はじめに

この問題集は東海地区の高等専門学校（鈴鹿、鳥羽、沼津、岐阜、豊田）の教員の有志で作成しました。高専という環境にあった問題集とは何かを追求してたどり着いたのがこの問題集です。例題を充実させて参考書の代わりにもなるように留意し、高専に合った重要な問題を精選し、また学生の皆さんの知的好奇心を満たせるようにやや高度な問題も豊富に取り入れています。最近の大学編入学試験の動向にも留意しました。

近年、諸外国では数式をグラフにしてくれたりする「グラフ描画ソフト」の教育での利用が盛んに試みられるようになってきましたが、残念ながら我が国ではその取組は遅れています。この問題集ではグラフ描画ソフトの利用も試みています。また市販の問題集には著作権があり、それが web 上への展開の制限となってきましたが、この問題集により web への展開が自由になります。さらに大きな特徴の一つに解答の充実が挙げられます。この冊子には答えのみを掲載してありますが、詳しい解答は時機を見ながら web 上に展開していく予定です。以上のような特徴は, 皆さんが数学の学習をする上で必ず有効であると確信しています。

問題集は、教員のみならず学生の皆さんも育てていくものです。ミスを見つけたり、改善点があればぜひ数学の教員に連絡してください。毎年改善していきます。問題集をより良いものにしていきましょう。

この問題集によって数学の基礎力をしっかり身につけることが、様々な専門科目やさらに高度な内容の学習への架け橋となることを願っています。

目次

数と式の問題

1）数と式

例題 [1] 整式の整理

次の各式を計算し [ ] 内の文字について降べきの順に整理せよ.

(1) $4(x^2-x+1)+(3-x^2)^2 \quad [x]$

(2) $x^3+xy-xy^2+3x^2y^3-2y-4x^3y^2+x^2y \quad [y]$

(3) $ab^2-c(x+1)+\dfrac{4+ax-2x^2}{2}+x^3-bx^2 \quad [x]$

解答例：(1) $4(x^2-x+1)+(3-x^2)^2=4x^2-4x+4+9-6x^2+x^4=x^4-2x^2-4x+13$.

(2) $x^3+xy-xy^2+3x^2y^3-2y-4x^3y^2+x^2y=3x^2y^3-xy^2-4x^3y^2+xy-2y+x^2y+x^3=3x^2y^3-(4x^3+x)y^2+(x^2+x-2)y+x^3$.

(3) $ab^2-c(x+1)+\dfrac{4+ax-2x^2}{2}+x^3-bx^2=ab^2-cx-c+2+\dfrac{a}{2}x-x^2+x^3-bx^2=x^3-(b+1)x^2+\left(\dfrac{a}{2}-c\right)x+(ab^2-c+2)$.

例題 [2] 式の展開

次の各式を展開せよ.

(1) $x^2y(-3xy^2z^3)^2$

(2) $(3a-2b)^3$

(3) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

(4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

解答例：(1) $x^2y(-3xy^2z^3)^2=x^2y(-3)^2x^2y^4z^6=9x^4y^5z^6$.

(2) $(3a-2b)^3=(3a)^3-3(3a)^2(2b)+3(3a)(2b)^2-(2b)^3=27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$.

(3) $(2a-b)\{(2a)^2+(2a)b+b^2\}=(2a)^3-b^3=8a^3-b^3$.

(4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$.

例題 [3] 因数分解

次の各式を因数分解せよ.

(1) $8a^3+27b^3$

(2) $3a^2+4ab-4b^2$

(3) x^4+x^2+1

(4) $2x^2-5xy-3y^2+x+4y-1$

解答例：(1) 公式を用いて $8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3=(2a+3b)\{(2a)^2-(2a)(3b)+(3b)^2\}=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.

(2) たすきがけを用いると, $3a^2+4ab-4b^2=(3a-2b)(a+2b)$.

$$\begin{array}{cccc} 3 & & -2 & \longrightarrow & -2 \\ 1 & \times & 2 & \longrightarrow & 6 \\ \hline 3 & & -4 & & 4 \end{array}$$

(3) $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}=$

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.
(4) 1 つの文字（ここでは x とする）について整理した後, たすきがけを用いる. $2x^2-5xy-3y^2+x+4y-1=2x^2+(-5y+1)x-(3y^2-4y+1)=2x^2+(-5y+1)x-(3y-1)(y-1)=\{2x+(y-1)\}\{x-(3y-1)\}=(2x+y-1)(x-3y+1)$.

$$\begin{array}{cccccc} 2 & \times & y-1 & \longrightarrow & y-1 \\ 1 & & -(3y-1) & \longrightarrow & -6y+2 \\ \hline & & & & -5y+1 \end{array}$$

例題 [4] 整式の除法

(1) 割り算 $(6x^3-x^2+4x-1)\div(3x^2+x-2)$ を計算し, 商と余りを求めよ.
(2) $2x^4+3x^2-4x+1$ をある整式 B で割ると商が x^2+x+1 で余りが $-5x-2$ であった。整式 B を求めよ.
(3) ある 3 次式 $A=x^3+ax^2+b$ を $x-1$ で割ると割り切れ, そのときの商をさらに $x+2$ で割ると余りが -1 であった。この 3 次式 A を求めよ.

解答例：(1) 筆算を行い, 商 $2x-1$, 余り $9x-3$ が得られる.

$$\begin{array}{r|llll} & 2x & -1 & & \\ \hline 3x^2+x-2 & 6x^3 & -x^2 & +4x & -1 \\ & 6x^3 & +2x^2 & -4x & \\ \hline & & -3x^2 & +8x & -1 \\ & & -3x^2 & -x & +2 \\ \hline & & & 9x & -3 \end{array}$$

(2) 割り算の意味より $2x^4+3x^2-4x+1=B(x^2+x+1)+(-5x-2)$ が成り立つ. 余りを移項して $2x^4+3x^2+x+3=B(x^2+x+1)$ である. 割り算を行って $B=2x^2-2x+3$ を得る.
(3) 割り算の筆算または組み立て除法により $A\div(x-1)$ の商 $x^2+(a+1)x+(a+1)$, 余り $a+b+1$ を得るが, 割り切れたのだから $a+b+1=0$. さらに筆算または組み立て除法により商 $x^2+(a+1)x+(a+1)$ を $x+2$ で割ると余り $-a+3$ を得るが, これが -1 に等しい. これらより $a=4,\ b=-5$. よって $A=x^3+4x^2-5$.

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 1 & a & 0 & b \\ & & 1 & a+1 & a+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+1 & \boxed{a+b+1} \end{array} \qquad \begin{array}{r|ccc} -2 & 1 & a+1 & a+1 \\ & & -2 & -2a+2 \\ \hline & 1 & a-1 & \boxed{-a+3} \end{array}$$

例題 [5] 公約数と公倍数

(1) $12a^3b^2c,\ 9a^2bc^3$ の最大公約数と最小公倍数を求めよ.
(2) $x^2-3x+2,\ x^2-1, x^2-x-2$ の最大公約数と最小公倍数を求めよ.
(3) 2 つの整式があり, その最大公約数は $x-1$, 最小公倍数は x^4-2x^2+1 であった. 2 つの整式を求めよ.

解答例：(1) 最大公約数は $3a^2bc$. また最小公倍数は $36a^3b^2c^3$.
(2) それぞれ因数分解すると $(x-1)(x-2),\ (x-1)(x+1),\ (x+1)(x-2)$. これら全てに共通の因数は 1 しかないので最大公約数は 1. また最小公倍数は $(x+1)(x-1)(x-2)$.
(3) 2 つの整式を $A,\ B$, その最大公約数を G, 最小公倍数を L とし, $A=aG,\ B=bG$（a と b は互いに素）とおくと $AB=GL,\ abG=L$ が成り立つ. $G=x-1,\ L=(x-1)^2(x+1)^2$ を代入すると $ab(x-1)=(x-1)^2(x+1)^2$, したがって $ab=(x-1)(x+1)^2$ を得る. $a,\ b$ は互いに素であることに注意すれば $a=x-1,\ b=(x+1)^2$ または $a=1,\ b=(x-1)(x+1)^2$ が考えられる（ま

たはその逆）．よって 2 つの整式は $(x-1)^2$ と $(x-1)(x+1)^2$，または $x-1$ と $(x-1)^2(x+1)^2$.

例題 [6] 有理式の計算

次の分数式を簡単にせよ.

(1) $\dfrac{2x^2+x-1}{x-2} \div \dfrac{2x-1}{x^2-4}$　(2) $\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{2}{a^2+1}$　(3) $1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$

解答例：(1) $\frac{2x^2+x-1}{x-2} \div \frac{2x-1}{x^2-4} = \frac{(2x-1)(x+1)}{x-2} \div \frac{2x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{(2x-1)(x+1)}{x-2} \times \frac{(x+2)(x-2)}{2x-1} = (x+1)(x+2)$

(2) $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} + \frac{2}{a^2+1} = \frac{(a+1)-(a-1)}{(a+1)(a-1)} + \frac{2}{a^2+1} = \frac{2}{a^2-1} + \frac{2}{a^2+1} = \frac{2(a^2+1)+2(a^2-1)}{(a^2+1)(a^2-1)} = \frac{4a^2}{a^4-1}$

(3) $1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{x}{x+1}} = 1 + \dfrac{x+1}{x+1+x} = 1 + \dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{3x+2}{2x+1}$

例題 [7] 根号を含む式の計算

(1) $x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ のとき x^2+y^2 の値を求めよ.

