x \leqq 3)$　(2) $y=2x^2+x$　$(-2 \leqq x \leqq 2)$

5. 放物線 $y=x^2-3x+1$ と直線 $y=2x-3$ の交点の座標を求めよ.

B 問題

6. 次の 2 次関数のグラフの方程式を求めよ.

(1) 頂点が $(2, 1)$ で，点 $(4, -3)$ を通る　(2) 3 点A $(-1, 6)$, B $(1, 4)$, C $(2, 9)$ を通る

7. 直線 $y=mx$ が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+2$ と異なる 2 点で交わるような m の値の範囲を求めよ.

8. 9 2 次方程式 $x^2+(m-2)x+(m-2)=0$ が重解をもつように定数 m の値を定め，そのときの解を求めよ.

9. 一定の幅 20cm のトタン板がある．その両端から同じ長さずつ直角に折り曲げて「とい」を作る．断面積を最大にするにはどうすればよいか.

C 問題

10. 線分を 2 つに分けるとき大部分と小部分との比が, 全体と大部分との比に等しくなるように分けている場合, その分割を黄金分割という．その場合の大部分と小部分の比を求めよ.

11. $x+y^2=1$ のとき，関数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ の最大値または最小値を求めよ.

12. 不等式 $(x^2-3x-6)^2-6(x^2-3x-6)+8 \leqq 0$ を満たす x の最大の整数を次の順序に従って求めよ.

(1) $t=x^2-3x-6$ として，$t^2-6t+8 \leqq 0$ を満たす t の範囲を求めよ.

(2) t の範囲を満たす x の最大の整数を求めよ.

13. 2 つの放物線 C_1 : $y=x^2+2ax-a^2+5a+4$ (a は実数), C_2 : $y=-x^2-6x$ がある.

(1) 放物線 C_1 の頂点 P の軌跡が描く図形の方程式を求めよ.

(2) 放物線 C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるように，定数 a の値の範囲を求めよ.

14. 2 次関数 $y=x^2-2px$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ.

2　恒等式・高次方程式・不等式

＜例題１＞ 次の左辺の分数式を，右辺の分数式の和で表せ. (a , b の値を定めよ)
このような変形を,「部分分数に分解する」という.

$$\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+3}$$

解答例：

$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ だから，両辺に $(x-2)(x+3)$ をかけると,

$1=a(x+3)+b(x-2)\cdots(1)$

(1) 式に $x=2$, -3 を代入する (正確にはできないがそれらに限りなく近い数を代入）と,

$1=5a$, $1=-5b$ より， $a=\frac{1}{5}$, $b=-\frac{1}{5}$

または，(1) 式の右辺を展開して整理すると,

$1=(a+b)x+(3a-2b)$

両辺の係数を比較すると，　$a+b=0$, $3a-2b=1$

連立方程式を解くと，　$a=\frac{1}{5}$, $b=-\frac{1}{5}$ 　　したがって，$\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)$

＜例題２＞ $x^4-2x^3+2x^2-x-6$ を因数分解せよ.

解答例：

$f(x)=x^4-2x^3+2x^2-x-6$ とおく. $f(1)\neq0$, $f(-1)=1+2+2+1-6=0$ だから,
$f(x)$ は $(x+1)$ で割り切れる．割り算をすると, $f(x)=(x+1)(x^3-3x^2+5x-6)$ となる.
次に $g(x)=x^3-3x^2+5x-6$ とおく. $g(-1)\neq0$, $g(2)=8-12+10-6=0$ より,
$g(x)$ は $(x-2)$ で割り切れる．実際に割り算をすると, $g(x)=(x-2)(x^2-x+3)$ となる.
よって $f(x)=(x+1)\cdot g(x)=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$
(x^2-x+3) は実数の範囲では因数分解できないので，ここまでで終わり.

＜例題３＞ a , b が正の数のとき，次の不等式を証明せよ.
また，等号が成立するのはどのような場合か.

(1) $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ 　　　(2) $a+\dfrac{1}{a}\geqq2$

解答：

(1)　(左辺) − (右辺) $=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq0$
等号成立は, $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ のとき，つまり $a=b$ のとき.
この不等式の左辺を「相加平均」，右辺を「相乗平均」という.

(2)　(左辺) − (右辺) $=a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2+1-2a}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\geqq0$ 　等号成立は, $a=1$ のとき.
この不等式は (1) を利用して証明してもよい. $\frac{1}{a}>0$ だから, (1) の b に $\frac{1}{a}$ を代入できて,
$\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\geqq\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}$ 　両辺を 2 倍すると， $a+\frac{1}{a}\geqq2\sqrt{1}$ 　よって, $a+\frac{1}{a}\geqq2$
等号成立は, $a=\frac{1}{a}$ のとき，つまり $a^2=1$ のとき． $a>0$ だから, $a=1$ のとき.

A 問題

1. 次の等式が恒等式になるように，a , b , c の値を定めよ．

(1) $x^2+13=a(x^2+2)+(bx+c)(x-3)$

(2) $3x^2-7x+1=a(x-2)^2+b(x-2)+c$

2. 次の左辺の分数式を，右辺の分数式の和で表せ．(a , b , c の値を定めよ)

(1) $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$　　(2) $\dfrac{x^2-8x+18}{(x+1)(x-2)^2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}$

3. 整式 $2x^3-x^2-4$ を整式 B で割ると商が $2x-1$，余りが $-2x-3$ となった．整式 B を求めよ．

4. 次の方程式を解け．

(1) $8x^3=1$　　(2) $x^4-x^3-x^2-x-2=0$

5. 次の式を 1 つの複素数 $a+bi$ の形に表せ．

(1) $(2+i)^2$　　(2) $\dfrac{1+2i}{4+3i}$

B 問題

6. x^3+ax^2-5x+b は $x+2$ で割り切れ，$x+1$ で割ると余りが 8 であるという．
a , b の値を求めよ．

7. $(3+2i)x-(2-i)y=2+i$ を満たす実数 x , y を求めよ．

8. 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 1 つの解が $1+\sqrt{2}$ であるとき，定数 a , b の値を求めよ．
ただし，a , b は整数とする．

9. 4次方程式 $2x^4+ax^3+bx^2-3x+2=0$ が $x=1$, -2 を解にもつとき，定数 a , b の値を求めよ．また，残りの解も求めよ．

C 問題

10. 次の不等式を証明せよ．ただし，p, q は正の数で，a, b, c, x, y, z は一般の実数とする．

(1) $\sqrt{\dfrac{p^2+q^2}{2}} \geqq \dfrac{p+q}{2}$　　(2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

11. 次の不等式を解け．

(1) $x^3+4x^2+x-6<0$　　(2) $x^4-x^3-4x^2+4x \geqq 0$

12. 3次方程式 $x^3+1=0$ の 3 つの相異なる解を α , β , γ とする．自然数 n に対し $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ の値は，n の値に応じてどのように変化するかを決定せよ．

3　円の方程式・三角関数

＜例題１＞ ２点 $A(3\,,\,4)$, $B(5\,,\,-2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ．

解答例:　直径 AB の中点が円の中心になる．中心の座標を求めると，

$$\left(\frac{3+5}{2}\ ,\ \frac{4+(-2)}{2}\right)=(4\,,\,1)$$

よって，$(x-4)^2+(y-1)^2=r^2$ とおける．点 $A(3\,,\,4)$ を通るので，

$(3-4)^2+(4-1)^2=r^2$ より，$r^2=10$

よって，$(x-4)^2+(y-1)^2=10.$

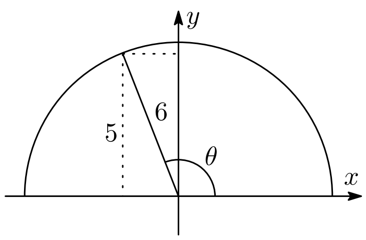
＜例題２＞ 第２象限の角 θ に対して，$\sin\theta=\dfrac{5}{6}$ である．$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

解答例:　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，$\cos^2\theta=1-\dfrac{25}{36}=\dfrac{11}{36}$

θ は第２象限の角だから，$\cos\theta<0$.

よって，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，$\tan\theta=\dfrac{\frac{5}{6}}{-\frac{\sqrt{11}}{6}}=-\dfrac{5}{\sqrt{11}}$



＜例題３＞ △ ABC で $a=\sqrt{6},\ b=2\sqrt{3},\ c=3+\sqrt{3}$ のとき，$\angle A$ を求めよ．

解答例:　余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ に代入して

$6=12+9+6\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}(3+\sqrt{3})\cos A$

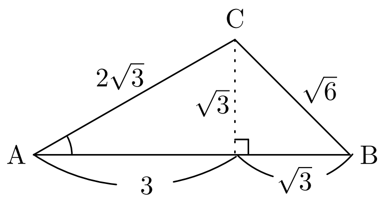
$4\sqrt{3}(3+\sqrt{3})\cos A=18+6\sqrt{3}$

したがって，

$$\cos A=\frac{18+6\sqrt{3}}{4\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}=\frac{6(3+\sqrt{3})}{4\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ<A<180^\circ$ より，$A=30^\circ$



A 問題

1. 円 $x^2+y^2+6x-8y+9=0$ の中心の座標と半径を求めよ．

2. $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ．

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3) $\tan\theta = \sqrt{3}$

3. 半径が 4cm で中心角が 1 ラジアンの扇形の弧の長さと面積を求めよ．

4. $y=\sin x$ のグラフをもとに，次の関数のグラフをかけ．

(1) $y=-\sin x$　　(2) $y=\sin(-x)$　　(3) $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

5. △ ABC において $b=5$, $c=4$, $\angle A=45^\circ$ である．△ ABC の面積を求めよ．

B 問題

6. 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+k$ が接するように k の値を定め，接点の座標を求めよ．

7. 長さが ℓ である母線と中心軸のなす角が θ である円錐（頂角の大きさが 2θ）をつくるには，どのような形の扇形と円から作ればよいか

8. $y=\cos 2x$ のグラフは，$y=\sin x$ のグラフをもとにしてどのような変形と平行移動を行えば描けるか．

9. $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，方程式 $\cos x + 2\cos^2 x = 0$ を解け．

10. $\sin\theta+\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

11. △ ABC が $\angle B=60^\circ$, $\angle C=75^\circ$, $b=2\sqrt{6}$ であるとき，a と外接円の半径 R を求めよ．

12. △ ABC が $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $\angle B=45^\circ$ であるとき $\angle A$ の値を求めよ．

C 問題

13. 2 つの円 C_1 : $x^2+y^2=5$, C_2 : $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ がある．

(1) 2 つの円の交点を通る直線の方程式を求めよ．

(2) 2 つの円の交点の座標を求めよ．

14. 半径 1 の円に外接する正 12 角形の周の長さ L の値を 30° の三角比を使い表し，$\dfrac{L}{2}$ が円周率 π よりわずかに大きいことを確かめよ．

15. △ ABC において $a=5$, $b=6$, $c=7$ である．

(1) △ ABC の面積 S を求めよ．　　(2) 外接円の半径 R を求めよ．

(3) 内接円の半径 r を求めよ．

16. △ ABC において $b\cos B = c\cos C$ が成立するとき，この三角形はどんな形をしているか．

17. 円に内接する四角形 ABCD がある．AB $=8$, BC $=3$，CD $=5$，DA $=5$ であるとき，この四角形の BD の長さ，$\sin A$ および面積 S を求めよ．

4 三角関数 (加法定理)

＜例題 1＞ 加法定理を使って，次の値を求めよ．

(1) $\sin 165^\circ$ (2) $\cos 105^\circ$ (3) $\tan 75^\circ$

解答例:

(1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ より，

$$\sin 165^\circ = \sin(120^\circ + 45^\circ) = \sin 120^\circ \cos 45^\circ + \cos 120^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ より，

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

(3) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ より，

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

＜例題 2＞ $\cos 5x\ \sin 3x$ を三角関数の和または差の形に書きかえよ．

解答例: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \cdots \ (1)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad \cdots \ (2)$

$(1)-(2)$ より，

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

両辺を 2 で割ると，

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\alpha = 5x$, $\beta = 3x$ を代入すると，

$\cos 5x \sin 3x = \dfrac{1}{2}\left(\sin 8x - \sin 2x\right)$

＜例題 3＞ $\sin x + \cos x$ を $r\sin(x+\alpha)$ の形に表せ． (三角関数の合成)

解答例: $a\sin x + b\cos x$ のとき，$r = \sqrt{a^2+b^2}$ だから，$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

この式と加法定理 $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$ を比較して，

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos x\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

A 問題

1. 次の三角関数のグラフをかけ.

(1) $y = 3\sin\dfrac{x}{2}$ (2) $y = \sin x + \cos x$

2. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ である角 α , β に対し $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$ であるという.

$\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ.

3. $\cos x = \dfrac{3}{5}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < 0\right)$ のとき，次の三角関数の値を求めよ.

(1) $\sin 2x$ (2) $\cos 2x$ (3) $\tan 2x$

4. 次の式の値を求めよ.

(1) $\sin\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{4}$ (2) $\cos\dfrac{7\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{12}$

B 問題

5. $\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ のみを用いて表せ．また $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ のみを用いて表せ (3 倍角の公式).

6. $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sin 2x$ の値を求めよ.

7. $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$ を解け.

8. $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $y = \cos 2x + \sin x$ の最大値，最小値を求めよ.

9. $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け.

(1) $\sin x > \dfrac{1}{2}$ (2) $\sin 2x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

C 問題

10. $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin 2x > \cos x$ を解け.

11. $\theta = 36^\circ$ のとき $\sin 2\theta = \sin 3\theta$ を示し，$\cos 36^\circ$ の値を求めよ.

12. 1 m あたり 1 kg である針金を 1 点 P で直角に曲げて短い辺が a m で長い辺が b m であるような「差し金」を作り, 点 P のみを持ちつり下げる.「差し金」の長い辺が水平面となす角を θ として以下の問に答えよ.

(1) その「差し金」の位置エネルギー E を，点 P の高さを原点として表せ (ヒント　短い辺, 長い辺それぞれの位置エネルギーの和であり, それらの計算は各辺の中心に質量が集中しているとして求めてよい).

(2) E が最小になるとき「差し金」が安定することを用い，角 θ が満たすべき条件式を求めよ.

13. 関数 $y = \sin 2x - 2a(\sin x + \cos x) + 2$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおいて，y を t の関数で表せ.

(2) t の範囲を求め，y の最大値，最小値を求めよ.

5　いろいろな関数

＜例題 1 ＞ 次の関数のグラフをかけ.