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ.

(3) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ の 2 重根号をはずせ.

解答例：(1) $x+y = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = -4$, $xy = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = 1$ であるから $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 16-2 = 14$.

(2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

(3) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{4-2\sqrt{4\times 3}+3} = \sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$.

例題 [8] 絶対値を含む式の計算

(1) $\sqrt{4a^2-4a+1}$ の根号をはずせ.

(2) 方程式 $|2x-5| = 3$ を解け.

(3) 不等式 $|4-3x| < 5$ を解け.

(4) 方程式 $|2x-1| + |x-4| = 4$ を解け.

ポイント：絶対値をはずすときは, 中身の数の正負により場合分けする：$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$.

解答例：(1) $\sqrt{4a^2-4a+1} = \sqrt{(2a-1)^2}$. $2a-1$ の正負によって場合分けして, $a \geqq \frac{1}{2}$ のとき（与式）$= 2a-1$, $a < \frac{1}{2}$ のとき（与式）$= -(2a-1) = 1-2a$.

(2) $|2x-5| = 3$ は $2x-5 = \pm 3$ と同値（同じ意味）である．よって $2x = 8$ または 2 つまり $x = 4,\ 1$.

(3) $|4-3x|$ は原点と $4-3x$ の距離を表すので, $|4-3x| < 5$ は $-5 < 4-3x < 5$ と同値 である. よって $-9 < -3x < 1$ $\therefore -\frac{1}{3} < x < 3$.

(4) $x < \frac{1}{2}$ のとき $-(2x-1)-(x-4) = -3x+5 = 4$ $\therefore x = \frac{1}{3}$ となる．$\frac{1}{2} \leqq x < 4$ のとき $(2x-1)-(x-4) = x+3 = 4$ $\therefore x = 1$ を得る．$x \geqq 4$ のとき $(2x-1)+(x-4) = 3x-5 = 4$ $\therefore x = 3$ を得るが, この解は条件 $x \geqq 4$ に反する．結局，解は $x = \frac{1}{3},\ 1$.

A 問題

1 次の各式を展開せよ.

(1) $(2a-b)^3$
(2) $\dfrac{a^3b^7}{(a^2b^3)^2}$
(3) $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^3$
(4) $\left(-\frac{2}{3}a^2bxy^3\right)^3$
(5) $(a+b+c)^2$
(6) $(x+y-z)(x-y+z)$
(7) $(p-2q+3r)^2$
(8) $(s^2+st+t^2)(s^2-st+t^2)$
(9) $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$
(10) $\left(\dfrac{x}{2}+2y\right)\left(\dfrac{x^2}{4}-xy+4y^2\right)$
(11) $(a+1)(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$
(12) $(a+b)^6$

2 次の各式を因数分解せよ.

(1) $27x^3+8y^3$
(2) a^4-a^2-12
(3) $3t^2-t-10$
(4) $ab-bc+ca-b^2$
(5) $x^3-9x^2+27x-27$
(6) $6x^2+17xy-3y^2$
(7) $a^2b+a^2c-ab^2-b^2c$
(8) x^4+2x^2+9
(9) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$
(10) $p^4+p^2q^2+25q^4$
(11) $a^2r^2-r^2t^2-2btr-b^2$
(12) $(2b^2+3b+1)a^2-3b^2a-2b^2+3b-1$
(13) a^6-64b^6
(14) $2x^2-xy-y^2-5x-y+2$

3 次の各式を因数分解せよ.

(1) $2x^2-xy-y^2+4x+5y-6$
(2) $3a^2-4ab+b^2-2a-2b-8$
(3) $4x^2-6xy+2y^2-14x+12y+10$
(4) $3x^2+2xy-y^2+12x-8y-15$
(5) $p^2-4q^2-7p-2q+12$
(6) $x^2+2xy-3y^2+4x+20y-12$
(7) $6ax^2-13axy+6ay^2-8ax+2ay-8a$
(8) $6x^2-4y^2-2xy-21x-4y+15$
(9) $a^2+b^2+bc+ac+2ab$
(10) $x^2-2y^2+xy-xz+yz$

4 次の各分数式を計算して簡単にせよ.

(1) $(2-\sqrt{3})^2+\dfrac{12}{\sqrt{3}}$
(2) $\dfrac{2}{3+2\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$
(3) $\dfrac{3a^2b}{5xy^3}\div\dfrac{9ab^2}{10x^3y^2}$
(4) $\dfrac{x^3+8}{x^2-3x+2}\div\dfrac{x+2}{2x^2-3x-2}$
(5) $\dfrac{y}{xy-x^2}+\dfrac{x}{xy-y^2}$
(6) $\dfrac{x-2}{x^2-1}-\dfrac{x+2}{x^3+1}$
(7) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}$
(8) $\dfrac{x-\dfrac{3}{x+2}}{\dfrac{x}{x+2}-3}$
(9) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-3}$
(10) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$
(11) $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{2ab}{b^2-a^2}$
(12) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

5 $x = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}},\ y = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ のとき次の値を求めよ.

(1) $x+y$ (2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ (3) x^2+y^2 (4) x^3+y^3

6 絶対値や根号の記号に関する以下の問いに答えよ.

(1) $\left|\,5-2\sqrt{6}\,\right| - \left|\,\sqrt{6}-3\,\right|$ を簡単にせよ.

(2) 方程式 $|\,2x-3\,| = 7$ を解きなさい.

(3) (i) $\sqrt{(-3)^2\cdot 5^2}$ (ii) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ (iii) $\sqrt{x^2+4x+4}$ の根号記号をはずしなさい.

(4) x がそれぞれ (i) $x=0$ (ii) $x=-4$ (iii) $x=\sqrt{5}$ のとき $|\,x+2\,|-|\,x-3\,|$ を簡単にせよ.

7

(1) $a(b+2)^2$ と $a^2(b^4-16)$ の最大公約数 (G.C.D.) と最小公倍数 (L.C.M.) を求めよ.

(2) 整式の組 $x^2-7x+10,\ 3x^2-13x-10$ の最大公約数と最小公倍数を求めよ.

(3) $x^2+x-2,\ x^2-2x+1,\ x^3-1$ の 最大公約数と最小公倍数を求めなさい.

8

(1) 整式 A を整式 x^2+1 で割ると, 商が $2x-1$, 余りが $-2x-3$ であった. 整式 A を求めよ.

(2) 整式 x^4-2x^2+x-1 を整式 B で割ると, 商が x^2-2x-1, 余りが $9x+2$ となった. 整式 B を求めよ.

(3) 整式 $x^3+2x^2+2x+c-1$ は x^2+x+1 で割り切れるという. 数 c を求めよ.

9 最高次の係数が 1 の 2 次と 3 次の整式 A, B があり, その最大公約数 G が $x+2$ である.

(1) $A=(x+2)P,\ B=(x+2)Q$ と書くとき($P,\ Q$ はある整式), A と B の最小公倍数 L はどのように表されるか?

(2) $A,\ B$ の最小公倍数 L が x^4-3x^2-4 であるとき, 整式 $A,\ B$ を求めよ.

10 整式 $A=2x^2+x+a$, $B=3x^2+2bx+5$ の最大公約数が $x-1$ であるとき, a, b の値を求めよ. また, A と B の最小公倍数を求めよ.

$\boxed{\text{B 問題}}$

11 次の中で必ず正しいものに○を, そうでないものに×をつけ, その理由を述べよ.

(1) $\sqrt{x^2}=x$ (2) $\sqrt{x^2}=|x|$

(3) $\sqrt{x^2+y^2}=|x|+|y|$ (4) $x \geqq 0$ のとき $\sqrt{x^2}=x$, $x<0$ のとき $\sqrt{x^2}=-x$

(5) $\sqrt{x^2+2xy+y^2}=x+y$ (6) $-2 \leqq x \leqq 2$ のとき $\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=4$

12

(1) 二つの実数 a, b が $a^2 > b^2$ を満たす場合, $a > b$ は成り立つか, 理由とともに答えよ.

(2) 二つの実数 a, b が $a - b > 0$ かつ $ab < 0$ を満たす場合, a, b の正負を調べよ.

(3) 二つの実数 a, b が $a < b$ かつ $|ab| = 12$ かつ $\dfrac{a}{b} = -3$ を満たす場合, a, b を求めよ.

(4) 二つの実数 a, b が $a < b < 0$ を満たす場合, 次の数の組 の大小を不等号で表せ.

(i) $a^2,\ b^2$　　(ii) $\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b}$

13 次の方程式・不等式を解きなさい.

(1) 方程式 $|3 - 2x| = 1$

(2) 不等式 $|2x - 1| < 5$

(3) 不等式 $|5 - x| > 3$

(4) 方程式 $|x| + |x - 3| = 4$

(5) 方程式 $|x| + |x - 1| = 1$

14

(1) 方程式 $|m - \sqrt{2}| \leqq 20$ を満たす整数 m は何個あるか. またそれらの和を求めよ.

(2) (1) の m のうち 3 の倍数は何個あるかを答え, またそれらの和を求めよ.

15

(1) $\sqrt{1 - \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{a^2}}$（$0 < a < 1$ とする）を簡単にせよ.

(2) $\sqrt{a^2 - 6a + 9} - \sqrt{a^2 + 6a + 9}$（$a$ は実数）を簡単にせよ.

(3) $\sqrt{1 + 2\sqrt{x(1 - x)}}$（$0 \leqq x \leqq 1$）の 2 重根号をはずしなさい.

16 次の各分数式を計算し，答えを既約分数で表しなさい.

(1) $\dfrac{x+3}{2x^2 - 3x + 1} + \dfrac{-x+6}{6x^2 + x - 2}$

(2) $\dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 3x + 2} \div \dfrac{x+2}{2x^2 - 3x - 2}$

(3) $\left\{\dfrac{y}{x(y-x)} + \dfrac{x}{y(x-y)}\right\} \times \dfrac{1}{x^2 + 2xy + y^2}$

(4) $\dfrac{x-2}{x^2 - 1} - \dfrac{x+2}{x^3 + 1}$

(5) $\dfrac{x-y}{xy} + \dfrac{y-z}{yz} + \dfrac{z-x}{zx}$

(6) $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{2a}{a^2 + b^2} + \dfrac{4a^3}{a^4 + b^4}$

(7) $\dfrac{x-y}{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}$

(8) $1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{c}}}}$

(9) $\dfrac{x^2 - y^2}{3x^2 + xy - 2y^2} \times \dfrac{3x^2 - 2xy}{x^2 + x - xy - y} \div \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$

(10) $\dfrac{2a^2}{2a^2 - 5a + 3} - \dfrac{3a - 1}{2a^2 + a - 6} - \dfrac{a^2 - 5}{a^2 + a - 2}$

17

(1) 循環無限小数 $1.\dot{2}3\dot{4} = 1.234234234\cdots$ を分数で表しなさい.

(2) 循環無限小数 $0.416666\cdots$ を分数で表しなさい.

(3) $\dfrac{x^3-2x+1}{x+2}$ を帯分数で表しなさい.（分数部分は（分子の次数）$<$（分母の次数）とせよ.）

(4) $\dfrac{t^3}{t^2-3t+2}$ を帯分数に直しなさい.

18

次の各式の 2 重根号をはずしなさい.

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$　(2) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$　(3) $\sqrt{4\sqrt{5}+12}$　(4) $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$　(5) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$

19

$\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ の整数部分を x, 小数部分を y とするとき $x+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

20

2 つの整式 A, B の積 AB が $x^4-x^3-7x^2+13x-6$ で，最大公約数 G が $x-1$ であるという．整式 A, B を求めよ.

21

(1) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$ を通分して簡単にせよ.

(2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ を因数分解せよ.

(3) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ を通分して簡単にせよ.

22

3 辺の長さが a, b, c である三角形が $a^4+b^4-c^4-2a^2b^2=0$ を満たすとすれば, この三角形はどんな三角形か？

C 問題

23

問題 [rank A]

分配法則と展開に関する次の問に答えよ.

(1) $(a+b)(c+d+e)$ を展開せよ.

(2) $(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)(j+k+l+m+n)$ を展開すると, いくつの項が出てくるか (簡単な説明または計算式を付けること).

(3) $(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)(a+b+c+d+e)$ を展開し同類項でまとめたとき, ac^2e の係数, $abce$ の係数をそれぞれ求めよ. また 文字 a に着目したとき, a^3 の係数を求めよ.

24

問題 [rank A]

整式 $x^m - 1$ を $m = 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12$ のときに有理数係数の範囲で因数分解せよ.
また, $m = 5,\ 7,\ 10,\ 11$ のときは因数分解はどうなるか？

25

問題 [rank A]

$N = |x - \sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1 - x|$ とするとき, 次の問に答えよ.
(1) $x = 0$ のとき, N の値を計算せよ.
(2) N が自然数となるような整数 x の値を求め, そのときの N を計算せよ.

26

問題 [rank A]

$xy - x - y + 1$ を因数分解することで $xy - x - y - 14 = 0$ の自然数解 $x,\ y$ を全て見つけよ.

27

問題 [rank B]

次の各式を因数分解せよ. (答えの導出過程も記すこと.)
(1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
(2) $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$

28

問題 [rank B]

整式 A, B を $x^2 + 3x + 5$ で割ると, 余りがそれぞれ $3x - 2$, $2x + 5$ になった. このとき, 次の整式を $x^2 + 3x + 5$ で割ったときの余りをそれぞれ求めよ. (答えや単なる計算だけではなく, きちんとした説明が必要.)
(1) $A + B$ (2) $2A - 3B$ (3) AB

29

問題 [rank B]

(1) $x = a + \dfrac{1}{a}$ (ただし $0 < a < 1$) のとき, $x + \sqrt{x^2 - 4}$ を a で表しなさい.

(2) $y = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ (ただし $|t| < 1$) のとき, $\dfrac{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}$ を t で表しなさい.

30

問題 [rank B]

(1) $x^2 - y^2 + 2x + 6y - n$ が $(x - y + a)(x + y - b)$ と因数分解されるという. このとき, 定数 a, b, n の値を求めよ.

(2) $x^2 - y^2 + 2x + 6y = 2011$ を満たす自然数 x, y の組 (x, y) は存在するか. 存在する場合はその組を全て挙げ, 存在しない場合はそのことを証明せよ. 必要があれば $1995 \sim 2015$ に含まれる素数は, 1997, 1999, 2003, 2011 だけであることを用いてもよい.

等式と不等式の問題

2）等式と不等式

例題 [1] 恒等式と方程式

(1) 次の等式は方程式，恒等式のいずれか.

(a) $(x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$ (b) $(x+2)^2 = x^2+2$ (c) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

(2) $x^3-2x^2+3x-4 = (x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が恒等式になるように定数 a, b, c の値を定めよ.

解答例：(1) (a) と (c) は**全ての** x（ただし (c) については $x \neq 2, 3$）について成り立つ等式なので恒等式である. (b) は $x = -\frac{1}{2}$ という**特別な** x についてのみ成り立つ等式なので方程式である.
(2) 右辺を展開して x について降べきの順に整理すると $x^3+(a-3)x^2+(-2a+b+3)x+(a-b+c-1)$ となるので係数を比較して $a-3=-2,\ -2a+b+3=3,\ a-b+c-1=-4$ が成り立てばよい. これを解いて $a=1, b=2, c=-2$.
(2) の別解：恒等式であるためには全ての x について成り立たなければならないので，$x=1$ を代入して $c=-2$ を得る。次に等式の両辺を x で微分した $3x^2-4x+3 = 3(x-1)^2+2a(x-1)+b$ に $x=1$ を代入すれば $b=2$ を得る。さらにこの両辺を x で微分した $6x-4 = 6(x-1)+2a$ に $x=1$ を代入すれば $a=1$ を得る.

例題 [2] 部分分数分解

次の各分数を部分分数に分解せよ.

(1) $\dfrac{5x-2}{2x^2-x-1}$ (2) $\dfrac{2x+3}{(x-2)^2}$ (3) $\dfrac{-2x^2+x+4}{x^3-1}$

解答例：(1) $\frac{5x-2}{2x^2-x-1} = \frac{5x-2}{(2x+1)(x-1)} = \frac{a}{2x+1}+\frac{b}{x-1}$ が x についての恒等式になるように定数 a, b の値を定める. 分母を払うと $5x-2 = a(x-1)+b(2x+1) = (a+2b)x+(-a+b)$ となるので係数を比較して $a+2b=5,\ -a+b=-2$ が成り立てばよく，よって $a=3,\ b=1$ で部分分数分解の答えは $\frac{5x-2}{2x^2-x-1} = \frac{3}{2x+1}+\frac{1}{x-1}$.
(2) $\frac{2x+3}{(x-2)^2} = \frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x-2)^2}$ と分解する. 分母を払うと $2x+3 = a(x-2)+b = ax+(-2a+b)$ となるので係数を比較して $a=2,\ -2a+b=3$ が成り立てばよく，よって $a=2,\ b=7$（答え略）.
(3) $\frac{-2x^2+x+4}{x^3-1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$ と分解する. 分母を払うと $-2x^2+x+4 = a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1) = (a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)$ となるので係数を比較して $a+b=-2,\ a-b+c=1,\ a-c=4$ が成り立てばよく，よって $a=1,\ b=-3,\ c=-3$（答え略）.

剰余の定理

整式 $f(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りは $f(\alpha)$ となる.

因数定理

整式 $f(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる $\Leftrightarrow f(\alpha)=0$.

例題 [3] 剰余の定理, 因数定理

(1) 整式 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ を $x - 1$ で割ったときの余りを求めよ。また $f(x)$ を $x + 2$ で割ったときの余りを求めよ.
(2) 整式 $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ を $x - 3$ で割ると割り切れ, $x + 1$ で割ると余りが -8 であった. a, b の値を求めよ.

解答例：(1) 剰余の定理より $x - 1$ で割ったときの余りは $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = 2$, $x + 2$ で割ったときの余りは $f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 2 = 14$.
(2) 題意より $f(3) = 27 + 18 + 3a + b = 0$, $f(-1) = -1 + 2 - a + b = -8$ が成り立つ. a, b についてのこの連立方程式を解けば $a = -9$, $b = -18$ が得られる.

例題 [4] 高次式の因数分解, 高次方程式

(1) 整式 $f(x) = 6x^3 - 7x^2 + 1$ を因数分解せよ.
(2) 方程式 $2x^4 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2 = 0$ を複素数の範囲で解け.
(3) 整式 $A(x) = x^3 + ax^2 + 2x + b$ を $x^2 - 2x - 3$ で割りきれるように定数 a, b の値を定めよ.