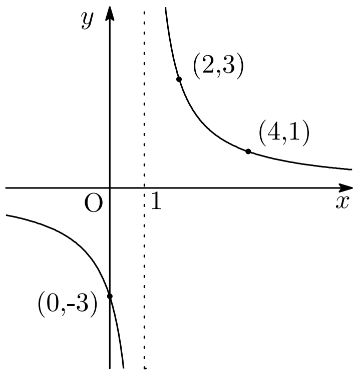
(1) $y = \dfrac{3}{x-1}$　　　　(2) $y = \sqrt{2-x} + 1$

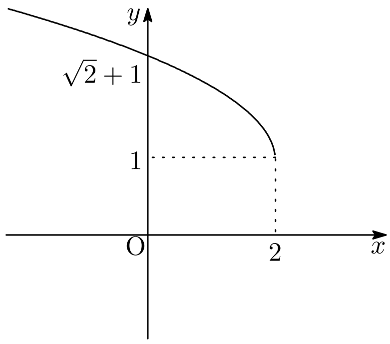
解答例：

$y = \dfrac{3}{x-1}$ のグラフは，$y = \dfrac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの.

$y = \sqrt{-(x-2)} + 1$ のグラフは，$y = \sqrt{x}$ のグラフを y 軸で折り返した後に

x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの.





＜例題 2 ＞ $y = 2^x$ と $y = \log_2 x$ のグラフをかき，2 つのグラフの関係を述べよ.

解答例：

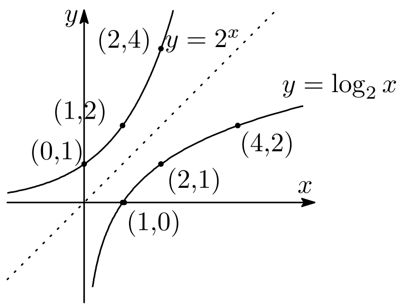
指数関数 $y = 2^x$ $(\Leftrightarrow x = \log_2 y)$ と

対数関数 $y = \log_2 x$ $(\Leftrightarrow x = 2^y)$ は，

互いに逆関数である.

したがって，２つのグラフは

直線 $y = x$ に関して対称である.



＜例題 3 ＞ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{12}$ と 2^7 はどちらが大きいか．ただし $\log_{10} 2 \doteqdot 0.3010$, $\log_{10} 3 \doteqdot 0.4771$ である.

解答例：

2^{12} をそれぞれにかけて比較してよい

$\log_{10} 3^{12} = 12 \log_{10} 3 \doteqdot 12 \times 0.4771 = 5.7252$,　$\log_{10} 2^{19} = 19 \log_{10} 2 \doteqdot 19 \times 0.3010 = 5.719$

したがって，$3^{12} > 2^{19}$ であり $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{12} > 2^7$.

　蛇足だが，この両者が極めて近いことから音楽では，音の高さのクィント（5 度＝ 7 半音）で 12 上がるとオクターブ（倍音＝ 12 半音）で 7 つ上がる事が導かれる.

A 問題

1. 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ (2) $y=\dfrac{2^x}{4}$ (3) $y=\log_{0.5}x$

2. 次の問いに答えよ.

(1)曲線 $y=\sqrt{x+3}$ のグラフをかけ.

(2)曲線 $y=\sqrt{x+3}$ と直線 $y=x+1$ の交点の座標を求めよ.

3. 次の値を求めよ.

(1) $\sqrt[3]{27^2}$ (2) $\sqrt[4]{\dfrac{9^3}{12^2}}$ (3) $81^{0.75}$ (4) $8^{-\frac{2}{3}}$

4. 次の等式を対数を用いて書き直せ.

(1) $5^3=125$ (2) $2^{-5}=\dfrac{1}{32}$

5. 次の対数の値を求めよ.

(1) $\log_{32}8$ (2) $\log_{\frac{1}{16}}\dfrac{1}{4}$ (3) $4\log_{10}\sqrt{15}-\log_{10}18+\log_{10}80$

B 問題

6. 次の不等式を解け.

(1) $x-2\leqq\dfrac{3}{x}$ (2) $\sqrt{4-x}>x-2$

7. ５つの数 $0.5^{0.5}$, $2^{0.75}$, $0.5^{-1.5}$, 0.5^0, $2^{-\frac{1}{3}}$ を小さい順に並べよ.

8. x の方程式 $2^{2x}-2^{x+1}-8=0$ を解け.

9. 地震のエネルギー E(単位はジュール) とマグニチュード M の間には $\log E=4.8+\dfrac{3}{2}M$ という等式が成り立つ．２つの地震 A と B を比べたときそれぞれの地震のエネルギー E_A, E_B が $\dfrac{E_B}{E_A}=2$ であるとする．それぞれのマグニチュード M_A, M_B はどのように違うか？

10. 底の変換公式を用いて次式の値を求めよ.

$\log_3 32\cdot\log_2\dfrac{1}{3}\cdot\log_9 27$

C 問題

11. 実数 x の関数 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ の最小値と，それを与える x を求めよ.

12. 直線 $y=ax+1$ と曲線 $y=\dfrac{1}{x-3}$ が 2 点を共有するための a の値の範囲を求めよ.

13. 不等式 $9^x-3^x\leqq 72$ を解け.

14. 自然数 x, y がそれぞれ m 桁と n 桁で $x<y$ であるとする．積 xy は何桁になりうるか？また商 $\dfrac{x}{y}$ は少数第何位に初めて 0 以外の数が現われうるか.

15. 池田首相は国民総生産を毎年，前年比 x %以上増加させて 10 年後に国民総生産を 2 倍以上にすることを目指す政策をとった．x を求めよ．ただし，$\log_{10}2\fallingdotseq 0.3010$.

6　ベクトル

＜例題１＞ △ABC に対して, AC の中点を M, BM の中点を D, BC を $1:2$ に内分する点を E とする. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表し, ３点 A, D, E は一直線上にあることを証明せよ.

解答例:　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$, よって $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{\vec{b}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{2}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}/2}{2}=\dfrac{1}{4}(2\vec{b}+\vec{c})$

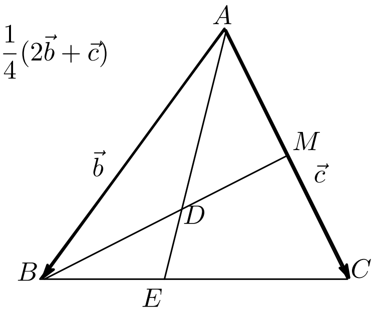
一方, 内分点の位置ベクトルの公式より

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{1\vec{c}+2\vec{b}}{1+2}=\dfrac{1}{3}(2\vec{b}+\vec{c})$.

これらより $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ は平行である

$(\because\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ ので,

A, D, E は一直線上にあると言える.



＜例題２＞ ３点A $(-1\,,\,0)$，B $(2\,,\,-1)$，C $(1\,,\,1)$ がある．このとき，次のものを求めよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の作る角　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$で作る平行四辺形の面積

解答例：

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2\,,\,-1)-(-1\,,\,0)=(3\,,\,-1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1\,,\,1)-(-1\,,\,0)=(2\,,\,1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\cdot 2+(-1)\cdot 1=5$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$　　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ)$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \theta=45^\circ$$

(3)　平行四辺形の面積を S とすると，$S=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta=\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5$

別解１ $S^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2=10\cdot 5-5^2=25,$　　$S=5$

別解２ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を並べた行列の行列式の絶対値を計算して $S=\left\|\begin{matrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{matrix}\right\|=|3-(-2)|=5$

＜例題３＞ ２点 A$(-2,7)$，B$(4,-1)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ.

解答例:　円周上の任意の点を P(x,y) とすると，AP⊥BP より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ だから，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x+2\,,\,y-7)\cdot(x-4\,,\,y+1)=0$

$(x+2)(x-4)+(y-7)(y+1)=0,$　　$x^2-2x-8+y^2-6y-7=0$

$(x-1)^2-1+(y-3)^2-9-15=0$　　よって，$(x-1)^2+(y-3)^2=25$

A 問題

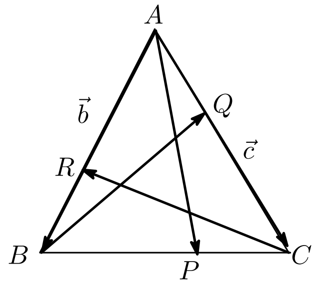
1. △ABC の辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R を

$$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \mathrm{CQ} : \mathrm{QA} = \mathrm{AR} : \mathrm{RB} = 2 : 1$$

を満足するようにとり, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} + \overrightarrow{\mathrm{CR}} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ.



2. 次の 2 つのベクトルの作る角を求めよ.

(1) $\vec{a} = (1\,,\,3)$, $\vec{b} = (1\,,\,-2)$　　(2) $\vec{a} = (\sqrt{3} + \sqrt{2}\,,\,1 + \sqrt{6})$, $\vec{b} = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\,,\,1)$

3. 一辺の長さが 1 の正 6 角形 ABCDEF において，次の内積の値を求めよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FD}}$　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EA}}$

4. ベクトル $\vec{a} = (3\,,\,4)$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ と，垂直な単位ベクトル $\vec{f}$ を求めよ.

5. 3 点 A$(1\,,\,-2)$, B$(3\,,\,4)$, C$(7\,,\,1)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ.

B 問題

6. 一辺の長さが 1 である正 5 角形 ABCDE を考え，その対角線の長さを k とし $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{e}$ とする．次の問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ 及び，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ そして $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を数 k と $\vec{b}$, $\vec{e}$ を用いて表せ.

(2) ベクトルの等式 $\overrightarrow{\mathrm{BE}} = k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を用いて数 k の満たす 2 次方程式を導き，k の値を求めよ.

7. 4 面体 OABC において, $\mathrm{OA}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{AB}^2$ が成り立つとき, $\mathrm{AC} \perp \mathrm{OB}$ であることをベクトルを用いて証明せよ.

8. $\vec{a} = (4\,,\,-3)$, $\vec{b} = (2\,,\,1)$, $\vec{c} = (-1\,,\,2)$ のとき, $\vec{a} + t\vec{b}$ について，次の問いに答えよ.
ただし t は実数とする.

(1) $\vec{a} + t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような t の値を求めよ.

(2) $\vec{a} + t\vec{b}$ の大きさが 5 であるような t の値を求めよ.

(3) $\vec{a} + t\vec{b}$ の大きさが最小になるときの t の値と，その最小値を求めよ.

C 問題

9. 平面上の 2 定点 A, B に対して, $(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 0$ を満たしながら動く点 P はどのような図形を描くか.

10. △ABC の内部に点 P をとり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 3\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \vec{0}$ が成り立っている．直線 AP と辺 BC の交点を Q とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ.

(2) BQ : QC および AP : PQ を求めよ.

(3) 面積比 △PAB : △PBC : △PCA を求めよ.

7　空間ベクトル

＜例題 1 ＞ $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，次のものを求めよ.

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

(2) $|2\vec{a}+\vec{b}|^2$

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ

(4) $|\vec{a}-\vec{b}|$

解答例：

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=9-4=5$

(2) $|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36-12+4=28$

(3) $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-3}{3\times 2}=-\frac{1}{2}$　よって $\theta=120^\circ$

(4) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9+6+4=19$　よって $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{19}$

＜例題 2 ＞ 次の図形の方程式を求めよ.

(1) 2 点A $(3\,,5\,,1)$ ， B $(2\,,3\,,5)$ を通る直線

(2) 点A $(2\,,-3\,,5)$ を通り, 直線 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{-6}=z$ に垂直な平面

解答例：

(1)$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2\,,3\,,5)-(3\,,5\,,1)=(-1\,,-2\,,4)$

直線上の点をP $(x\,,y\,,z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，

$(x\,,y\,,z)=(3\,,5\,,1)+t(-1\,,-2\,,4)$

よって, $x=3-t$ ，$y=5-2t$ ，$z=1+4t$ （t は, パラメータ（媒介変数）と言う）

または, $t=-x+3$ ，$t=\frac{-y+5}{2}$ ，$t=\frac{z-1}{4}$ より，$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{4}$

(2)直線の方向ベクトルは，$\vec{v}=(3\,,-6\,,1)$ である．直線と平面が垂直なので,

平面の法線ベクトルを $\vec{n}=(3\,,-6\,,1)$ としてよい.

よって平面の方程式は $3x-6y+z=d$ とおけるが,

点 $A(2\,,-3\,,5)$ を通るので，$6+18+5=d \implies d=29 \implies 3x-6y+z=29$

＜例題 3 ＞ ベクトル $\vec{a}=(1\,,-1\,,2)$ ，$\vec{b}=(-2\,,3\,,0)$ に対して

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を求めよ.

(2) $\vec{a}, \vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積を求めよ.

解答例：

(1)$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-2)+(-1)\cdot 3+2\cdot 0=-5.$

$\vec{a}\times\vec{b}=((-1)\cdot 0-2\cdot 3,\ -(1\cdot 0-2\cdot(-2)),\ 1\cdot 3-(-1)\cdot(-2))=(-6,\ -4,\ 1).$

(2)平行四辺形の面積 S は上で求めた外積の大きさに等しい.

よって $S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{53}$　$\left(=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\right).$

$\boxed{\text{A 問題}}$

1. $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{7}$ のとき，次のものを求めよ．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の作る角

2. 次の直線または平面の方程式を求めよ．

(1) 直線 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$ に平行で，点 $(2\,,-1\,,3)$ を通る直線

(2) 直線 $\dfrac{x-3}{2}=2-y=z-2$ に垂直で，点 $(-2\,,4\,,1)$ を通る平面

3. 直線 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$ と平面 $2x-y+3z=0$ の交点の座標を求めよ．

4. 次の球の方程式を求めよ．

(1) 直径の両端が点 $(1\,,3\,,5)$，$(-3\,,1\,,1)$ である球

(2) 点 $(1\,,-3\,,2)$ を中心として，xy 平面に接する球

$\boxed{\text{B 問題}}$

5. 座標空間内の４点 $\mathrm{A}(1,1,1)$, $\mathrm{B}(3,0,2)$, $\mathrm{C}(2,0,1)$, $\mathrm{D}(0,2,4)$ に対して次のものを求めよ．

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の $\angle\mathrm{A}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な単位ベクトル

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積

(4) ４面体 ABCD の体積

(5) ３点 A, B, C を通る平面の方程式

6. ２直線 $x-1=\dfrac{y-3}{a}=\dfrac{z+4}{-3}$，$x+2=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z+b}{3}$ が直交するように $a\,,b$ の値を定めよ．また，そのときの交点の座標を求めよ．

7. 平面 $\alpha: x+2y+3z=4$ に対して

(1) 平面 α と原点との距離を求めよ．

(2) 平面 α に関して原点と対称な点（鏡映と言う）の座標を求めよ．

8. ２つの平面 $x+y+z=1$ および $x+2y+3z=4$ の交線（交わりの直線）の方程式を求めよ．

$\boxed{\text{C 問題}}$

9. ベクトル $\vec{a}=(2,-1,-2)$, $\vec{b}=(1,-1,x)$ について次のような x の値を求めよ．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような x

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の作る角が 45° になるような x

10. 球 $x^2+y^2+z^2=25$ と平面α: $4x-3y+5z=25$ がある．

(1) 球の中心を通り，平面 α に垂直な直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 平面 α と直線 ℓ の交点の座標を求めよ．

(3) 球と平面 α の交わりである円の半径を求めよ．

8　微分法

＜例題１＞　関数 $f(x)=x^3$ を定義にしたがって微分せよ．

解答例：

微分の定義式は，$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-x^3=3x^2h+3xh^2+h^3=h(3x^2+3xh+h^2)$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$

＜例題２＞　極限値 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ を使って極限値 $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ の値を求めよ．

さらに $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値も求めよ．

解答例：

変数を $x+1=-s$ を満たす s に変えると

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{-s}{-s-1}\right)^{-(s+1)}=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{s+1}{s}\right)^{(s+1)}=\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\cdot\left(1+\frac{1}{s}\right)=e$$

そこで変数を $h=1/x$ を満たす h に変えれば

$\lim_{h\to+0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$　と同様に　$\lim_{h\to-0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

ゆえに $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

＜例題３＞　次の関数を微分せよ．ただし A は正の定数とする．

(1) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$　　(2) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+A}\right)$　　(3) $y=x^x$

解答例：

(1) $y'=\dfrac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{1}{1+\cos x}$

(2) $u=x+\sqrt{x^2+A}$ とおくと，$y=\log u$ で合成関数の微分公式より

$$y'=\frac{u'}{u}=\frac{1+\left(\sqrt{x^2+A}\right)'}{u}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+A}}}{x+\sqrt{x^2+A}}=\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+A}}{\sqrt{x^2+A}}}{x+\sqrt{x^2+A}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$$

(3) 両辺の自然対数を考え対数の性質を使うと $\log y=x\log x$ だから，両辺を x で微分して

$\dfrac{d}{dy}\log y\cdot\dfrac{dy}{dx}=(x\log x)'$

$\dfrac{1}{y}\cdot y'=x\cdot\dfrac{1}{x}+1\cdot\log x=1+\log x$　この両辺に $y=x^x$ をかけると

$y'=x^x(1+\log x)$

A 問題

1. 次の極限値を求めよ. ただし a は正の定数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

2. 次の極限値を求めよ. ただし a,b,c,d は定数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

3. 次の関数を微分せよ.

(1) $y=(x-1)(2x-1)(3x-1)$　　(2) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$　　(3) $y=\sqrt{4-x^2}$

4. 定数 A,ω,θ に対して決まる t の関数 $y=A\sin(\omega t+\theta)$ に対し $\dfrac{dy}{dt}$ と $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を求めよ.

5. 底が e である対数関数についての等式 $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ を利用して $y=e^x$ の導関数を求めよ.

B 問題

6. 地面に置いたボールの中心を高さ 0 メートルとし，上向きに速度 v_1 で打ち出したとき t 秒後のボールの (中心の) 高さは再び接地するまで $h=v_1t-\dfrac{1}{2}gt^2$ で表されるとする.

(1) 速度が 0 となる時刻 t_1 とその高さ h_1 を求めよ.

(2) ボールは地面との衝突を繰り返しやがて静止する．n 回目に地面から離れる際の速度を v_n とし，n 回目の空中に浮かんでる時間を $2t_n$ と置く．$\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=k$(一定) としてボールの滞空時間の総和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2t_n$ の値を求めよ.

7. $y=x^2$ のグラフ上の原点以外の点 $P(a,a^2)$ を考える.

(1) P での接線の方程式と，接線に垂直で P を通る直線 (法線) の方程式を求めよ.

(2) 原点での法線と P での法線との交点を Q とする．グラフに沿って P を原点に近づけるとき点 Q はどんな点に近づくか.

8. $y=x^2$ のグラフへと 2 本の接線が引けるような点 (a,b) が満たす不等式を求めよ．そして点 (a,b) から引いた 2 本の接線に対するそれぞれの接点を結んでできる線分の傾きを求めよ.

C 問題

9. (1) $0<\theta<\pi/2$ で不等式 $\sin\theta<\theta<\tan\theta$ が成り立つ事を利用し極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$ を求めよ.

(2) $\sin x$ の導関数をその定義と (1) を使い求めよ.

10. 定数 a,b に対し決まる関数 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}\cos x & x\geqq 0 \text{ のとき} \\ ax+b & x<0 \text{ のとき}\end{cases}$ が微分可能になる a,b を求めよ.

11. 3 次方程式 $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ は必ず実数解を一つ以上持つことを示せ.

12. 関数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & x=0 \text{ のとき}\end{cases}$ に対し $f'(x)$ を求めよ．また $f'(x)$ は $x=0$ で連続か不連続かを調べよ.

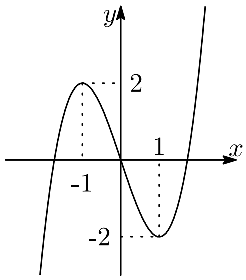
9　微分の応用

＜例題１＞　関数 $y = x^3 - 3x$ の増減を調べ極値を求めて，そのグラフをかけ．

解答例：

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$

$y' = 0$ となる $x = \pm 1$ で定義域（全実数）を分割し各区間での y' の符号を調べ増減表にまとめると



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

極大値 2（$x = -1$）極小値 -2（$x = 1$）の奇関数のグラフ．

＜例題２＞半径 a の球に内接する直円錐で体積が最も大きなものの底円の半径と高さを求めよ．

解答例：

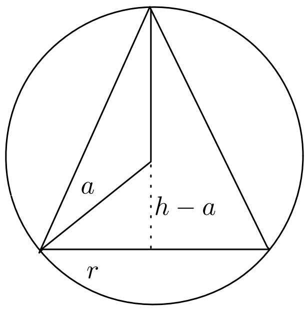
直円錐について底円の半径，高さ，体積をそれぞれ r, h, V とする．

内接する条件 $a^2 = r^2 + (h - a)^2$ を $V = \pi r^2 h/3$ に代入し

$V = \frac{\pi}{3}\left(a^2 - (h - a)^2\right) h = \frac{\pi}{3}\left(2ah^2 - h^3\right)$

$V' = \frac{\pi}{3} h(4a - 3h) = 0$ より $V' = 0$ の解 $h = 0,\ 4a/3$ で

V の定義域 $0 < h < 2a$ を分割し増減表にまとめると



h	0	$\cdots$	4a/3	$\cdots$	$2a$
V'	0	＋	0	−	−
V	0	$\nearrow$	$32\pi a^3/81$	$\searrow$	0

$r = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{4a}{3} - a\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$　で $h = \dfrac{4a}{3}$ のとき最大．

＜例題３＞正の数 x に対し不等式 $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ が成立することを示せ．

解答例：

$f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ とおき，$f(x) > 0$ を示す．

$f'(x) = e^x - 1 - x,\ f''(x) = e^x - 1$　で $e > 1$ より $x > 0$ では $f''(x) > 0$

ゆえに $f'(x)$ の導関数の値が区間 $(0, \infty)$ では正なので $f'(x)$ は区間 $[0, \infty)$ で単調増加．

ゆえに $f'(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$ より区間 $[0, \infty)$ で $f'(x) \geqq 0$（等号成立は $x = 0$ のとき）

このことは $f(x)$ が $[0, \infty)$ で $f(x) \geqq f(0)$（等号成立は $x = 0$ のとき）を意味し

$f(0) = e^0 - 1 - 0 - 0 = 0$ なので $x > 0$ で $f(x) > 0$ が示された．

A 問題

1. $x > 0$ に対し次の不等式を示せ.

(1) $\sqrt{x+1} < \dfrac{x}{2} + 1$　　(2) $\log x \leqq x - 1$

2. 指定された定義域での次の関数の最大値と最小値を求めよ.

(1) $y = \dfrac{x}{e^x}$　$[-2, 3]$　　(2) $y = \cos x + x \sin x$　$[-\pi, \pi]$

3. 1 辺が 6cm の正方形の板の四隅から合同な正方形を切り取って，残りの部分を折り曲げて接合し，上部の開いた箱を作る．箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか.

4. 関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $x = 0$ で極大となり，$x = 1$ で極小値 2 を持つには定数 a, b, c をどのように決めればよいか.

B 問題

5. 次の関数の増減を調べ，極値を求めグラフを描け.

(1) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$　　(2) $y = x\sqrt{1-x^2}$　$[-1, 1]$

6. 表面積が正の一定値 S_0 である直円柱のうちでその体積 V が最大であるものの, 底面の半径 r と高さ h の比を求めよ.

7. シャボン玉に一定の割合（毎秒 $V_0\,\mathrm{cm}^3$ とする）で息を吹きこんだときの直径 $D\,\mathrm{cm}$ の時間 t に対する増加率 $\dfrac{dD}{dt}$ を考える．シャボン玉の直径が 2 倍になると D の増加率 $\dfrac{dD}{dt}$ は何倍になるか.

8. 水面からの高さが 5 m の地点から 15 m の距離にある水面上の「浮き」に結ばれた釣り糸を毎秒 1 m の速さで巻き取ったとする．2 秒後の「浮き」が水面を動く速度を求めよ．釣り糸はピンと張っていると仮定する.

C 問題

9. 正の定数 a, b, c, ω に対する関数 $f(t) = ae^{-bt}\sin(\omega t + c)$ は，$\tan(\omega t + c) = \dfrac{\omega}{b}$ を満たす t において極値を持つことを示せ.

10. $f(x) = x^2 - 2$ とする．$\sqrt{2}$ を近似する数列 x_n を次のように帰納的に決めてゆく．$x_1 = 2$ とし，$f(x)$ のグラフ上の点 $(x_n, f(x_n))$ での接線と x 軸との交点の座標を x_{n+1} とする.

(1) x_{n+1} を x_n で表す式（漸化式）を求め，x_2, x_3, x_4 を分数で求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ.

11. $y = x^3$ のグラフ上の点 $A(1, 1)$ と原点の間にグラフに沿って動く点 $P(p, p^3)$ を考える．三角形 OPA の面積が最大となるときの P の座標およびそのときの面積を求めよ.

12. 3 次方程式 $x^3 - ax - b = 0$ が 3 つの実数解を持つような実定数 a, b の条件を求めよ.

10　不定積分

＜例題 1＞ 次の積分を計算しなさい.　(1) $\displaystyle\int \frac{x}{(3x+1)^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$

解答例：

(1) $3x+1=t$ とおくと $3dx=dt$, $x=\frac{t-1}{3}$ なので置換積分により

$$（与式）=\int \frac{\frac{t-1}{3}}{t^2}\frac{dt}{3}=\frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{9}\left(\log|t|+\frac{1}{t}\right)+C=\frac{1}{9}\left(\log|3x+1|+\frac{1}{3x+1}\right)+C$$

ここで C は任意の定数（積分定数）である.

(2) 部分積分をして　$（与式）=x\dfrac{e^{2x}}{2}-\displaystyle\int x'\frac{e^{2x}}{2}dx=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C=\frac{(2x-1)e^{2x}}{4}+C$

＜例題 2＞ 次の積分を計算しなさい.　(1) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$　　(2) $\displaystyle\int e^{-x}\sin x dx$

解答例：

(1) $\sin^3 x=\sin^2 x\sin x=(1-\cos^2 x)\sin x$ なので $\cos x=t$ と置換. $\frac{dt}{dx}=-\sin x$ より

$$（与式）=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int(1-t^2)(-dt)=\int(t^2-1)dt=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$$

(2) e^{-x} を積分すると $-e^{-x}$ なので部分積分を使うと

$$（与式）=-e^{-x}\sin x-\int(-e^{-x})(\sin x)'dx=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x dx$$

もう一度同様な部分積分を使うと

$$（与式）=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int(-e^{-x})(\cos x)'dx=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x dx$$

与式が右辺にも現れたのでこれを左辺に移項すれば

$$2\times（与式）=-e^{-x}(\sin x+\cos x),\qquad ゆえに\quad （与式）=\frac{-e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C$$

＜例題 3＞ 次の積分を計算しなさい.　$\displaystyle\int \frac{x^3-4}{x^3+2x^2}dx$

解答例：

x^3-4 を x^3+2x^2 で割り商 1 と余り $-2x^2-4$ を得る.　$\dfrac{x^3-4}{x^3+2x^2}=1+\dfrac{-2x^2-4}{x^3+2x^2}$.

第 2 項を部分分数へ分解するため定数 a,b,c で $\dfrac{-2x^2-4}{x^2(x+2)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x+2}$ となる数を探す.

$-2x^2-4=ax(x+2)+b(x+2)+cx^2$ の各次数の係数を比較するなどして $a=1, b=-2, c=-3$ で成り立つとわかり

$$（与式）=\int dx+\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{-2}{x^2}dx+\int\frac{-3}{x+2}dx=x+\log|x|+\frac{2}{x}-3\log|x+2|+C$$

$$=\frac{x^2+2}{x}+\log\frac{|x|}{|x+2|^3}+C$$

$\boxed{\text{A 問題}}$

1. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (x-1)(x-2)dx$ (2) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{x}}dx$

(4) $\displaystyle\int (3\sin x+2\cos x)dx$ (5) $\displaystyle\int 3\tan^2 x dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$

2. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (2x+1)^3 dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}}$ (3) $\displaystyle\int 3\sin 2\theta d\theta$

(4) $\displaystyle\int (e^{2x}-e^{-x})dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{\log 2x}{3x}dx$ (6) $\displaystyle\int 3\tan 2x dx$

3. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int 2xe^{-x}dx$ (2) $\displaystyle\int x\sin x dx$ (3) $\displaystyle\int \theta\cos 3\theta d\theta$

(4) $\displaystyle\int \log(-x)dx$ (5) $\displaystyle\int x\log(2x)dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^2}dx$

$\boxed{\text{B 問題}}$

4. 次の不定積分を求めよ． (1) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x+2}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x^2-6x+2}{x^3-2x^2+x}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$

5. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int 2^x dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$ (3) $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$ (5) $\displaystyle\int \tan^3 x dx$ (6) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$

6. 座標直線上を物体が動いている．時刻 $t=0$ で位置 $x=0$ の場所を初速 v_0 で放たれた物体が一定の加速度 a で運動したとして，その物体の時刻 t での速度 $v=v(t)$ と位置 $x=x(t)$ を求めよ．

$\boxed{\text{C 問題}}$

7. 二つの自然数 m,n に対し不定積分 $\displaystyle\int \sin mx\sin nx\,dx$ を $m=n$ の場合と $m\neq n$ の場合に分けて求めよ．

8. 0 以上の整数 n に対し $I_n=\displaystyle\int (\log\frac{x}{a})^n\,dx$ （a は 0 でない定数）とおくとき，次の（関数についての）漸化式を示せ．

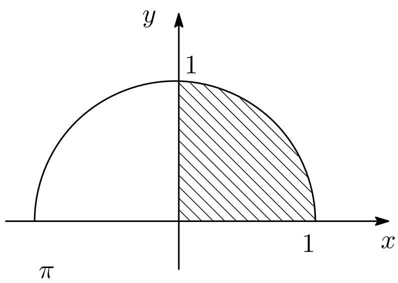
$$I_n = x(\log\frac{x}{a})^n - nI_{n-1}, \qquad I_0 = x+C\ (C\text{ は積分定数})$$

9. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{3\sin x+4\cos x}dx$ に置換 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ を行い求めよ．

11　定積分とその応用

＜例題 1＞ $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ は，$y=\sqrt{1-x^2}$ のグラフから決まるどんな図形の面積を表すか.
　また $x=\cos\theta$ と置換して積分計算でその値を求めよ.