解答例：(1) $f(1) = 0$ であることから $f(x)$ は $x - 1$ で割り切れ, 実際に筆算または組み立て除法で割り算を行えば, 商が $6x^2 - x - 1 = (2x - 1)(3x + 1)$ となる. よって $f(x) = (x - 1)(2x - 1)(3x + 1)$.
(2) 左辺を $f(x)$ とおくと $f(-1) = 0$ であることから $f(x)$ は $x + 1$ で割り切れ, 実際に割り算を行えば商が $2x^3 - 3x^2 - x - 2$ となる. この商を $g(x)$ とおけば $g(2) = 0$ であることから $g(x)$ は $x - 2$ で割り切れ, 実際に割り算を行えば商が $2x^2 + x + 1$ となる. よって $f(x) = (x - 2)(x + 1)(2x^2 + x + 1) = 0$. $2x^2 + x + 1 = 0$ は 2 次方程式の解の公式で解いて $x = -1, 2, \frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{4} \quad (i = \sqrt{-1})$.
(3) 整式 $A(x)$ は $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ で割り切れるのだから $x + 1$ でも $x - 3$ でも割り切れる. よって $A(-1) = -1 + a - 2 + b = 0$, $A(3) = 27 + 9a + 6 + b = 0$. a, b についてのこの連立方程式を解けば $a = -\frac{9}{2}$, $b = \frac{15}{2}$ が得られる.

例題 [5] 分数の方程式，不等式

次の方程式・不等式を解け.
(1) $\dfrac{x^2 + 8}{x^2 - 4} = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 2}$ (2) $\dfrac{x + 1}{x - 1} = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1} + \dfrac{2}{x^2 - 1}$ (3) $x - 2 > \dfrac{5x - 6}{x}$

解答例:(1) 両辺に $x^2 - 4$ を掛けて分母を払うと $x^2 + 8 = (2x^2 + 1)(x + 2)$, 整理して $2x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ を得る. 左辺の 3 次式を因数定理を用いて因数分解すれば $(x - 1)(2x^2 + 5x + 6) = 0$. よって解は $x = 1, \frac{-5 \pm \sqrt{23}\,i}{4}$.
(2) 両辺に $x^2 - 1$ を掛けて分母を払うと $(x + 1)^2 = (2x^2 - 1)(x - 1) + 2$, 整理して $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ を得る. 左辺の 3 次式を因数定理を用いて因数分解すれば $(x - 2)(x + 1)(2x - 1) = 0$. ここで $x = -1$ は問題の式の分母を 0 にしてしまうので不適. よって解は $x = 2, \frac{1}{2}$.
(3) **不等号の向きが変わらないように**両辺に $x^2 > 0$ を掛けて分母を払うと, 与式は $x^2(x - 2) > x(5x - 6)$ $(x \neq 0)$ と同値である. 全て左辺に移項して左辺を因数定理を用いて因数分解すれば

$x(x-1)(x-6)>0$. よって, 次の例題 [6] のように表を作るかまたは3次関数のグラフを考えれば $0<x<1,\ 6<x$ を得る.

例題 [6] 高次の不等式

次の不等式を解け（不等式を満たす x の値の範囲を求めよ）.
(1) $2x^3+7x^2+4x-4 \geqq 0$
(2) $2x^4-3x^3-4x^2+3x+2<0$

解答例：(1) 左辺を因数分解すると問題は $(x+2)^2(2x-1)\geqq 0$ と同値. 左辺の $(x+2)^2,\ 2x-1, (x+2)^2(2x-1)$ の符号 ($\pm$) を順に調べてゆくと, 表のようになる. したがって表より $x=-2,\ x\geqq \frac{1}{2}$.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)^2(2x-1)$	$-$	0	$-$	0	$+$

(2) 左辺を $f(x)$ とおくと $f(1)=0$ であることから $f(x)$ は $x-1$ で割り切れ, また $f(-1)=0$ であることから $g(x)$ は $x+1$ でも割り切れる. 実際に割り算を行えば商が $2x^2-3x-2=(x-2)(2x+1)$ となり, よって $f(x)=(x+1)(2x+1)(x-1)(x-2)<0$ を満たすの範囲を求めればよい. したがって表より $-1<x<-\frac{1}{2},\ 1<x<2$ となる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

相加平均と相乗平均の不等式

正の数 $a,\ b$ に対して次の不等式が成り立つ：
$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}\quad\Leftrightarrow\quad a+b\geqq 2\sqrt{ab}$（等号は $a=b$ のときに限り成り立つ.）

例題 [7] 等式・不等式の証明

文字は全て実数とする.
(1) $a:b=c:d$ のとき $\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{c^2+d^2}{cd}$ が成り立つことを証明よ.
(2) 不等式 $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geqq ac+bd$ が成り立つことを証明せよ. また等号が成り立つのはどのような場合か.
(3) 相加平均・相乗平均の不等式を用いて, 不等式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq 4|abcd|$ を証明せよ.

ポイント：条件に比例式が与えられているときは, 等しい比（分数）の値を $=k$ とおく.

解答例：(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと $a=kb,\ c=kd$ であるから $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{k^2b^2+b^2}{kbb}=\frac{(k^2+1)b^2}{kb^2}=\frac{k^2+1}{k}$, $\frac{c^2+d^2}{cd}=\frac{k^2d^2+d^2}{kdd}=\frac{k^2+1}{k}$. よって $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{c^2+d^2}{cd}$.
(2) 右辺が 0 以下の場合は（左辺は常に 0 以上だから）不等式は成り立つ．右辺が 0 以上の場合には $(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd=(ac-bd)^2\geqq 0$ となるので, 成り立つ．等号が成り立つのは $ac=bd$ のとき，すなわち $a:b=c:d$ のとき．
(3) 相加平均・相乗平均の不等式 $a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ を $a=a^2,\ b=b^2$ として用いると $a^2+b^2\geqq 2\sqrt{a^2b^2}=2|ab|$, 同様に $c^2+d^2\geqq 2\sqrt{c^2d^2}=2|cd|$ が得られる．左辺同士, 右辺同士を乗ずれば $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq 2|ab|\cdot 2|cd|=4|abcd|$ を得る．等号は $|a|=|b|$ かつ $|c|=|d|$ のとき成立.

A 問題

1 次の等式が x についての恒等式になるように定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ．

(1) $3x^2-7x+1=a(x-2)^2+b(x-2)+c$
(2) $5x+5=a(x^2+1)+(bx+c)(x-2)$
(3) $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$
(4) $\dfrac{8x+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

2

(1) 整式 x^3+2x^2+3x+4 を $x+1$ で割ったときの余りを求めよ.
(2) 整式 x^3+2x^2+3x+4 を $2x-1$ で割ったときの余りを求めよ.
(3) 整式 x^3+2x^2+3x+4 を $2x^2+x-1$ で割ったときの余りを求めよ.
(4) 整式 x^3+2x^2+ax+b は $x+1$ で割り切れ, $x-2$ で割ると余りが 4 になるという．定数 $a,\ b$ を求めよ.

3 次の整式 $P(x)$ を実数が係数となる範囲で因数分解せよ.

(1) $P(x)=10x^3-13x^2-15x+18$
(2) $P(x)=x^4-4x^3+10x^2-17x+10$
(3) $P(x)=4x^3+4x^2-7x+2$

4 次の方程式を（複素数の範囲で）解きなさい.

(1) $3x^3+x^2-8x+4=0$　　(2) $x^4-2x^3+x^2-4=0$
(3) $\omega^3=1$　　(4) $x^4=16$
(5) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$　　(6) $\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}=0$
(7) $\dfrac{x-4}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-6}{x^2-4}$　　(8) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
(9) $x^4-3x^2+1=0$　　(10) $6x^4+11x^3-9x^2-x+1=0$

5 次の不等式を証明せよ（文字は全て実数で，a，b，c，d は正の数とする）．また等号が成り立つ場合も調べよ．

(1) $x^2 + y^2 \geqq 2(x - y - 1)$　　(2) $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(3) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqq (ax + by)^2$　　(4) $\dfrac{b}{4a} + \dfrac{a}{b} \geqq 1$

(5) $(a + b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$　　(6) $(a + b)(c + d) \geqq 4\sqrt{abcd}$

6 実数 a，b，c が次の条件を満たすとき，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ の解を判別せよ．

(1) $a + c = 0$　(2) $a = b = c$　(3) $b = a + c$

7 (1) 等式 $(x + y)^2 + (xy - 1)^2 = (x^2 + 1)(y^2 + 1)$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $a : b = c : d$ であるとき $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$ が成り立つことをを証明せよ．

(3) $x : y = a : b$ のとき $\dfrac{px + qy}{pa + qb} = \dfrac{x}{a}$ $(p, q$ は 0 以外の定数) が成り立つことを証明せよ．

B 問題

8 次の分数を部分分数に分解しなさい．

(1) $\dfrac{3x - 7}{x^2 + 2x - 3}$　(2) $\dfrac{x^2 + 1}{(x - 1)^2(x + 2)}$

(3) $\dfrac{1}{x^3 + 1}$　(4) $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

9 次の不等式を解きなさい．

(1) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 > 0$　(2) $2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2 \leqq 0$

(3) $4x^4 - x^2 \geqq 0$　(4) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 \leqq 0$

10

(1) $\dfrac{x^3}{x + 2}$ を帯分数で表しなさい．（ただし分数部分は（分子の次数）<（分母の次数）とせよ．）

(2) $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2}$ を帯分数に直し，さらに分数部分を部分分数に分解せよ．

(3) 不等式 $\dfrac{4}{x} \geqq x + 3$ を解きなさい．

（ヒント：両辺に x^2 を掛けるか，または $y = \dfrac{4}{x}$ と $y = x + 3$ のグラフを考える．）

(4) 不等式 $\sqrt{x + 2} \geqq x$ を解きなさい．

11 3 辺の長さが a，b，c である三角形が $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ を満たすとすれば，この三角形はどんな三角形か？

12 以下の問いに答えなさい.
(1) 整式 $P(x)$ を整式 $x-1$ で割ると割り切れ, $x+3$ で割ると余りが 2 であった. 整式 $P(x)$ を x^2+2x-3 で割ったときの余りを求めよ.
(2) ある多項式 $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは 3 であり, x^2+x-6 で割ったときの余りは $ax-1$ であるという（a はある定数）. このとき $P(x)$ を $x+3$ で割ったときの余りを求めよ.