解答例：



$y=\sqrt{1-x^2}$ の両辺を 2 乗して $y^2=1-x^2$. 従って
$x^2+y^2=1$ と $y \geqq 0$ より原点が中心で半径が 1 の半円.
グラフと $x=0,\ y=0$ で囲まれる右斜線部分の面積.
$x=\cos\theta$ とおくと $dx=-\sin\theta d\theta$ で

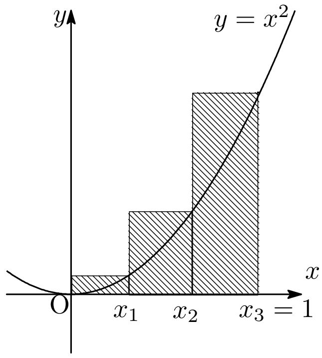
x	0	1
θ	$\pi/2$	0

θ の動く範囲で $\sin\theta \geqq 0$ なので

（与式）$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

＜例題 2＞　自然数 n に対し区間 $[0,1]$ を n 等分して，生ずる $n+1$ 個の端点を左から順に
$x_i=\frac{i}{n}$　$(i=0,1,\ldots,n)$ とし，総和 S_n を $S_n=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \frac{1}{n}$ と定義する.
　(1)S_3 を求めよ.　　　　　　(2) $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

解答例：



(1) $S_3=\frac{1^2+2^2+3^2}{3^2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{14}{27}$

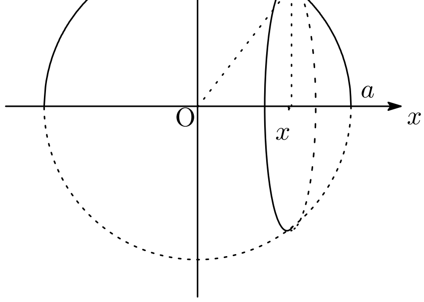
(2) $S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^{\,2}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\longrightarrow\frac{1}{6}\cdot1\cdot2=\frac{1}{3}$　$(n\to\infty)$

（区分求積法と呼ばれ，$\int_0^1 x^2dx$ の値と一致する.）

＜例題 3＞　正の定数 a に対し半径の a の球を考え，半円の回転体とみて体積を積分で求めよ.

解答例：



球は $y=\sqrt{a^2-x^2}$ のグラフを x 軸の周りに 1 回転させて生じ，体積 V は，球を x 座標が x の平面で切った面積が半径 y の円 πy^2 なので

$$V=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-x^2)dx=2\int_0^a\pi(a^2-x^2)dx$$
$$=2\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{4\pi a^3}{3}$$

（ $\pi(a^2-x^2)$ が偶関数で積分区間が $[-a,a]$ である事を利用し積分区間を半分の $[0,a]$ にして，値を 2 倍にした ）

A 問題

1. 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 2e^{-x}dx$

(4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos 2x dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$ (6) $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x\cos x dx$

2. $y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとで囲まれた部分の面積を求めよ.

3. 奇関数（$f(-x) = -f(x)$ が任意の数 x について成立）は，任意の数 a に対し $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ を満たすことを証明せよ.

B 問題

4. 適切な正定数 a を使った置換 $x = a\tan\theta$ を用いるなどして次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2+3}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{4x+3}{x^2+2}dx$

5. 整数 m, n に対して定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx$ の値を求めよ.

6. 底面積が S である平面図形（三角形，四角形，円等）とその平面図形からの高さが h である一点を結んで生ずる錘（三角錐，四角錘，円錐等）の体積 V が $V = \dfrac{1}{3}Sh$ で与えられることを示せ.

7. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx$ の値を $y = \sqrt{1-x^2}$ のグラフを考察し, 積分計算を使わずにその値を求めよ.

C 問題

8. 次の計算を行え．ただし k は正定数とする.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (3) $\displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^1 x^{-k}dx$

(4) $\displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^1 \log x dx$ (5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx$ (6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}dx$

9. 定積分の値との比較を利用し次の級数の収束・発散を示せ.

(1) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，$I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}dx$ と 2 つの数列を決める．$[1, n+1]$ を n 等分し生ずる長さ 1 の区間での $y = \dfrac{1}{x}$ の最大値を調べることで $I_{n+1} < S_n$ を示し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ が発散することを示せ.

(2) 区間 $[1, n]$ を $n-1$ 等分し，各区間での $y = \dfrac{1}{x^2}$ の最小値を考えることで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が収束することを示せ.

12　解答

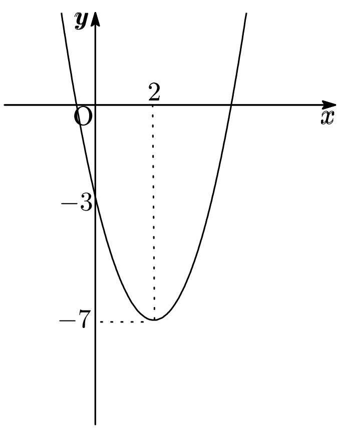
1．2 次関数・方程式・不等式

1. 関数 $y = f(x)$ に対し $x \to x - p$ で x 軸正方向に p,　$y \to y - q$ で y 軸正方向に q だけグラフが移動する．
(1)$y = (x-1)^2 + 2$　　(2) $y = (x+3)^2 + 4$

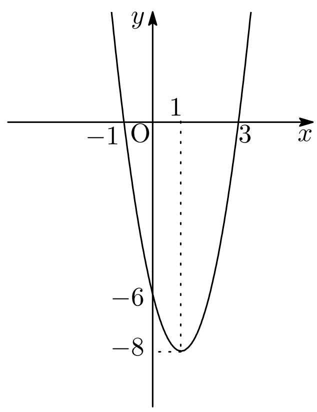
2. (1) x 軸方向に -3　　(2) x 軸方向に 2, y 軸方向に -1　　(3) $x^2 + 6x + 4 = (x+3)^2 - 9 + 4$ より x 軸方向に -3, y 軸方向に -5

3. (1) $y = (x-2)^2 - 7$, 頂点 $(2, -7)$,　y 切片 -3 (与式の定数項)
(2) $y = 2(x-1)^2 - 8$ より 頂点 $(1, -8)$,　y 切片 -6.
なお平方完成しなくても，2 次関数のグラフは軸に対し左右対称なので $y = 0$ から $x = -1, 3$ を求めそれらの平均値 1 を $2(x-3)(x+1)$ に代入すれば頂点が求めれる．

(1)



(2)



4. (1) $y = -\{(x-2)^2 - 4\} - 2 = -(x-2)^2 + 2$,　区間 $[0, 3]$ では最大値 2 $(x = 2)$, 最小値 -2 $(x = 0)$.
(2) $y = 2\left\{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right\} = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$, 区間 $[-2, 2]$ では最大値 10 $(x = 2)$, 最小値 $-\frac{1}{8}$ $\left(x = -\frac{1}{4}\right)$

5. 連立させた方程式 $x^2 - 3x + 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0$ を解き，交点は $(1\,,\,-1)$, $(4\,,\,5)$.

6. (1) $y = -(x-2)^2 + 1$　　(2) $y = 2x^2 - x + 3$

7. $m < -2$, $m > 2$ (連立させて生ずる 2 次方程式が 2 つの実数解を持つための条件はその判別式が正になること)

8. $m = 2$ のとき $x = 0$,　$m = 6$ のとき $x = -2$

9. 両端から 5cm のところを折り曲げる．(断面積の最大値は 50cm^2)

10. 大部分の長さを x 小部分の長さを y とすると条件より $x : y = (x+y) : x \Leftrightarrow x^2 - yx - y^2 = 0$
$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$ 比は正なので $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$　$\therefore$ (大部分) : (小部分) $= \left(1 + \sqrt{5}\right) : 2$

11. $x=1$, $y=0$ のとき最小値 1（最大値はなし）

12. (1) $2 \leqq t \leqq 4$　(2) $x=5$

13. (1) C_1 の頂点は $(-a, -2a^2+5a+4)$，$-a$ を独立変数とみなして $y=-2x^2-5x+4$
(2) $a < \dfrac{1}{3}$ ，$a > 1$

14. グラフは下に凸の放物線なので，最大値は軸 $x=p$ からより離れた方で，最小値は軸 $x=p$ でか，$x=0,1$ の内の軸により近い方でしか取りえない。それで p が区間 $[0,1]$ に対しどの位置にくるかで場合を分ける．

$p<0$ のとき，	最大値 $1-2p$ $(x=1)$，	最小値 0 $(x=0)$.
$0 \leqq p < 1/2$ のとき，	最大値 $1-2p$ $(x=1)$，	最小値 $-p^2$ $(x=p)$.
$p=1/2$ のとき，	最大値 0 $(x=0,\ 1)$，	最小値 $-p^2$ $(x=p)$.
$1/2 \leqq p < 1$ のとき，	最大値 0 $(x=0)$，	最小値 $-p^2$ $(x=p)$.
$p \geqq 1$ のとき，	最大値 0 $(x=0)$，	最小値 $1-2p$ $(x=1)$.

2．恒等式・高次方程式・不等式

1. (1) $x^2+13=(a+b)x^2+(c-3b)x+(2a-3c)$ の両辺の係数を比べ連立方程式

$$\begin{cases} a+b=1 \\ c-3b=0 \\ 2a-3c=13 \end{cases}$$

を解く $a=2,\ b=-1,\ c=-3$

(2) 同様に $3x^2-7x+1=ax^2+(-4a+b)x+(4a-2b+c)$ の係数を比べ $a=3,\ b=5,\ c=-1$. または，両辺に $x=2$ を代入して c を求め，両辺を x で微分した式 $6x-7=2a(x-2)+b$ に $x=2$ を代入し b を，最後に 2 回微分した式 $6=2a$ から a を求める．

2. (1) $1=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)$ の係数を比べ $a=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{1}{3},\ c=\dfrac{2}{3}$　または分母を払った両辺の x に -1(に限りなく近い数) を代入し $a=\dfrac{1}{3}$ を導き 2 次と 0 次の係数の条件より b, c を求める．
(2) $x^2-8x+18=a(x-2)^2+b(x+1)(x-2)+c(x+1)=(a+b)x^2+(-4a-b+c)x+(4a-2b+c)$ の係数を比べ $a=3,\ b=-2,\ c=2$. または分母を払った両辺の x に $-1, 2$(に限りなく近い数) を代入し $a=3, c=2$. 2 次の係数の条件より b を求める．

3. $A=BQ+R$ より $B=\{(2x^3-x^2-4)-(-2x-3)\} \div (2x-1)=x^2+1$

4. (1) $8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1)=0$ より $x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{4}$
(2) $x^4-x^3-x^2-x-2=(x+1)(x-2)(x^2+1)=0$ より $x=2,\ -1,\ \pm i$

5. (1) $(2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i$　(2) $\dfrac{(1+2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\dfrac{10+5i}{16+9}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i$

6. 与式を $P(x)$ とすると因数定理より $P(-2)=0$ で，剰余の定理より $P(-1)=8$. これらを連立させ $a=-2$, $b=6$

7. $x = \dfrac{4}{7}$, $y = -\dfrac{1}{7}$

8. $a = -2$, $b = -1$

9. $a = 3$, $b = -4$　残りの解は $x = -1$, $\dfrac{1}{2}$

10. (1) $p, q > 0$ より（左辺）も（右辺）も正なので二乗して比べてよい.
(左辺)^2 − (右辺)^2 $= \dfrac{(p-q)^2}{4} \geqq 0$. ゆえに (左辺) ≧ (右辺) で等号成立は $p = q$ のとき.
(2) (左辺) − (右辺) $= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \geqq 0$.
等号成立は $ay = bx, bz = cy, cx = az$ のとき ($a : b : c = x : y : z$ のとき).

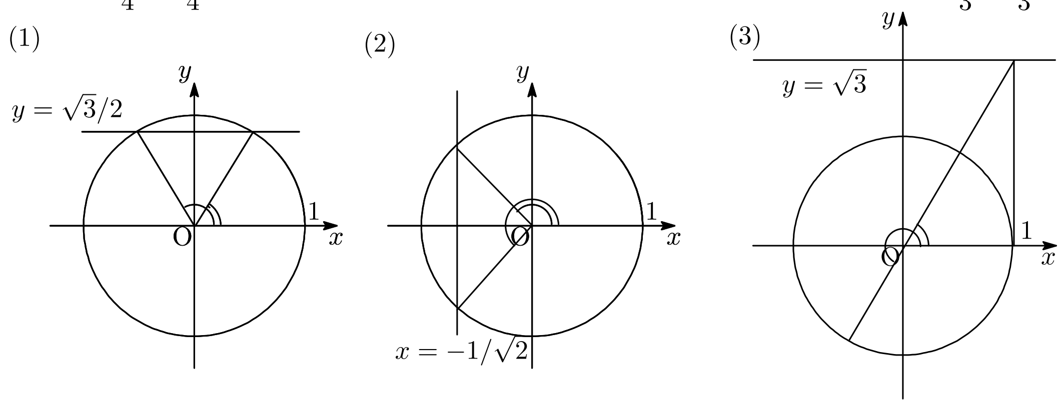
11. (1) $x < -3$, $-2 < x < 1$　　(2) $x \leqq -2$, $0 \leqq x \leqq 1$, $2 \leqq x$

12. $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ は対称式なので 3 つの解のどれが α, β, γ かには影響されない.
$\gamma = -1$ とし α, β を $x^2 - x + 1 = 0$ の解とすると $\alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3 = -1$ だから，n が 3 の倍数で $n = 3k$　(k : 自然数）と表せる場合には $\alpha^{3k} + \beta^{3k} + \gamma^{3k} = 3(-1)^k$ になる.
n が 3 の倍数でなく $n = 3k+1$ と表せる場合には $\alpha^{3k+1} + \beta^{3k+1} + \gamma^{3k+1} = (-1)^k(\alpha + \beta + \gamma) = (-1)^k(1-1) = 0$ である．$n = 3k+2$ と表せる場合にも $\alpha^{3k+2} + \beta^{3k+2} + \gamma^{3k+2} = (-1)^k(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = (-1)^k\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + \gamma^2\} = (-1)^k(1 - 2 + 1) = 0$ である．結局，答は n が 3 の倍数でなければ 0, n が 6 の倍数なら 3, n が 6 で割れない 3 の倍数なら -3.