13 次の不等式を証明せよ（文字は全て実数とする）. また等号が成り立つ場合も調べよ.
(1) $a^3+b^3 \geqq ab(a+b)$ （ただし, $a>0,\ b>0$）
(2) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2} \geqq px+qy+rz$
(3) $x^2+y^2+z^2+w^2+1 \geqq x+y+z+w$

14 $a+b+c=0$ のとき, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$$

15 3次方程式に関する以下の問いに答えなさい.
(1) 3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき, 解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ と係数 $a,\ b,\ c,\ d$ の間に次の関係式が成り立つことを示しなさい.

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

(2) $x^3-3x^2-18x+m=0$ の2つの解の差が 3 であるとき, m の値とこの方程式の解を求めよ.
(3) (1) のとき, $\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2$ を3つの解とする3次方程式を求めよ（その係数を a, b, c, d で表せ）.

16 次の不等式を証明せよ (等式が成立する場合がいつかも答えよ).
(1) 実数 x, y, z に対し $x^2+y^2+z^2 \geqq \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$
(2) 実数 a, b, c に対し $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$
(3) 正の実数 a, b, c に対し $(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$

17 次の不等式を解きなさい.

(1)	$\lvert 2x-3\rvert < 5$	(2)	$\lvert 2x-3\rvert > x$
(3)	$\lvert x^2-4\rvert \leqq 3x$	(4)	$\dfrac{(x+2)(x-5)}{x-3} \geqq 0$
(5)	$\dfrac{4}{x-1} < x+2$	(6)	$\dfrac{1}{x+1} \geqq \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{x}$

$\boxed{\text{C 問題}}$

18

問題 [rank A]

$A = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $B = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$ とおく. 次の等式を証明せよ. $\left(\dfrac{A}{\sqrt{2}} - \dfrac{B}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{A}{\sqrt{2}} + \dfrac{B}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$

19

問題 [rank A]

不等式 $x^3 - (1+a)x^2 + ax > 0$ を解きなさい.（定数 a の値により場合分けして答える.）

20

問題 [rank A]

連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=18 \\ x^3+y^3+z^3=0 \end{cases}$ を解きなさい。

21

問題 [rank B]

正の実数 a, b, c, d に対し, 次の不等式を証明せよ.

(1) $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$

(2) $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqq abc$ すなわち $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

(ヒント: $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ などを用いる.)

22

問題 [rank B]

次の等式が成り立つとき, この等式の値を求めよ.

$$\frac{y+z}{x} = \frac{-z+5x}{y} = \frac{x-y}{z}$$

（豊橋技科大, 類題）

23

問題 [rank B]

実数 $x,\ y$ に対する条件 $x^2+y^2 \leqq 1$ は, 次の各条件が成り立つための必要条件, 十分条件, 必要十分条件, そのどれでもない, のいずれか?

(1) $|x| \leqq 1$ かつ $|y| \leqq 1$　　(2) $-\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}$

(3) $|x| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ かつ $|y| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$　　(4) $|y| \leqq 1-x^2$

（岐阜大，改題）

24

問題 [rank C]

(1) 分数 $\dfrac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}$ を部分分数に分解せよ.

(2) (1) の結果を書き換えることで, 次の等式を満たす定数 $a,\ b,\ c,\ d$ を求めよ.

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} = \frac{a}{(1-q)^3} + \frac{b}{(1-q)^2} + \frac{c}{1-q^2} + \frac{d}{1-q^3}$$

(3) 自然数 n を m 以下の自然数の和で表す方法の個数を**分割数**と言い $p(n,\ m)$ で表す（和の順番を変えた表し方は同じものとみなす）.

例えば $m=3$ として, 7 を 3 以下の自然数の和で表す方法は

$$\begin{aligned}7 &= 3+3+1 = 3+2+2 = 3+2+1+1 = 3+1+1+1+1 \\ &= 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1 = 2+1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

の 8 通りあるから $p(7,\ 3)=8$ である。$p(n,\ 3)$ $(1 \leqq n \leqq 10)$ の値を全て求めよ.

（以下は「(無限) 級数」に関する知識・能力が必要. 最難問の１つ. 可能ならチャレンジせよ.）

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p(n,\ 3)q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}$ が成り立つことを証明せよ.

(5) $p(n,\ 3)$ の値は $\dfrac{(n+3)^2}{12}$ に**最も近い**整数に等しいことを証明せよ.

(Integers Partitions, G. E. Andrews and K. Eriksson)

集合と論理の問題

3）集合と論理

例題 [1]

次の集合を，要素を書き並べて表わせ．ただし, 自然数全体の集合を $\mathbb{N}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と記す.
(1) 4 以下の自然数の集合.
(2) $\{x | -5 \leqq x < 4,\ x \in \mathbb{Z}$ (整数全体)$\}$.
(3) $\{2n+3 | n \in \mathbb{N}$ でかつ $n \leqq 3\}$.
（a が集合 A の要素であることを $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$，要素でないことを $\mathbf{a} \notin \mathbf{A}$ と表わす.）

解答例：(1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. (2) $\{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. (3) $\{5,\ 7,\ 9\}$.

例題 [2]

次の集合 $A,\ B$ に包含関係があれば述べよ．包含関係とは $A \subset B,\ A = B,\ A \supset B$ のいずれかのことである.
(1) $A = \{n | n$ は奇数, $0 < n < 11\}$, $B = \{2m+1 | m \in \mathbb{Z}\}$.
(2) $A = \{2m+3 | m \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{2m-1 | m \in \mathbb{Z}\}$.
(3) $A = \{n | n$ は 36 の約数 $\}$，$B = \{x | x^2 - 6x + 8 = 0\}$.

解答例：(1) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$B = \{\cdots, -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots\}$ より $A \subset B$ である．(2) $A = B$ である． (3) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$，$B = \{2,\ 4\}$ より $A \supset B$ である.

例題 [3]

3 つの集合 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{1,\ 2,\ 6\}$, $C = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ に対して次の集合を求めよ.
(1) $A \cup B,\ A \cap B$
(2) $(A \cup B) \cap C,\ (A \cap B) \cup C$
(3) $A \cap B \cap C$

解答例：(1) $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $A \cap B = \{1,\ 2\}$. (2) $(A \cup B) \cap C = \{2,\ 3,\ 4\}$, $(A \cap B) \cup C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. (3) $A \cap B \cap C = \{2\}$.

例題 [4]

x は実数とする．次の条件の否定を述べよ.
(1) $x = 1$
(2) $x < 2$
(3) $x \geqq 3$ または $x < -2$

解答例：(1) $x \neq 1$ (2) $x \geqq 2$ (3) $-2 \leqq x < 3$

例題 [5]

x は実数とする．命題「$x=4 \Longrightarrow x^2=16$」の真偽を調べよ．また，この命題の逆を述べ，その真偽を調べよ．

解答例：「$x=4 \Longrightarrow x^2=16$」は真である．逆は「$x^2=16 \Longrightarrow x=4$」であるが，$x^2=16$ の解は $x=-4$ もあるので偽である．

例題 [6]

x は整数とする．命題「$x^2=4 \Longrightarrow -2 \leqq x < 5$」の真偽を集合を使って調べよ．

解答例：$x^2=4$ を満たす集合を P，$-2 \leqq x < 5$ を満たす集合を Q とすると，$P=\{-2,\ 2\}$，$Q=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ となる．$P \subset Q$ であるからこの命題は真．

例題 [7]

a, b は実数とする．次の条件 p, q について，p は q であるための必要条件，十分条件，必要十分条件のいずれであるか．

(1) p：「$a=-1$」，q：「$a^2=1$」

(2) p：「$a=1$ かつ $b=3$」，q：「$a+b=4$ かつ $a-b=-2$」

(3) p：「$a^2=b^2$」，q：「$a=b$」

解答例：(1) $a^2=1$ を解く と $a=\pm 1$．よって $p \Longrightarrow q$ は真となるので p は（q が成り立つための）十分条件．

(2) q の連立方程式を解くと $a=1$ かつ $b=3$ となる．よって $p \Longleftrightarrow q$ となるので p は（q であるための）必要十分条件．

(3) p を解くと，$a=\pm b$．よっ て $p \Longrightarrow q$ は偽であるが $q \Longrightarrow p$ は真であるので, p は（q であるための）必要条件．

例題 [8]

n は自然数とする．命題「n^2 が 3 の倍数でない $\Longrightarrow$ n は 3 の倍数でない」が真であることを証明せよ．

解答例：対偶の「n が 3 の倍数である $\Longrightarrow$ n^2 は 3 の倍数である」を示そう．n が 3 の倍数であるから，整数 m を用いて $n=3m$ と表され $n^2=(3m)^2=3(3m^2)$ となり n^2 は 3 の倍数となる．よってこの対偶が真であることからもとの命題も真となる．