3．円の方程式と三角関数

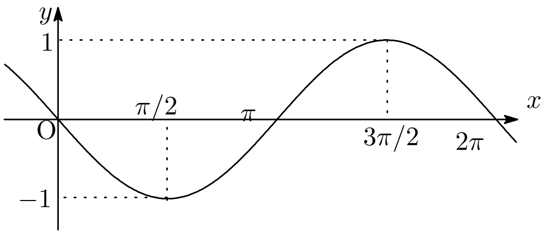
1. $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 4^2$ と変形できるので $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ と比べ，中心が $(-3\,,\,4)$, 半径 $r = 4$.

2. (1) 単位円上で y 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の角を求め $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$　(2) 単位円上で x 座標が $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ の角を求め　$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$　(3) 角 θ の動径と直線 $x = 1$ の交点の y 座標が $\tan\theta$ なので $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$

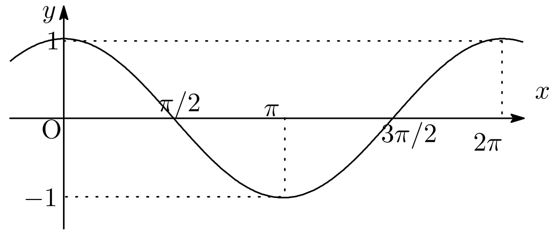


3. $\ell = r\theta = 4\,\mathrm{cm}$　(1 ラジアンとは弧長が半径に等しくなる中心角のこと),
$S = \dfrac{1}{2}r^2\theta = 8\,\mathrm{cm}^2$　(細い偶数個の扇形に分割し互い違いに組み合わせることでいくらでも 2 辺の長さが r と $\ell/2$ の長方形に近くできるので $S = \dfrac{\ell}{2}r = \dfrac{1}{2}r^2\theta$)

4. (1), (2) $(\sin(-x) = -\sin x)$



(3) $\angle x$ を直角三角形の一つの角とすると $\dfrac{\pi}{2} - x$ は余角なので $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$



5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = 10\sqrt{2}$ （底辺を $AB = c$ とすると高さは $b\sin A$）

6. $k = 5$ のとき，接点 $(-2\,,\,1)$，　$k = -5$ のとき，接点 $(2\,,\,-1)$
（生ずる x の 2 次方程式が重解になるよう判別式が 0 になる k の条件を用いるか，接点では半径と接線が垂直であることから半径の傾きが $-1/2$ であることを使う）

7. 半径が ℓ で中心角が $2\pi\sin\theta$ ラジアンである扇形の半径部分を接着し生ずる境界部分に半径 $\ell\sin\theta$ の円板を張り合わせる．

8. x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍してから x 軸正方向に $-\dfrac{\pi}{4}$ 移動（x 軸正方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ 移動してから x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍でもよい）

9. $x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$ 　$\left(\Leftrightarrow \cos x = 0,\dfrac{-1}{2}\right)$

10. (1) $-\dfrac{3}{8}$ 　(2) $\dfrac{11}{16}$ 　（与えられた方程式の両辺を 2 乗してみる）

11. $a = 4$, $R = 2\sqrt{2}$ （$\angle A = 45^\circ$ 等を正弦定理に代入して求める）

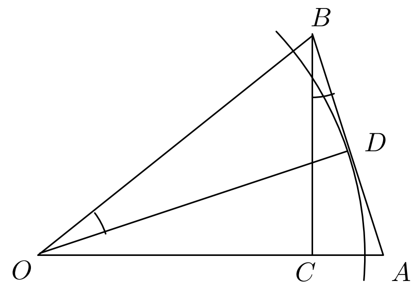
12. $\angle A = 60^\circ, 120^\circ$（正弦定理から $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$0^\circ < \angle A < 180^\circ$ では解が 2 つ）

13. (1) $x + 2y - 3 = 0$ （答えは 2 つの円の方程式の差をとれば出るが，その理由をきちんと説明できなければならない．また，半径が r_1，r_2 で中心間距離が d の 2 円が交わる条件である $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$ を確認すること.）
(2) $(-1\,,\,2)$, $\left(\dfrac{11}{5}\,,\,\dfrac{2}{5}\right)$

14.

$L = 24(2 - \sqrt{3})$ 　　$\dfrac{L}{2} = 12(2 - \sqrt{3}) \fallingdotseq 3.2$

(外接正 12 角形の 12 等分から生ずる右の二等辺三角形で
$OD : DB = BC : CA$ 　ゆえに
$1 : \dfrac{L}{24} = OB\sin 30^\circ : (OB - OB\cos 30^\circ)$)



15. (1) $S = 6\sqrt{6}$ 　(2) $R = \dfrac{35\sqrt{6}}{24}$ 　(3) $r = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 　(3 頂点と内心を線分で結び三角形を 3 つに分割すると $S = \dfrac{r}{2}(a + b + c)$)

16. $b=c$ である二等辺三角形か $\angle A$ が直角の直角三角形
（余弦公式を使い a,b,c のみの方程式に変形し因数分解を利用して解く）

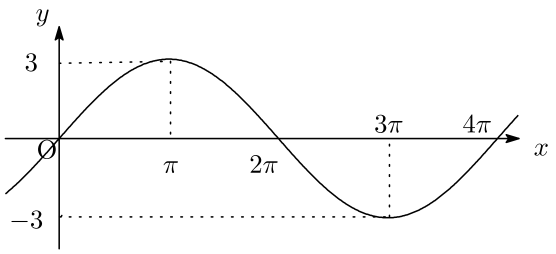
17. $BD=7$, $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $S=\dfrac{55\sqrt{3}}{4}$
（ BD^2 が余弦公式より $\cos A$, $\cos C$ で 2 通りに表せる．内接するので $A+C=180°$ で，$\cos C=-\cos A$ ）

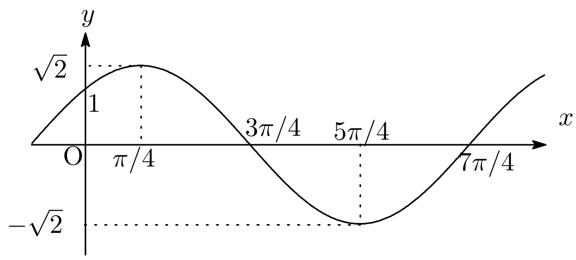
4．三角関数 (加法定理)

1.

(1) $y=3\sin\dfrac{x}{2}$
($\sin x$ の周期は 2 倍，振幅は 3 倍になる)

(2)$y=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$
$=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$





2. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{3}{5}$. よって, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

3. $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ なので $\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\dfrac{4}{5}$.

(1) $\sin 2x=2\sin x\cos x=-\dfrac{24}{25}$　　(2) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=-\dfrac{7}{25}$

(3) $\tan 2x=\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}=\dfrac{24}{7}$

4. (1) 加法定理 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ に対して, 2 つの式の各辺の和をとると $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ が得られる．よって, $\sin\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\left\{\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}=\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$.

(2) 加法定理により $\cos\dfrac{7\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=$
$\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)+\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5. $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$, $\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$.

6. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$ より, $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$.

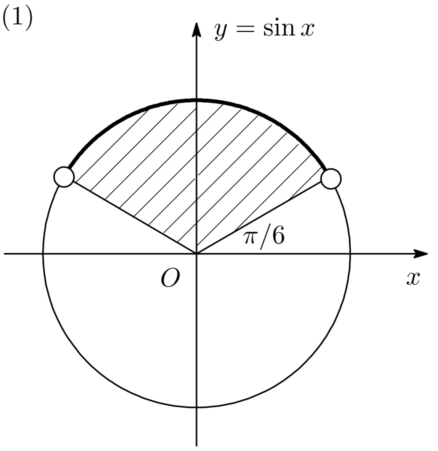
7. $\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x=\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos x+\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin x=\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right).$

ここで, $\dfrac{2\pi}{3}\leqq x+\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{8\pi}{3}$ に注意すると $x+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{13\pi}{6}$. よって $x=\dfrac{\pi}{6}\ ,\ \dfrac{3\pi}{2}$.

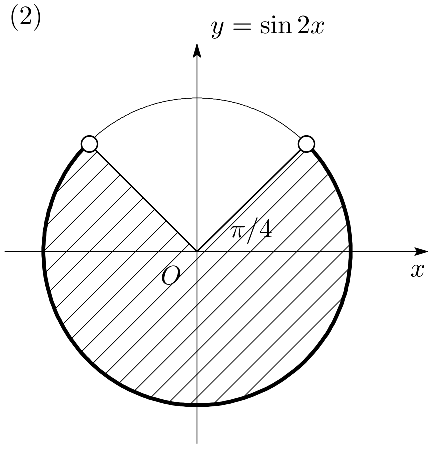
8. $y=\cos 2x+\sin x=(1-2\sin^2 x)+\sin x$ なので $\sin x=t\ \ (-1\leqq t\leqq 1)$ とおく. すると, 最大値 $\dfrac{9}{8}\quad\left(\sin x=\dfrac{1}{4}\text{ のとき}\right)$, 最小値 $-2\quad\left(x=\dfrac{3\pi}{2}\text{ のとき}\right)$.

9. (1) $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{6}$ (2) $0\leqq x<\dfrac{\pi}{8}\ ,\ \dfrac{3\pi}{8}<x<\dfrac{9\pi}{8}\ ,\ \dfrac{11\pi}{8}<x<2\pi$.

(1)



(2)

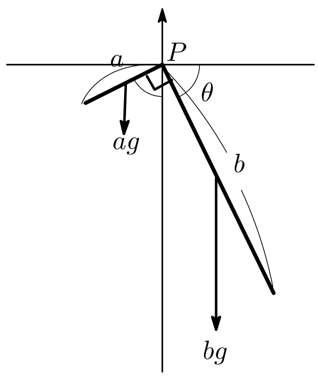


10. $\cos x(2\sin x-1)>0$ なので $\begin{cases}\cos x>0\\ \sin x>\frac{1}{2}\end{cases}$ または $\begin{cases}\cos x<0\\ \sin x<\frac{1}{2}\end{cases}$ より,

$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{5\pi}{6}<x<\dfrac{3\pi}{2}$.

11. $5\theta=180^\circ$, $2\theta=180^\circ-3\theta$ を使って示す. $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$, $\sin 3\theta=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$ により $\sin\theta(4\cos^2\theta-2\cos\theta-1)=0$. $\sin\theta\neq 0$ なので $\cos\theta=t\ \ (0<t<1)$ とおくと, $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

12.



(1) 重さ $b$kg である辺 b のみの重心の高さは P と比較すると $-\dfrac{b\sin\theta}{2}$, その位置エネルギーは $-\dfrac{b^2 g\sin\theta}{2}$. 他方, 辺 a の重心の高さは $-\dfrac{a\cos\theta}{2}$ なので $E=\dfrac{-g}{2}(a^2\cos\theta+b^2\sin\theta)$

(2) E が最小であるのは $a^2\cos\theta+b^2\sin\theta$ が最大であるとき.

三角関数の合成公式 $A\cos\theta+B\sin\theta=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta-\alpha)$ $\left(\tan\alpha=\dfrac{B}{A}\right)$ より

$E=\dfrac{-g\sqrt{a^4+b^4}}{2}\ \cos(\theta-\alpha)\quad\left(\tan\alpha=\dfrac{b^2}{a^2}\right)$ と表せる.

$\theta-\alpha=0$ のとき, すなわち $\theta=\alpha$ のとき E が最小なので $\tan\theta=\dfrac{b^2}{a^2}$.

13. (1) $\sin 2x = 2\sin x\cos x = t^2 - 1$ より，$y = t^2 - 2at + 1$.

(2) $t = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ より $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

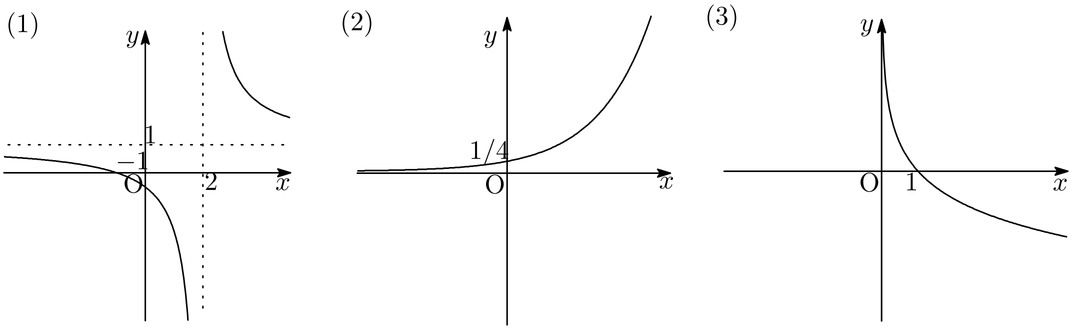
$a < -\sqrt{2}$ のとき	最大値 $3 - 2\sqrt{2}a$	最小値 $3 + 2\sqrt{2}a$
$-\sqrt{2} \leqq a < 0$ のとき	最大値 $3 - 2\sqrt{2}a$	最小値 $-a^2 + 1$
$0 \leqq a < \sqrt{2}$ のとき	最大値 $3 + 2\sqrt{2}a$	最小値 $-a^2 + 1$
$a \geqq \sqrt{2}$ のとき	最大値 $3 + 2\sqrt{2}a$	最小値 $3 - 2\sqrt{2}a$.

5．いろいろな関数

1. (1) $y = \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{x-2} + 1$ より，$y = \dfrac{3}{x}$ のグラフを
x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフ

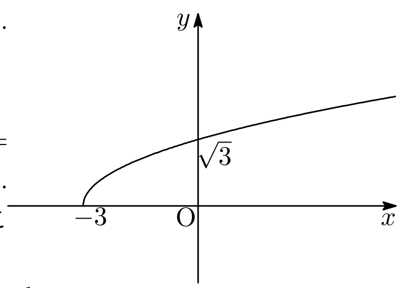
(2) $y = 2^{x-2}$より, $y = 2^x$のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフ

(3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$. 例えば, 点 $\left(\dfrac{1}{4}, 2\right)$, $(1, 0)$, $(4, -2)$ などを通るグラフ



2. (1) $y = \sqrt{x}$ を x 軸方向に -3 だけ平行移動させたグラフ.
例えば, 点 $(-3, 0)$, $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(6, 3)$ などを通る

(2) $\sqrt{x+3} = x + 1$ の両辺を 2 乗してまとめると，$0 = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ が得られるので $x = -2,\ 1$. $x = -2$ のとき $y = -1$，$x = 1$ のとき $y = 2$ である．ここで $y = \sqrt{x+3} \geqq 0$ に注意すると交点は $(1\ ,\ 2)$.



3. (1) $\sqrt[3]{27^2} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 9$ (2) $\sqrt[4]{\dfrac{9^3}{12^2}} = \left(\dfrac{3^6}{2^4 3^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\dfrac{3^4}{2^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{2}$

(3) $81^{0.75} = \left(3^4\right)^{\frac{3}{4}} = 27$ (4) $8^{-\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

4. (1) $3 = \log_5 125$ (2) $-5 = \log_2 \dfrac{1}{32}$

5. (1) $\log_{2^5} 2^3 = \log_{2^5} \left(2^5\right)^{\frac{3}{5}} = \dfrac{3}{5}$ (2) $\log_{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2\cdot\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

(3) $\log_{10} 15^2 - \log_{10} 18 + \log_{10} 80 = \log_{10} \dfrac{15^2 \cdot 80}{18} = \log_{10} 1000 = 3$.

6. (1) $x > 0$ のとき $x(x-2) \leqq 3$ なので, これを解いて $-1 \leqq x \leqq 3$. $x > 0$ により $0 < x \leqq 3$. また, $x < 0$ のとき $x(x-2) \geqq 3$ なので, これを解いて $x \leqq -1,\ 3 \leqq x$. $x < 0$ を併せて考えて $x \leqq -1$. 以上により $x \leqq -1\ ,\ 0 < x \leqq 3$.

(2) $x-2 \geqq 0$ のとき ($x \geqq 2$ のとき) 与式の両辺を 2 乗して解くと $0 < x < 3$ が得られるので $2 \leqq x < 3$. $x-2<0$ のとき ($x<2$ のとき) $\sqrt{4-x} > 0 > x-2$ なので常に不等式は成立している．よって, 解は $x < 3$.

7. 底が 2 の対数をとると $\log_2 0.5^{0.5} = \log_2 2^{-0.5} = -0.5$, $\log_2 2^{0.75} = 0.75$, $\log_2 0.5^{-1.5} = \log_2 2^{1.5} = 1.5$, $\log_2 0.5^0 = 0$, $\log_2 2^{-\frac{1}{3}} = -\dfrac{1}{3}$. ここで $-0.5 < -\dfrac{1}{3} < 0 < 0.75 < 1.5$ により $0.5^{0.5} < 2^{-\frac{1}{3}} < 0.5^0 < 2^{0.75} < 0.5^{-1.5}$.

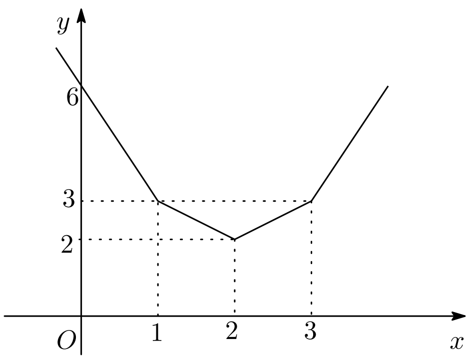
8. $2^x = X > 0$ とおくと $X^2 - 2X - 8 = 0$ なので $X = 4$.（$X > 0$ より $X = -2$ は不適）よって $x = 2$.

9. $\log_{10} E_A = 4.8 + \dfrac{3}{2}M_A$, $\log_{10} E_B = 4.8 + \dfrac{3}{2}M_B$. 両辺の差を取り $\dfrac{E_B}{E_A} = 2$ を使い $\log_{10} 2 = \dfrac{3}{2}(M_B - M_A)$. よって M_B は M_A より $\dfrac{2}{3}\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.2007$ だけ大きい

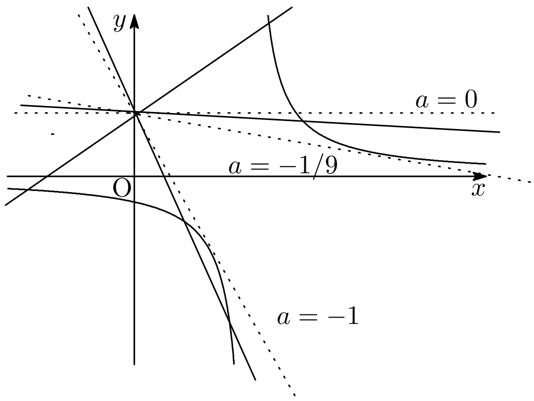
10. $\log_3 2^5 \log_2 3^{-1} \log_{3^2} 3^3 = 5\log_3 2 \cdot \dfrac{\log_3 3^{-1}}{\log_3 2} \cdot \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = 5 \cdot (-1) \cdot \dfrac{3}{2} = -\dfrac{15}{2}$

11. $x < 1$ のとき $f(x) = -3x + 6$, $1 \leqq x < 2$, $f(x) = -x + 4$, $2 \leqq x < 3$ のとき $f(x) = x$, $3 \leqq x$ のとき $f(x) = 3x - 6$. 以上により, $x = 2$ のとき最小値 2.

11.



12.



12. $a < -1$, $-\dfrac{1}{9} < a < 0$, $0 < a$ (交点の x 座標が満たす式が 2 次方程式になる条件と，その実数解が 2 つあるための a の条件を判別式を使って表し解く)

13. $X = 3^x > 0$ とおくと $X^2 - X - 72 \leqq 0$. これを解くと $0 < X \leqq 9$ なので $x \leqq 2$.

14. $10^{m-1} \leqq m < 10^m$, $10^{n-1} \leqq y < 10^n$ の両辺の積をとると $10^{m+n-2} \leqq xy < 10^{m+n}$ よって xy は $m+n-1$ 桁か $m+n$ 桁．他方，第 2 式の逆数を考え第 1 式にかけることにより $10^{m-n-1} < \dfrac{x}{y} < 10^{m-n+1}$ よって $\dfrac{x}{y}$ は $n-m+1$ 桁か $n-m$ 桁に初めて 0 以外の数が表われうる．(1 より小さな正数 z の少数第 k 位に初めて 0 以外の数が表われるのは $10^{-k} \leqq z < 10^{-k+1}$ である場合）.

15. 毎年国民総生産が $1 + \dfrac{x}{100}$ 倍されるので 10 年後は初めの $\left(1 + \dfrac{x}{100}\right)^{10}$ 倍になる.
$\left(1 + \dfrac{x}{100}\right)^{10} \geqq 2$ の両辺に対して底が 10 で対数をとると, $10\log_{10}\left(\dfrac{100+x}{100}\right) \geqq \log_{10} 2$.
よって $\log_{10}\left(\dfrac{100+x}{100}\right) \geqq \dfrac{\log_{10} 2}{10}$. ゆえに $100 + x \geqq 100 \cdot 10^{\frac{\log_{10} 2}{10}}$.
$x \geqq 100\left(10^{\frac{\log_{10} 2}{10}} - 1\right) \fallingdotseq 100\left(10^{0.03010} - 1\right)$ $(\fallingdotseq 7.2)$.

6. ベクトル

1. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\vec{b} + \dfrac{\vec{c}}{3}$,

$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}} = -\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}} = -\vec{c} + \dfrac{2\vec{b}}{3}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} + \overrightarrow{\mathrm{CR}} = \dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3} + \left(-\vec{b} + \dfrac{\vec{c}}{3}\right) + \left(-\vec{c} + \dfrac{2\vec{b}}{3}\right) = \vec{0}$

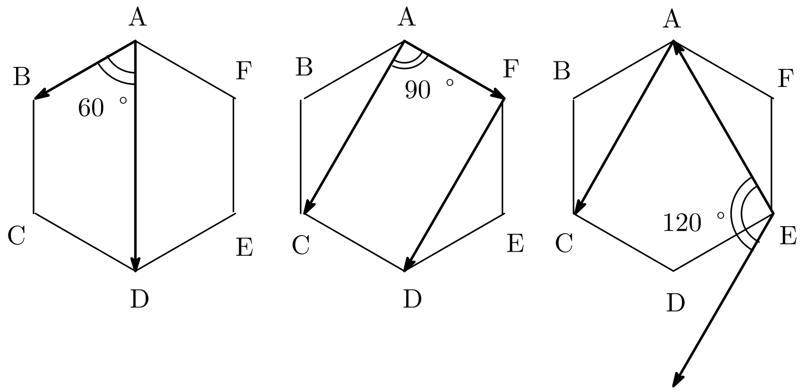
2. (1) $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ により $\theta = 135^\circ$.

(2) $\cos\theta = \dfrac{(3-\sqrt{6}-4)+(1+\sqrt{6})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0$. よって $\theta = 90^\circ$.

3. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 1 \times 2 \times \cos 60^\circ = 1$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FD}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1 \times \sqrt{3} \times \cos 90^\circ = 0$.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EA}} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \cos 120^\circ = -\dfrac{3}{2}$.



(ベクトルは平行移動しても同じものであることに注意する)

4. $\vec{e} = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$. $\vec{a}$ と直交するベクトルを $\vec{b} = (x,\, y)$ とすると $0 = \vec{a}\cdot\vec{b} = 3x + 4y$. 例えば, $\vec{b} = (4, -3)$ とおけば良い. よって $\vec{f} = \pm\dfrac{1}{|\vec{b}|}(4, -3) = \pm\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$.

5. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\, 4) - (1,\, -2) = (2,\, 6)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (7,\, 1) - (1,\, -2) = (6,\, 3)$.

$S = \dfrac{1}{2}|2 \times 3 - 6 \times 6| = 15$.

6. (1) $\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{e} - \vec{b}$,

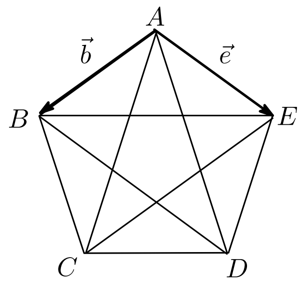
$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = \vec{b} + k\vec{e}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{EC}} = \vec{e} + k\vec{b}$,

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-k+1)\vec{b} + (k-1)\vec{e}$.

(2) $\vec{b}$ と $\vec{e}$ は一次独立 (平面では平行でないこと) なので

$-\vec{b} + \vec{e} = k\{(-k+1)\vec{b} + (k-1)\vec{e}\}$ の係数をくらべて

$k^2 - k - 1 = 0$. よって $k > 0$ に注意して $k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



7. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくと与式より $|\vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 + |\vec{b} - \vec{a}|^2$. これを整理すると $(\vec{a} - \vec{c})\cdot\vec{b} = 0$ が得られる.

8. $\vec{a}+t\vec{b}=(4+2t,-3+t)$.

(1) $(4+2t):-1=(-3+t):2$ を解いて $t=-1$.

(2) $|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(4+2t)^2+(-3+t)^2}=5$ を解いて $t=0,\ -2$.

(3) $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(4+2t)^2+(-3+t)^2=5(t^2+2t+5)=5(t+1)^2+20$ の大きさが最小になるときを考えると $t=-1$. このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となり, 最小値は $\sqrt{20}$.

9. $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(-\overrightarrow{\mathrm{OB}}))=0$ と変形する. 原点 O に関して B と対称な点を B' とすれば, P は AB' を直径とする円周を描くことが分かる.

10. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$ により $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{6}(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}})$.

(2) 点 Q は線分 BC の上にあるので内分の式 $\dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{m+n}$ になるように $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を定数倍すると $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$. よって BQ∶QC $=3:2$, AP∶PQ $=5:1$.

(3) 面積比 $\triangle PAB$∶$\triangle PBC$∶$\triangle PCA=3:1:2$.

7. 空間ベクトル

1. (1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=28$ を展開すると $|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=28$. したがって, $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$.

(2) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{6}{6\times 2}=\dfrac{1}{2}$. $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ の範囲で考えれば良いので $\theta=60^\circ$.

2. (1) 求める直線の方向ベクトルは $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$ の方向ベクトル $(2\,,\,-1\,,\,-2)$ と考えて良いので, 求める直線の方程式は $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

(2) 与えられた直線の方向ベクトルは $(2\,,\,-1\,,\,1)$ である. 求める平面はこれが法線ベクトルとなるので $2(x+2)-(y-4)+(z-1)=0\Leftrightarrow 2x-y+z+7=0$.

3. 直線のパラメータ表示 $x=2t,\ y=-t+5,\ z=3t+4$ を $2x-y+3z=0$ に代入して $t=-\dfrac{1}{2}$. よって, 交点は $\left(-1\,,\,\dfrac{11}{2}\,,\,\dfrac{5}{2}\right)$.

4. (1) 中心が点 $\left(\dfrac{1-3}{2},\,\dfrac{3+1}{2},\,\dfrac{5+1}{2}\right)=(-1\,,\,2\,,\,3)$, 半径が 3 の球なので, $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

(2) xy 平面とは $(1\,,\,-3\,,\,0)$ で接するので, 半径 $=z$ 座標の大きさ $=2$ より $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=4$.

5. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,-1,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,-1,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-1,1,3)$.

(1)$\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. よって $\angle\mathrm{A}=30^\circ$.

(2) 外積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,1,-1)$ は両方に垂直. よって求める単位ベクトルは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$.

(3)$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(4) 4 面体 ABCD の体積 $V=\dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を法線ベクトルとして持ち, 点 A を通る平面を考えれば良いので $(x-1)+(y-1)-(z-1)=0$, 展開して $x+y-z=1$.

6. まず方向ベクトル $(1, a, -3)$, $(1, 2, 3)$ が垂直になるために $1 + 2a - 9 = 0$ より $a = 4$. 2 直線が交わるのは両方の式が成立する (x, y, z) が存在するときだから, 左の直線のパラメータ表示 $x = t + 1,\ y = 4t + 3,\ z = -3t - 4$ を $x + 2 = \dfrac{y + 7}{2} = \dfrac{z + b}{3}$ に代入して, $t = -2,\ b = 1$ と求まる.
交点の座標は $(-1, -5, 2)$.

7. (1) $\dfrac{|0 + 0 + 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{14}}$.
(2) 原点を通り方向ベクトル $(1, 2, 3)$ の直線上にあり距離 $\dfrac{8}{\sqrt{14}}$ に位置する点なので, 符号を考慮して $\left(\dfrac{4}{7}, \dfrac{8}{7}, \dfrac{12}{7}\right)$.