A 問題

1 1 から 10 までの自然数の集合を全体集合とし, その中で 2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B とするとき次の集合を求めよ．

(1) $\overline{A}$ (2) $\overline{B}$ (3) $\overline{A} \cup \overline{B}$ (4) $\overline{A} \cap \overline{B}$ (5) $\overline{A \cup B}$ (6) $\overline{A \cap B}$

2 $A=\{x\,|\,-2<x<2\}$，$B=\{x\,|\,0\leqq x\leqq 3\}$ とするとき, 次の集合を求めよ．ただし, 全体集合は実数全体とする．

(1) $A\cap B$ (2) $A\cup B$ (3) $\overline{A}$ (4) $\overline{A}\cap\overline{B}$ (5) $\overline{A}\cup\overline{B}$ (6) $\overline{A\cap B}$ (7) $\overline{A\cup\overline{B}}$

3 次の条件の否定を述べよ．但し，x, y は実数，n は自然数とする．

(1) n は素数である．
(2) $x\neq -1$.
(3) $x<-1$.
(4) $x\geqq -10$.
(5) $x=2$ かつ $y=1$.
(6) $x>2$ または $y\leqq -1$.
(7) x, y はともに負である．
(8) x, y のうち少なくとも一方は負である．

4 次の命題の逆・裏・対偶を述べ, 元の命題を含めてそれぞれの真偽を調べよ（a, x は実数）．

(1) $a=-5$ ならば $a^2=25$.
(2) $\sqrt{a^2}=a$.
(3) 4 の倍数ならば 16 の倍数である．
(4) $x^2-4x+3=0$ であるならば $x=1$ である．
(5) $a^3=1$ であるならば $a=1$ である．

5 次の文章の（　　　）の中に, 必要, 十分, 必要十分, いずれでもない, のどれかを入れよ．

(1) $x=2$ であることは $x^2=4$ が成り立つための（　　　）条件である．
(2) $a=1$ であることは, $ab=1$ が成り立つため（　　　）条件である．
(3) 三角形 ABC が正３角形であるためには, ３つの角が等しいことは（　　　）条件である．
(4) $xz=yz$ であることは $x=y$ が成り立つための条件（　　　）である．
(5) 整数 m, n がともに奇数であることは, mn が奇数であるための（　　　）条件である．
(6) 整数 m, n がともに偶数であることは, mn が偶数であるための（　　　）条件である．
(7) 四角形がひし形であるためには, その対角線が直交することが（　　　）条件である．
(8) a, b がともに実数であることは, $a+b$ および ab がともに実数であるための（　　　）条件である．

6 集合を用いて，次の命題の真偽を調べよ．

(1) $x<-2$ ならば $x<0$.
(2) $x>5$ ならば $x\geqq 5$.
(3) $|x|<3$ ならば $x<1$.
(4) $|x|<1$ ならば $|x|\leqq 3$.

7 次の命題の真偽を述べよ．

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$.

(2) $ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(3) $ab = 0 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 0$.

$\boxed{\text{B 問題}}$

8 1 から 100 までの自然数のうち, 2 の倍数の集合を A, 3 の倍数の集合を B, 5 の倍数の集合を C とする．次のそれぞれの集合を記号で表し, その個数を求めよ．

(1) 2 の倍数かつ 3 倍数の集合　(2) 2 または 3 倍数の集合　(3) 2 の倍数でない数の集合

(4) 2 の倍数でも 3 倍数でもない数の集合　(5) 3 の倍数であるが 5 倍数ではない数の集合

(6) 2 または 3 または 5 倍数の集合.

9 次の命題の逆・裏・対偶を述べ，元の命題を含めてその真偽を述べよ．

(1) 自然数 n に対して，命題「n が 8 の倍数ならば n は 4 の倍数」.

(2) 実数 a, b, c に対して，命題「$ac = bc$ ならば $a = b$」.

(3) 自然数 m, n に対して，命題「m, n がともに偶数 ならば $m + n$ は偶数」.

10 集合を用いて，次の命題の真偽を調べよ．

(1) $x > 3$ ならば $x^2 - 5x + 6 \geqq 0$.

(2) $|x - 1| < 2$ ならば $|x| < 3$.

(3) $|x - 1| > 5$ ならば $x \geqq 6$

(4) $-4 < x < 2$ ならば $|x^2 + 2x| < 8$.

11 次の文章の中に適切な言葉を入れよ．

(1) 実数 x に対して, $x^2 > 1$ が成り立つためには $x > 1$ が成り立つことは（　　　　）条件である.

(2) $ab = 0$ が成り立つための必要十分条件は $a = 0$（　　　）$b = 0$ が成り立つことである.

(3) $ab \neq 0$ が成り立つためには, $a \neq 0$ または $b \neq 0$ であることは（　　　　）条件である.

(4) a, b を実数とするとき, $a^2 + b^2 = 0$ が成り立つための必要十分条件は $a = 0$（　　　）$b = 0$ が成り立つことである.

12 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて, 次の命題が真であることを（背理法を用いる等で）証明せよ.

(1) $\sqrt{8}$ は無理数である.

(2) $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ は無理数である.

(3) a, b を有理数とするとき，$a + b\sqrt{6} = 0 \Longrightarrow a = 0$ かつ $b = 0$.

13 m, n を整数とする．$m^2 + n^2$ が 3 の倍数ならば, m と n はともに 3 の倍数であることを証明せよ.

C 問題

14

問題 [rank A]

(a) 全体集合 $\mathrm{U} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ として，その部分集合 A，B，C について，以下の問いに答えよ．ただし，$\overline{\mathrm{A}}$, $\overline{\mathrm{B}}$ は，A，B の補集合を意味する．
(ア) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ のとき，$\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$ を求めよ．
(イ) $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} = \{2,\ 7\}$, $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{2,\ 4\}$ のとき，$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}$ を求めよ．
(産能大・経営情報, 類題)
(b) 集合 A，B が，$\mathrm{A} = \{x : x^2 - 2x - 3 < 0\}$，$B = \{x : x^2 - 5x + 4 < 0\}$ であるとき，$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$ を求めよ．ただし，実数全体を全体集合として，$\overline{\mathrm{C}}$ は C の補集合である．
(国士舘大・政経 (2 部), 類題)

15

問題 [rank A]

文中の空欄にあてはまるものを下の選択肢から 1 つ選び，その記号 (a)，(b)，(c)，(d) を解答せよ．
(a) 必要条件であるが十分条件でない
(b) 十分条件であるが必要条件ではない
(c) 必要十分条件である
(d) 必要条件でも十分条件でもない

10 円，100 円，500 円のコインをそれぞれ 1 枚ずつ取って 3 枚同時に投げたとき，表の出たコインの合計金額を X 円と表わすことにする．なお，コインが立つことはないとする．
(1) $X \geqq 110$ は「すくなくとも 2 枚のコインが表である」ための $\boxed{}$.
(2) $X \geqq 100$ は「100 円のコインが表である」ための $\boxed{}$.
(3) $X \leqq 100$ は「500 円のコインが裏である」ための $\boxed{}$.
(4) $\frac{X}{10}$ が奇数であることは「10 円のコインが表である」ための $\boxed{}$.
(5) $110 \leqq X \leqq 500$ は「ちょうど 2 枚のコインが表である」ための $\boxed{}$.
(大東文化大, 類題)

16

問題 [rank B]

$\mathrm{A} = \{(x, y) : x^2 + y^2 - ax = 0\}$，$\mathrm{B} = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x \leqq 3\}$ のとき，$A \subset B$ となるための a の条件を求めよ．
(東京電機大・工, 類題)

17

問題 [rank B]

「整数 n が 5 の倍数でないならば，n^2 は 5 の倍数ではない」という命題を考える．
(a) この命題の逆，裏，対偶を記せ．
(b) 「整数 n が 5 の倍数でないとき，n^2 は (5 の倍数) ± 1 である」ことを示すことによって，上記の命題が真であることを証明せよ．
(c) $\sqrt{5}$ は有理数でないことを，背理法によって証明せよ．
(奈良大・社会, 類題)

18

問題 [rank B]

50 人のクラスのなかに，海外旅行をしたことのある人は 35 人，英語を話せる人は 20 人いた．このとき，英語は話せるが海外旅行はしたことが無い，という人は多くとも $\boxed{}\boxed{}$ 人しかいない．また，英語は話せないが海外旅行はしたことがある，という人は少なくとも $\boxed{}\boxed{}$ 人，多くとも $\boxed{}\boxed{}$ 人いる．
(埼玉工大・人社, 類題)

19

問題 [rank B]

実数 a に関する条件 p, q, r を次のように定める．

$$\begin{aligned} p &: a^2 \geqq 2a+8 \\ q &: a \leqq -2 \text{ または } a \geqq 4 \\ r &: a \geqq 5 \end{aligned}$$

(1) 次の $\boxed{}$ に当てはまるものを，下の⓪〜③のうちから一つ選べ．q は p であるための $\boxed{}$.
⓪　必要十分条件である
①　必要条件であるが，十分条件ではない
②　十分条件であるが，必要条件ではない
③　必要条件でも十分条件でもない
(2) 条件 q の否定を $\bar{q}$，条件 r の否定を $\bar{r}$ で表す．
次の $\boxed{}$ に当てはまるものを，下の⓪〜③のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．
命題「p ならば $\boxed{}$」は真である．
命題「$\boxed{}$ ならば p」は真である．
⓪ q かつ $\bar{r}$　① q または $\bar{r}$　② $\bar{q}$ かつ $\bar{r}$　③ $\bar{q}$ または $\bar{r}$
(センター試験・数学 IA, 類題)