8. 交線の方向ベクトルは, 2 つの平面の法線ベクトルに垂直な $(1, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -2, 1)$ にとれる. また, 例えば $(-2, 3, 0)$ は交線上の（両方の平面上の）点である. よって交線の方程式は $x + 2 = \dfrac{y - 3}{-2} = z$.

9. (1) $x = \dfrac{3}{2}$
(2) $\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{3 - 2x}{3\sqrt{x^2 + 2}} = \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. ここで $\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$ により, 左辺の分子は正数なので $x < \dfrac{3}{2}$. 上式を 2 乗して変形すると $x(x + 24) = 0$ が得られるので $x = 0,\ -24$.

10. (1) l は平面 α の法線ベクトル $(4\,, -3\,, 5)$ を方向ベクトルに持つ直線なので $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{5}$.
(2) 直線 l 上の点を $x = 4t, y = -3t, z = 5t$ とする. この点が平面 α の上にあるとき $4 \cdot 4t - 3 \cdot (-3t) + 5 \cdot 5t = 25$ により $t = \dfrac{1}{2}$. 求める交点の座標は $\left(2\,, -\dfrac{3}{2}\,, \dfrac{5}{2}\right)$.
(3) 球の半径が 5, 原点から l と α の交点までの長さが $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ なので, 三平方の定理より求める円の半径は $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

8. 微分法

1. 極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ を計算するため $f(x)$ に $x = a$ を代入したとき不定形 $\dfrac{0}{0}$ 等が現れるときは約分等により不定形を避けてから代入する.（ロピタルの定理を用いても答は出せるがその証明は決して簡単ではないため, 答の確認に用いる程度が望ましい）
(1) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = \lim_{x \to -2}(x^2 - 2x + 4) = 12$.
(2) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2a}$.

2. (1) そのまま代入すると不定形 $\dfrac{\infty}{\infty}$ になるので分母の最高次の項 x^2 で分母分子を割る
$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{-1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}}{1 + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}} = -1$.
(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$.

(∞ に近づけるので $x>0$ と思ってよく分母分子を $x=\sqrt{x^2}$ で割って分母を 0 以外の有限の数に収束させせた)

3. (1) $y'=(x-1)'(2x-1)(3x-1)+(x-1)(2x-1)'(3x-1)+(x-1)(2x-1)(3x-1)'=18x^2-22x+6$.
(2) $y'=\dfrac{(x+1)'(x^2+1)-(x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$.
(3) $t=4-x^2$ とおくと $y=\sqrt{t}$ なので $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot(-2x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

4. $s=\omega t+\theta$ とおくと $y=A\sin s$ なので $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt}=(A\cos s)\cdot\omega=A\omega\cos(\omega t+\theta)$,
$\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{dy'}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt}=(-A\omega\sin s)\cdot\omega=-A\omega^2\sin(\omega t+\theta)$.

5. $y=e^x$ の自然対数を考えて $\log y=x$. その両辺を x で微分して $\dfrac{1}{y}\cdot y'=1$ ゆえに $y'=y=e^x$.

6. (1) $v=\dfrac{dh}{dt}=v_1-gt$ により $t_1=\dfrac{v_1}{g}$, $\quad h_1=\dfrac{{v_1}^2}{2g}$.
(2) $t_n=\dfrac{v_n}{g}=\dfrac{k^{n-1}v_1}{g}$ で $0<k<1$ に注意すると $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2t_n=\frac{2v_1}{g(1-k)}$.

7. (1) 接線 $y=2a(x-a)+a^2$ 　法線 $y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2$.
(2) 点 Q は $\left(0,\dfrac{1}{2}+a^2\right)$ なので a を 0 に近づけると, 点 Q は $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ に近づく.

8. $x=x_0$ での接線で点 (a,b) を通るものは $y=2x_0(x-a)+b$. それは接点 $(x_0,y_0)=(x_0,x_0^2)$ を通るので, $x_0^2-2ax_0+b=0$ が成立する．接線が 2 本ひけることはこの 2 次方程式が 2 つの実数解を持つことで，条件を判別式で表すと不等式 $a^2>b$ がわかる (放物線の内部からは接線がひけないので，図からも明らか). その方程式の 2 つの解を α, β とすると，2 接点が作る傾き $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\beta+\alpha$ は解と係数の関係より $2a$.

9. (1) $0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ なら $\cos\theta<\dfrac{\sin\theta}{\theta}<1$ なので $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x$
(別解：加法公式と $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}=0$ を使う)

10. $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{x\to+0}(e^{-x}\cos x)'=\lim_{x\to+0}-e^{-x}(\cos x+\sin x)=-1$,
$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to-0}\frac{ah+b-1}{h}=\lim_{h\to-0}\left(a+\frac{b-1}{h}\right)$.
これらが一致するとき微分可能なので $a=-1$, $b=1$.

11. $a_3>0$ とし（左辺）を $f(x)$ とすると $f(x)\to\pm\infty\quad(x\to\pm\infty$, (複号同順)) なので十分大きな数 M,N があり $f(-N)<0<f(M)$，よって区間 $[-N,M]$ において中間値の定理が使えて $[-N,M]$ の中に $f(x)=0$ の実数解がある．

12. $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & x > 0 \text{ のとき.} \\ 0 & x \leqq 0 \text{ のとき.} \end{cases}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x)$ は 0 に収束しないので $x = 0$ では不連続.

（例えば $\dfrac{1}{x} = n\pi$ で $n \to \infty$ のとき $f'(x) = (-1)^{n-1}$ で振動する）

9. 微分の応用

1. (1) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1 - \sqrt{x+1}$ とおくと，$x > 0$ では $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ で $f(0) = 0$ より, $x > 0$ では $f(x) > 0$ が成り立つ.

(2) $f(x) = x - 1 - \log x$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$ の符号より，$f(1) = 0$ が最小値である. よって $f(x) \geqq 0$ で, 等号成立は $x = 1$ のとき.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	／	↘	0	↗

2. (1) $y' = \dfrac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \dfrac{1-x}{e^x}$ より, $x = 1$ で $y' = 0$. 閉区間 $[-2,\ 3]$ を $x = 1$ で分割し y' の $\pm$ を調べ $x = -2,\ 3$ での y の値も計算して増減表をつくる.

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	$-2e^2$	↗	$1/e$	↘	$3/e^3$

最大値 $\dfrac{1}{e}$ $(x = 1)$, 最小値 $-2e^2$ $(x = -2)$.

(2) $y' = -\sin x + (\sin x + x\cos x) = x\cos x = 0$ となるのは $x = -\pi/2,\ 0,\ \pi/2$ のとき.
区間 $[-\pi,\ \pi]$ を $x = -\pi/2,\ 0,\ \pi/2$ で分割し x, $\cos x$ の正負を調べ y' の $\pm$ を求め増減表をつくる.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\pi/2$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\pi/2$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$\pi/2$	↘	1	↗	$\pi/2$	↘	-1

増減表より，最大値 $\dfrac{\pi}{2}$ $(x = \pm\dfrac{\pi}{2})$, 最小値 -1 $(x = \pm\pi)$.

3. 切り取る正方形の一辺の長さを $x\,\mathrm{cm}$ とすると，$0 < x < 3$ で箱の容積 V は
$V = (6-2x)^2 x = 4(x^3 - 6x^2 + 9x)$ となる. 多項式なので閉区間 $[0,\ 3]$ で $V' = 12(x-1)(x-3)$ の符号を調べて増減表をつくる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
V'		$+$	0	$-$	
V	0	↗	16	↘	0

$x = 1\,\mathrm{cm}$ のとき容積 V は最大になる.

4. $y' = 3x^2 + 2ax + b$. $x = 0,\ 1$ で極値をとることから $y'(0) = b = 0,\ y'(1) = 3 + 2a + b = 0$.
また $y(1) = 1 + a + b + c = 2$. これら 3 式を解き $a = -\dfrac{3}{2},\ b = 0,\ c = \dfrac{5}{2}$.
そのとき $x = 0, 1$ の前後では y' の符号は $+ \to -,\ - \to +$ と変化し極大値と極小値をとることがわかるので, 確かに条件を満たしている.

5. (1) $y' = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ なので定義域の $x \neq -1$ を $x = 0,\ -2$ で分割し増減表をつくる.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	-4	$\searrow$	/	$\searrow$	0	$\nearrow$

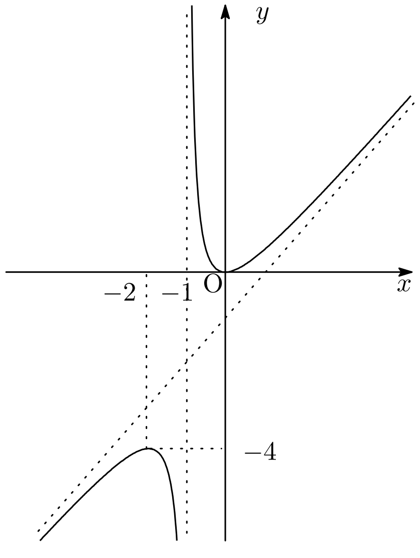
また $y = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ と表せるので漸近線が $y = x - 1,\ x = -1$ であることがわかる.

(2) $y' = \dfrac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ より定義域の $[-1,\ 1]$ を $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で分割し増減表をつくる.

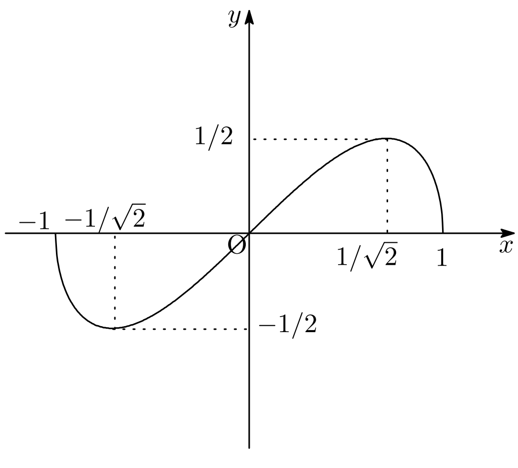
x	-1	$\cdots$	$-1/\sqrt{2}$	$\cdots$	$1/\sqrt{2}$	$\cdots$	1
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	0	$-\infty$
y	0	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

なお，奇関数なので $[0,\ 1]$ での増減表をもとに右半分のグラフを描き原点で点対称に (平面上では 180° 回転）動かしたものを左半分としてもよい.

(1) 極大値 -4 $(x = -2)$, 極小値 0 $(x = 0)$.



(2) 極大値 $\dfrac{1}{2}$ $(x = \dfrac{1}{\sqrt{2}})$, 極小値 $-\dfrac{1}{2}$ $(x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.



6. 底面の半径を r, 高さを h とすると，$2\pi r^2 + 2\pi rh = S_0$. これより $h = \dfrac{a}{r} - r$ $\left(a = \dfrac{S_0}{2\pi}\right)$.
体積は $V = \pi r^2 h = \pi(ar - r^3)$. $V' = \pi(a - 3r^2) = 0$ を解いて $r = \sqrt{\dfrac{a}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a}$.

$h=\sqrt{3}\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{a}$. よって $r:h=1:2$. $\left(底面の半径\sqrt{\dfrac{S_0}{6\pi}},高さ\ 2\sqrt{\dfrac{S_0}{6\pi}}\right)$. 逆に $r=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ の前後で V' は $+\to-$ に変わるのでそのとき確かに最大.

7. シャボン玉の体積を V とすると $V=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{D}{2}\right)^3$. 両辺を時間 t で微分して $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi}{2}D^2\dfrac{dD}{dt}=V_0$，よって $\dfrac{dD}{dt}=\dfrac{2V_0}{\pi D^2}$. したがって D が 2 倍になる と D の増加率 $\dfrac{dD}{dt}$ は $\dfrac{1}{4}$ 倍になる.

8. t 秒後，糸の長さは $15-t$ なので浮きは水平距離で $x=\sqrt{(15-t)^2-5^2}=\sqrt{t^2-30t+200}$ 離れている. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t-15}{\sqrt{t^2-30t+200}}$ に $t=2$ を代入して，求める速度は手元に向かって $\dfrac{13}{12}$ m/s.

9. $f'(t)=ae^{-bt}\{-b\sin(\omega t+c)+\omega\cos(\omega t+c)\}=0$ となるのは $\tan(\omega t+c)=\dfrac{\omega}{b}$ のとき. 更に t の増加につれて $f'(t)=ae^{-bt}\sqrt{b^2+\omega^2}\sin(\omega t+c+\alpha)$（三角関数の合成を用いた）は符号を変化させるから $f(t)$ はそのとき極値をとる.

10. (1) 点 (x_n,x_n^2-2) における接線の方程式は $y-(x_n^2-2)=2x_n(x-x_n)$ なので, $y=0$ として x について解けば漸化式 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}$ を得る. $x_2=\dfrac{3}{2}$, $x_3=\dfrac{17}{12}$, $x_4=\dfrac{577}{408}$.

(2) 相加平均は相乗平均より大きいことなどから $\sqrt{2}<x_n$ なら $\sqrt{2}<x_{n+1}<x_n$ が言える. よって数列 $\{x_1,x_2,x_3,\cdots\}$ は単調減少で一定の数以上であるから収束する. しかしもし $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=X>\sqrt{2}$ とすると，$(X,\,X^2-2)$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標はさらに小さくなってしまい収束することに矛盾が生じるので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.（または，収束することが分かったので，その極限値を X とすると (1) の漸化式で $n\to\infty$ として $X=\dfrac{X}{2}+\dfrac{1}{X}$. これを解いて $X=\sqrt{2}$ としてもよい.)（別解：$x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}$ と $\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の差をとって $|x_{n+1}-\sqrt{2}|<\dfrac{1}{2}|x_n-\sqrt{2}|$ なので $|x_n-\sqrt{2}|<\dfrac{1}{2^{n-1}}|x_1-\sqrt{2}|$ であり右辺が 0 に収束するから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.）

11. $\triangle OPA=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & 1\\ p & p^3\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|p^3-p|$. 右辺の絶対値の中の関数を微分して増減を調べることにより，$(p,p^3)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ のとき，三角形 OPA の面積は最大値 $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ をとる.
(点 P の底辺 OA からの高さが最も高くなるのは P での接線が底辺に平行な場合である事を利用しても良い)

12. $27b^2<4a^3$（$y=x^3-ax$ のグラフと $y=b$ のグラフが 3 点で交わる条件を考えるか，$y=x^3$ のグラフと $y=ax+b$ のグラフがそうなる条件を求める）.