20

問題 [rank B]

次の (1)〜(6) の文中の空欄にあてはまるものを下の選択肢①〜④のうちから 1 つ選び，番号で答えよ．文中 x, y はともに実数とする．
(1) 「$x > 0$」は「$x \geqq 0$」のための $\boxed{}$.
(2) 「$x = 0$」は「$x^2 + y^2 = 0$」のための $\boxed{}$.
(3) 「$xy = 0$」は「$x = 0$ かつ $y = 0$」のための $\boxed{}$.
(4) 「$x^2 + y^2 = 1$」は「$x + y = 0$」のための $\boxed{}$.
(5) 「すべての x について $xy = 0$ である」は「$y = 0$」のための $\boxed{}$.
(6) 「$(xy)^2$ が無理数である」は「x または y が無理数である」のための $\boxed{}$.
(選択肢)
① 必要十分条件である
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要条件であるが十分条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない
(慶応大・環境情報, 類題)

21

問題 [rank B]

7 で割った余りが k となるような整数の集合を C_k ($k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$) とする．いま $a,\ b$ をそれぞれ $C_2,\ C_3$ に属する整数とする．このとき，$(ab)^n$ が属する集合 C_k の k は，$n = 829$ のとき $k = {}^{ア}\boxed{}$ となり，$n = 830$ のとき $k = {}^{イ}\boxed{}$ となる．
(拓殖大・外国語, 類題)

22

問題 [rank C]

(a) 平面上の 2 点 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$ に対して，多項式 $(aX + b)(cX + d)$ を $X^2 - X + 1$ で割った余りが $mX + n$ であるとき，$m,\ n$ を $a,\ b,\ c,\ d$ で表せ．なお，点 $(m,\ n)$ を $(a,\ b) \odot (c,\ d)$ と表すことにする．
(b) 平面上の点 $(a,\ b)$ を考える．任意の点 $(m,\ n)$ に対して，$(m,\ n) = (a,\ b) \odot (x,\ y)$ となるような点 $(x,\ y)$ の存在するための $(a,\ b)$ に関する条件を求めよ．また，存在する場合に，$(x,\ y)$ を $a,\ b,\ m,\ n$ で表せ．
(三重大・理系, 類題)

23

問題 [rank C]

a, b を $a>b$ なる実数とする．以下の 2 つの命題 P，Q を考える．

命題 P: 連立方程式 $\begin{cases} ax+by=a+b \\ x+y=1 \end{cases}$ の解 x, y はともに 0 以上である．

命題 Q: 連立不等式 $\begin{cases} ax+y \leqq 0 \\ bx+y \leqq 0 \end{cases}$ を満たす任意の数 x, y に対して，$(a+b)x+y \leqq 0$ が成立する．

(a) P が成り立つために a, b が満たすべき条件を求めよ．
(b) 「P ならば Q である」が成り立つことを証明せよ．
(c) 「Q ならば P である」が成り立つことを証明せよ．
(甲南大・理, 類題)

24

問題 [rank C]

あるマラソン選手は出発地点から 40 km の地点までをちょうど 2 時間で走った．このとき，途中のある 3 分間でちょうど 1 km の距離を進んだことを説明せよ．
(信州大・理, 医, 類題)

25

問題 [rank C]

(1) $\sqrt{6}$ が無理数であることを証明せよ．
(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ．

26

問題 [rank C]

以下の各命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を示せ．
(1) $x<y$ ならば $x^2<y^2$
(2) $\log_2 x = \log_3 y$ ならば $x \leqq y$ である．
(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる．
(4) n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある．
(広島大・経，教育, 類題)

2 次の関数・方程式の問題

4）2 次の関数・方程式

関数

2 つの変数 x, y に対して, x の値を与えるとこれに対応する y の値がただ 1 つに定まるとき, この x から y を定める規則のことを**関数**という (y は x の関数と呼ばれる).
また, x は**独立変数**, y は**従属変数**と呼ばれる.
特に, x の 1 次式で表される関数を 1 **次関数**といい,

$y = ax + b \quad (a, b$ は定数$, a \neq 0)$ を 1 次関数の**一般形**という.

また, x の 2 次式で表される関数を 2 **次関数**といい,

$y = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c$ は定数$, a \neq 0)$ を 2 次関数の**一般形**という.

関数の記号

x の関数 y を記号で $y = f(x)$ と表すことがある. $f(x)$ の x に a を代入した値を $f(a)$ で表す.
独立変数 x の範囲を**定義域**, 従属変数 y の範囲を**値域**という.

例題 [1]

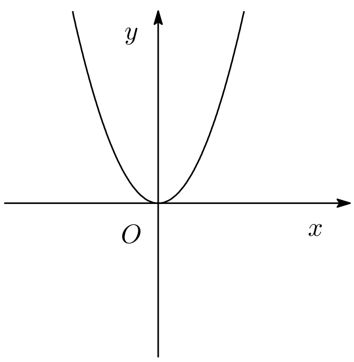
2 次関数 $f(x) = 2x^2 - x + 3$ について, 次の値を求めよ.
(1) $f(-1)$ の値を求めよ.
(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ.

解答例：(1) $f(-1) = 2(-1)^2 - (-1) + 3 = 6.$ (2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 3 = 3.$

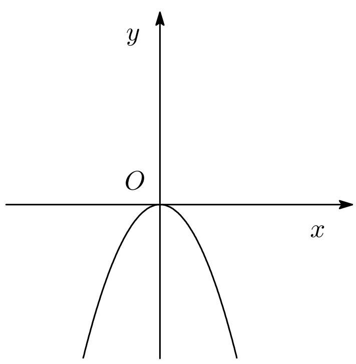
2 次関数のグラフ

2 次関数 $y = ax^2$ のグラフは $a > 0$ のとき下に凸, $a < 0$ のとき上に凸である.

$a > 0$ のとき



$a < 0$ のとき



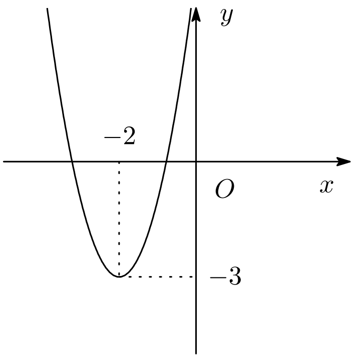
2 次関数の標準形

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は**平方完成**により $\boxed{y = a(x-p)^2 + q}$ の形に変形でき, この形を 2 次関数の**標準形**という. この標準形の 2 次関数のグラフは $y = ax^2$ を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動したグラフであり, $y = a(x-p)^2 + q$ の頂点は (p, q), 軸は $x = p$ である.

例題 [2]

2 次関数 $y = 2x^2 + 8x + 5$ について, 次の問に答えよ.
(1) 2 次関数を平方完成し, 頂点, 軸を答えよ.
(2) 2 次関数の値域を求めよ.
(3) 2 次関数のグラフを描け.

解答例：(1) $y = 2x^2 + 8x + 5 = 2(x^2 + 4x) + 5 = 2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 5 = 2(x+2)^2 - 3$. よって, 頂点は $(-2, -3)$, 軸は $x = -2$. (2) $y \geqq -3$
(3)



例題 [3]

2 次関数 $y = -x^2 + 4x$ について, 次のように移動させてできるグラフの方程式を答えよ.
(1) x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 平行移動させたグラフの方程式.
(2) y 軸に関して対称移動させたグラフの方程式.
(3) x 軸に関して対称移動させたグラフの方程式.

解答例： $y = -(x-2)^2 + 4$ なので, 与えられた関数の頂点は $(2, 4)$ である. (1) 頂点 $(2, 4)$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 平行移動させると頂点は $(4, 3)$ にうつる. よって, 求める方程式は $y = -(x-4)^2 + 3$. (2) 頂点 $(2, 4)$ を y 軸対称に移動させると頂点は $(-2, 4)$ にうつる. よって, 求める方程式は $y = -(x+2)^2 + 4$. (3) 頂点 $(2, 4)$ を x 軸対称に移動させると頂点は $(2, -4)$ にうつる. グラフの凹凸も逆になることに注意して, 求める方程式は $y = (x-2)^2 - 4$.

例題 [4]

次の条件を満たす 2 次関数の方程式を求めよ.
(1) 点 $(1, 1)$ を頂点に持ち, 点 $(2, 5)$ を通る 2 次関数.
(2) $x = 1$ を軸に持ち, 原点と点 $(3, 5)$ を通る 2 次関数.
(3) x 軸上に頂点を持ち, 2 点 $(-5, 4)$, $(1, 1)$ を通る 2 次関数.
(4) 3 点 $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(5, -4)$ を通る 2 次関数.