10. 不定積分

1. C を積分定数とする．

(1) （与式）$= \displaystyle\int (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$

(2) （与式）$= \displaystyle\int \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \log|x| + C$

(3) （与式）$= \displaystyle\int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = 2x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}(x+2) + C$

(4) （与式）$= -3\cos x + 2\sin x + C$

(5) （与式）$= 3\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = 3\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = 3\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = 3(\tan x - x) + C$

(6) （与式）$= \displaystyle\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\frac{\cos x}{\sin x} - x + C$

2. 置換積分を用いる．また， C は積分定数とする．

(1) $2x + 1 = t$ とおくと $2dx = dt$ なので （与式）$= \displaystyle\int \frac{1}{2}t^3 dt = \frac{1}{8}t^4 + C = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C$

(2) $3x + 2 = t$ とおくと $3dx = dt$ なので （与式）$= \displaystyle\int \frac{1}{3\sqrt{t}}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x+2} + C$

(3) $2\theta = t$ とおくと $2d\theta = dt$ なので （与式）$= \displaystyle\int \frac{3}{2}\sin t dt = -\frac{3}{2}\cos t + C = -\frac{3}{2}\cos 2\theta + C$

(4) $ax = t$ とおくと $\displaystyle\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$ となるのがわかるので、（与式） $= \dfrac{e^{2x}}{2} + e^{-x} + C$

(5) $\log 2x = t$ とおくと $\dfrac{1}{x}dx = dt$ なので （与式）$= \displaystyle\int \frac{1}{3}t dt = \frac{1}{6}t^2 + C = \frac{1}{6}(\log 2x)^2 + C$

(6) $2x = t$ とおくと $2dx = dt$ なので
（与式）$= \displaystyle\int \frac{3}{2}\tan t dt = -\frac{3}{2}\log|\cos t| + C = -\frac{3}{2}\log|\cos 2x| + C$

3. 部分積分を用いる．また，C を積分定数とする．

(1) (与式)$= 2x(-e^{-x}) - \displaystyle\int (2x)'(-e^{-x})dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -2e^{-x}(x+1) + C$

(2) (与式) $= x(-\cos x) - \displaystyle\int (x)'(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C$

(3) (与式)$= \theta\dfrac{\sin 3\theta}{3} - \displaystyle\int (\theta)'\frac{\sin 3\theta}{3}d\theta = \frac{\theta\sin 3\theta}{3} + \frac{\cos 3\theta}{9} + C$

(4) (与式)$= x\log(-x) - \displaystyle\int x(\log(-x))'dx = x\log(-x) - x + C = x(\log(-x) - 1) + C$

(5) (与式)$= \dfrac{x^2}{2}\log(2x) - \displaystyle\int \frac{x^2}{2}(\log(2x))'dx = \frac{x^2}{2}\log(2x) - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2\log(2x) - 1) + C$

(6) (与式)$= \left(-\dfrac{1}{x}\right)\log x - \displaystyle\int \left(-\frac{1}{x}\right)(\log x)'dx = -\frac{1}{x}\log x - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(\log x + 1) + C$

4. C を積分定数とする．

(1) 被積分関数$= \dfrac{4}{x-2} - \dfrac{3}{x-1}$ だから，(与式)$= 4\log|x-2| - 3\log|x-1| + C = \log\dfrac{(x-2)^4}{|x-1|^3} + C$

(2) 被積分関数 $= \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{(x-1)^2}$ だから，(与式) $= \log\dfrac{x^2}{|x-1|} + \dfrac{3}{x-1} + C$

(3) $e^x = t$ とおくと，(与式)$= \displaystyle\int \frac{1}{(t+1)(t-1)}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\log\frac{|e^x-1|}{e^x+1} + C$

5. C を積分定数とする．

(1) (与式)$= \displaystyle\int e^{(\log 2)x}dx = \frac{2^x}{\log 2} + C$

(2) $\sqrt{x} = t$ とおくと，$dx = 2tdt$．よって，(与式)$= \displaystyle\int \frac{2t}{t+1}dt = 2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x}+1) + C$

(3) 部分積分を 2 回用いる．(与式)$= -x^2e^{-x} + \displaystyle\int 2xe^{-x}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx$
$= -e^{-x}(x^2+2x+2) + C$

(4) (与式) $= x(\tan x) - \displaystyle\int (x)'(\tan x)dx = x\tan x + \log|\cos x| + C$

(5) $\cos x = t$ とおくと，$-\sin x dx = dt$．よって、
(与式)$= \displaystyle\int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x}dx = \int \frac{-(1-t^2)}{t^3}dt = \log|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$

(6) $\sqrt{x} = t$ とおくと，$dx = 2tdt$．よって，(与式)$= \displaystyle\int 2te^t dt = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$

6. 速度について：$v'(t) = a$ より，$v(t) = \displaystyle\int a dt = at + C$．$v(0) = v_0$ だから $C = v_0$ となり、$v(t) = v_0 + at$.
位置について：$x'(t) = v(t) = v_0 + at$ より，$x(t) = \displaystyle\int (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C$.
$x(0) = 0$ だから $C = 0$ となり、$x(t) = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$.

7. 積を和になおす公式 $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$ を用いると、

$$\int \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2nx}{4n} + C & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

8. $n = 0$ のとき，$(\log\dfrac{x}{a})^0 = 1$ より $I_0 = x + C$ となる．$n > 0$ のとき，$I_n = \displaystyle\int x'(\log\frac{x}{a})^n dx$
$= x(\log\dfrac{x}{a})^n - \displaystyle\int x\{(\log\frac{x}{a})^n\}'dx = x(\log\frac{x}{a})^n - \int n(\log\frac{x}{a})^{n-1}dx = x(\log\frac{x}{a})^n - nI_{n-1}$.

9. $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと、$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ となるので、

(与式)$= \displaystyle\int \frac{1}{-2t^2+3t+2}dt = \frac{1}{5}\int\left(\frac{2}{2t+1} - \frac{1}{t-2}\right)dt = \frac{1}{5}\log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-2}\right| + C$

11．定積分とその応用

1. (1) (与式) $= \displaystyle\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 2$

(2) (与式) $= \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x}dx = \int_1^2\left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \log x\right]_1^2 = \frac{7}{2} + \log 2$

(3) $-x=t$ と置換して $-dx=dt$ と積分区間

x	0	1
t	0	-1

より

(与式) $=\displaystyle\int_0^{-1} 2e^t(-dt)=2\int_{-1}^0 e^t dt=2[e^t]_{-1}^0=2\left(e^0-e^{-1}\right)=2-\frac{2}{e}$

(4) $2x=t$ と置換して $2dx=dt$ と積分区間

x	$\pi/3$	$\pi/2$
t	$2\pi/3$	π

より

(与式) $=\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} 3\cos t\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{3}{2}\left[\sin t\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=\frac{3}{2}\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(5) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ なので $\cos x=t$ と置換して $-\sin x dx=dt$ と積分区間

x	0	$\pi/3$
t	1	$1/2$

より

(与式) $=\displaystyle\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{t}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t}dt=[\log t]_{\frac{1}{2}}^{1}=0-(-\log 2)=\log 2$

(6) x を微分する方向で部分積分を行うと

(与式) $=[x\sin x]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}-\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 1\cdot\sin x dx=\frac{3\pi}{2}(-1)-[-\cos x]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=-\frac{3\pi}{2}+\{0-(-1)\}=-\frac{3\pi}{2}+1$

2. 方程式 $x^2=x+2 \ \Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=-1,\,2$ なのでその x 座標において二つのグラフは交わる．区間 $[-1,\ 2]$ では $x^2\leqq x+2$ なので囲む面積 S は

$S=\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$

3. 積分区間を 2 つに分け $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$ と表しその右辺第一項の積分変数を $t=-x$ に変えると，関数 f が奇関数なので $f(-t)=-f(t)$ であり

$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_a^0 f(-t)(-dt)+\int_0^a f(x)dx=-\int_0^a f(t)dt+\int_0^a f(x)dx$

ここで定積分 $\displaystyle\int_0^a f(t)dt$ と $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ とは積分変数の他は等しいので値も等しく $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

4. (1) $x=\sqrt{3}\tan\theta$ で置換して　(与式) $=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}\,d\theta}{\cos^2\theta}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\,d\theta=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{4x+3}{x^2+2}=2\cdot\dfrac{(x^2+2)'}{x^2+2}+3\cdot\dfrac{1}{x^2+2}$ なので右辺第 2 項を $x=\sqrt{2}\tan\theta$ として置換積分すると

(与式) $=2\left[\log(x^2+2)\right]_0^{\sqrt{2}}+3\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{2}\,d\theta}{\cos^2\theta}=2\log 2+\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$

5. 三角関数の積を和に直す公式より $\sin mx\cos nx=\dfrac{1}{2}\{\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)\}$.

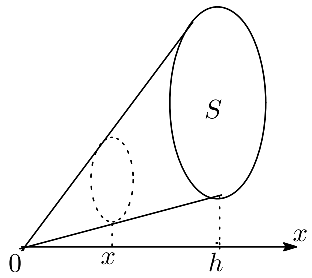
(与式) $=\dfrac{1}{2}\left\{\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(m+n)xdx+\int_0^{2\pi}\sin(m-n)xdx\right\}$ よって，$m\pm n\neq 0$ ならば

(与式) $=\dfrac{1}{2(m+n)}\left[-\cos(m+n)x\right]_0^{2\pi}+\dfrac{1}{2(m-n)}\left[-\cos(m-n)x\right]_0^{2\pi}$ 任意の整数 k に対し $\cos 2k\pi=1$ より (与式) $=0$.

$m=n$ の場合 (与式) $=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin 2nxdx=0$

また $m=-n$ の場合 (与式) $=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin 2mxdx=0$ なのでいずれの場合も (与式) $=0$

6. 頂点から平面図形におろした垂線を x 軸とみて x 軸に垂直な平面で錘を切断すると，断面は与えられた平面図形に $h:x$ で相似．面積は相似比の二乗なので
$V=\int_0^h S\left(\frac{x}{h}\right)^2dx=\frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{Sh}{3}$



7. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$ (頂角が 30° の扇形と正三角形を半分にした直角三角形へと分解できる)

8. (1) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$ (2) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}$ (3) $\begin{cases}\frac{1}{1-k} & 0<k<1 \text{ のとき}\\ \infty & k\geqq 1 \text{ のとき}\end{cases}$

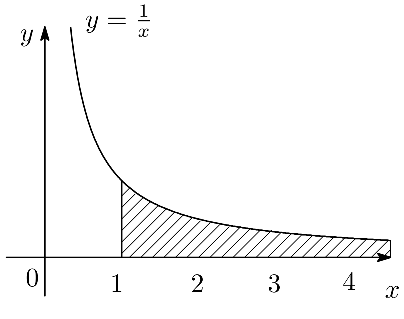
(4) -1 (5) $\frac{\log 2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (6) $\log 3$

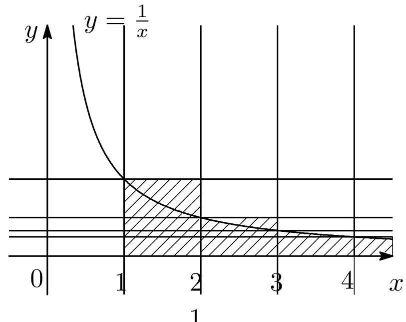
(2) は $x=\sin\theta$(または $\cos\theta$) と置換し $\cos 2\theta$ の積分に帰着させるか，
$\frac{x^2}{-x^2+1}=-\sqrt{-x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{-x^2+1}}$ を利用し，その積分が問 7 と $\sin^{-1}x$ を用いて計算できることを使う．

(4) は $y=\log x$ の逆関数である $y=e^x$ と，x 軸，y 軸で囲まれる領域の面積の値を使うと $\lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\log x=0$ の計算をせずにすむ．

(5) では部分分数分解 $\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$ から $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=\frac{2}{3}$ を得る．
$\frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}=\frac{-\frac{(x^2-x+1)'}{6}+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}$ より $\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$ の計算に帰着されそれは $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ の置換で得られる．

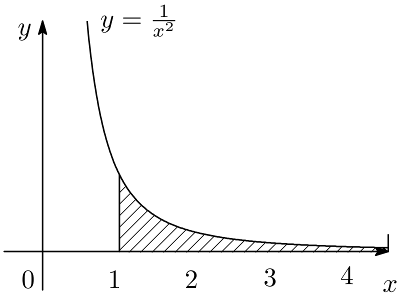
9. (1) k 番目の区間 $[k,k+1]$ では $y=1/x$ の最大値が $\frac{1}{k}$ なので $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$.
$k=1,2,\cdots,n$ に対するこの不等式を足し合わせて $\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$.
左辺が $\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$ より $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}=\infty$.

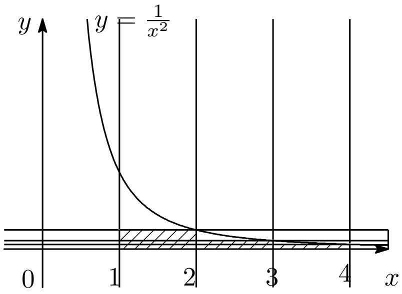




(2) k 番目の区間 $[k,k+1]$ では $y=1/x^2$ の最小値が $\frac{1}{(k+1)^2}$ なので
$\frac{1}{(k+1)^2}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}dx$. $k=1,2,\cdots,n-1$ に対するこの不等式を足し合わせて $\sum_{k=2}^n\frac{1}{k^2}<\int_1^n\frac{1}{x^2}dx$. 両辺に $\frac{1}{1^2}=1$ をたして $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$.

左辺は n について単調増加な数列でそれが 2 より小さいのだから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は 2 以下の数に収束する.





13　編集後記

2006.9　　数学教室一同

第 3 学年で 1,2 年の数学の総復習を確認するため行われてきた総合基礎は当初、森北出版の「高専の数学 1,2」問題集や教科書、そして過去の大学編入試験の問題から数学教室全員で選んだ問題を元に演習テストが行われていた。‘05 年度に初めてテキストを製本することになり「同じ内容を違う問題で再び学習してもらい、より理解能力を深めて欲しい」との思いから本校教員の考えた問題を持ち寄り編集した。

‘06 年度の新版編集作業においては、著作権の問題から更に独自性を高めると共に、数学の苦手な学生により配慮し A 問題には全問詳しい解答を付けた。オリジナルなテキストに仕上がったと考えている。ぜひ有効に活用して欲しいと願っている。

著者　（あいうえお順）
伊藤　清
大貫　洋介
川本　正治
斉藤　洪一
佐波　学
堀江　太郎
安富　真一
横山　定晴

鈴鹿工業高等専門学校　総合基礎数学問題集
2006 年 9 月発行

鈴鹿工業高等専門学校

〒　510-0294　三重県鈴鹿市白子町
Tel　0593-86-1031
URL　http://www.suzuka-ct.ac.jp