解答例： (1) $y = a(x-1)^2 + 1$ が点 $(2, 5)$ を通るので $a = 4$. よって, $y = 4(x-1)^2 + 1$. (2) $y = a(x-1)^2 + q$ が原点と点 $(3, 5)$ を通るので $\begin{cases} 0 = a + q \\ 5 = 4a + q \end{cases}$ により $a = \dfrac{5}{3}$, $q = -\dfrac{5}{3}$. よって, $y = \dfrac{5}{3}(x-1)^2 - \dfrac{5}{3}$. (3) $y = a(x-p)^2$ が点 $(-5, 4)$ と $(1, 1)$ を通るので $\begin{cases} 4 = a(-5-p)^2 \\ 1 = a(1-p)^2 \end{cases}$ に

より $(a,p)=\left(\dfrac{1}{4},-1\right)$, $\left(\dfrac{1}{36},7\right)$. よって, $y=\dfrac{1}{4}(x+1)^2, y=\dfrac{1}{36}(x-7)^2$.　(4) $y=ax^2+bx+c$ に 3 点を代入し, $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=2 \\ 25a+5b+c=-4 \end{cases}$ により $a=-1,\ b=5,\ c=-4$. よって, $y=-x^2+5x-4$.

例題 [5]

2 次関数 $y=x^2-2x-1$ の範囲 $a-1 \leqq x \leqq a+1$ における最大値, 最小値を求めよ.

解答例：$y=(x-1)^2-2$ により, 最大値は両端における値の内の大きい方だが, 最小値は定義域が 1 を含むときそこでの値 -2 となる. よって

$a<0$ のとき, 最大値 a^2-4a+2 ($x=a-1$ のとき),　最小値 a^2-2 ($x=a+1$ のとき).
$0 \leqq a<1$ のとき, 最大値 a^2-4a+2 ($x=a-1$ のとき),　最小値 -2 ($x=1$ のとき).
$a=1$ のとき, 最大値 -1 ($x=0,2$ のとき),　最小値 -2 ($x=1$ のとき).
$1<a \leqq 2$ のとき, 最大値 a^2-2 ($x=a+1$ のとき),　最小値 -2 ($x=1$ のとき).
$a>2$ のとき, 最大値 a^2-2 ($x=a+1$ のとき),　最小値 a^2-4a+2 ($x=a-1$ のとき).

判別式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ や 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ について, $D=b^2-4ac$ を**判別式**という.
判別式と 2 次方程式の間には次の性質が成り立つ.

$D>0 \Longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$ は異なる 2 つの実数解を持つ.
$D=0 \Longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$ は 2 重解 (実数解) を持つ.
$D<0 \Longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$ は異なる 2 つの虚数解を持つ.

また, 判別式と 2 次関数の間には次の性質が成り立つ.

$D>0 \Longleftrightarrow y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と 2 点で交わる.
$D=0 \Longleftrightarrow y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と 1 点で接する.
$D<0 \Longleftrightarrow y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と交わらない.

例題 [6]

2 次関数 $y=2x^2+4x+1$ について次の問に答えよ.
(1) x 軸との共有点の数を答えよ.
(2) 直線 $y=x-\dfrac{1}{2}$ との共有点の数を答えよ.
(3) 直線 $y=-2x+b$ が接線となる定数 b を定めよ.

解答例：(1) $D=8>0$ より, x 軸との交点は 2 個.　(2) $2x^2+4x+1=x-\dfrac{1}{2}$ により $2x^2+3x+\dfrac{3}{2}=0$. この式の判別式が $D=-3<0$ を満たすので交点はなし.　(3) $2x^2+4x+1=-2x+b$ により $2x^2+6x+(1-b)=0$. この式の判別式が $D=28+8b=0$ となる b を求めて $b=-\dfrac{7}{2}$.

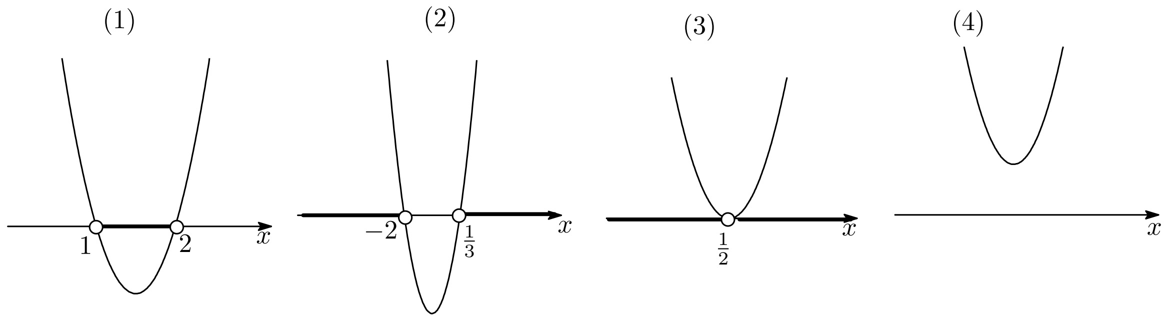
例題 [7]

次の 2 次不等式を解け.

(1) $x^2-3x+2<0$ (2) $3x^2+5x-2>0$

(3) $4x^2-4x+1\geqq 0.$ (4) $2x^2-3x+2<0.$

解答例：(1) $(x-1)(x-2)<0$ からグラフで x 軸より下の範囲を求め, $1<x<2.$ (2) $(3x-1)(x+2)>0$ より $x<-2,\ \dfrac{1}{3}<x.$ (3) $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geqq 0$ より, すべての実数が解となる. (4) $2x^2-3x+2=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}<0$ より, 解はない.



判別式による別解：(3) 判別式 $D=0$ で, x 軸に接し下に凸のグラフなのですべての実数が解である. (4) $D=-7$ で, x 軸と共有点を持たず下に凸のグラフなので解なし.

2 次方程式と解の公式

整理すると $ax^2+bx+c=0$ $(a,\,b,\,c$ は定数, $a\neq 0)$ と変形できる方程式を 2 **次方程式**といい, この解は次のように表すことができる.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

これは 2 次方程式の**解の公式**と呼ばれる. 特に 2 次方程式が $ax^2+2b'x+c=0$ の形を持つとき

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

を利用しても良い.

例題 [8]

次の 2 次方程式を解け.

(1) $12x^2+x-6=0$ (2) $x^2+\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{6}=0$

(3) $9x^2-24x+16=0$ (4) $3x^2+5x+1=0$

解答例：(1) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{289}}{24}=-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{2}{3}$ (2) $6x^2+x-1=0$ に解の公式を利用すると $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{12}=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}.$ (3) $x=\dfrac{12\pm\sqrt{144-144}}{9}=\dfrac{4}{3}.$ (4) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{6}.$

複素数

解の公式を利用すると根号の中が負の数になることがある. そこで, 2 乗して負になるものも ‘新し

い数' とみなすことで, 数の概念を実数から拡張でき, また全ての 2 次方程式に解を与えられる.
"i を 2 乗すると -1 になる数" と定め, この i を**虚数単位**という.
このとき, $-i$ も 2 乗すると -1 になる数であり, 解の公式などで根号の中が負の数になる場合も虚数単位を用いて次のように解を表すことができる.

$$2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i, \quad \frac{1 \pm \sqrt{-2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{2}, \quad \frac{3 \pm \sqrt{-4}}{6} = \frac{3 \pm 2i}{6}.$$

実数 a, b に対して, $a + bi$ の形の数を**複素数**という. $b = 0$ のとき通常扱う実数に一致し, $b \neq 0$ のとき**虚数**と呼ぶ. 特に, $a = 0$ かつ $b \neq 0$ のとき**純虚数**という.

例題 [9]

次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2 + x + 1 = 0$ (2) $2x^2 - 4x + 3 = 0$ (3) $2x^2 - 3x + 3 = 0$

解答例：(1) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (2) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}i}{2}$ (3) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{15}i}{4}$

例題 [10]

次の 2 次方程式の解を判別せよ. ただし b, c は実数の定数とする.

(1) $x^2 - 3x + 3 = 0$ (2) $2x^2 + 4x + c = 0$ (3) $x^2 + bx + 1 = 0$

解答例：(1) $D = -3 < 0$ より, 2 次方程式は異なる 2 つの虚数解をもつ. (2) $D = 16 - 8c$ により, $c < 2$ のとき異なる 2 つの実数解. $c = 2$ のとき 2 重解. $c > 2$ のとき異なる 2 つの虚数解をもつ. (3) $D = b^2 - 4 = (b + 2)(b - 2)$ により, $b < -2,\ 2 < b$ のとき異なる 2 つの実数解. $b = \pm 2$ のとき 2 重解. $-2 < b < 2$ のとき異なる 2 つの虚数解.

例題 [11]

次の複素数を計算せよ. ただし, $a + bi$ (a, b は実数) の形で答えること.

(1) $(2 + i)(1 - i)$ (2) $\dfrac{3 - i}{2 + 3i}$

(3) $(i - 2)^3$ (4) $\dfrac{3 + 2i}{(1 - i)^2}$

解答例：(1) $2 - i - i^2 = 3 - i$. (2) $\dfrac{(3 - i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \dfrac{3}{13} - \dfrac{11}{13}i$. (3) $-2 + 11i$. (4) $\dfrac{-2 + 3i}{2} = -1 + \dfrac{3}{2}i$.

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

が成り立つ. この 2 式を 2 **次方程式の解と係数の関係**という.

例題 [12]

2 次方程式 $2x^2 + 5x + 1 = 0$ の解を α, β とするとき, 次の値を求めよ.

(1) $\alpha + \beta$ (2) $\alpha\beta$ (3) $\alpha^2 + \beta^2$ (4) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$ (5) $\alpha - \beta$

解答例：(1) $\alpha+\beta=-\dfrac{5}{2}$. (2) $\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$. (3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\dfrac{21}{4}$.
(4) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-5$. (5) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta=\dfrac{17}{4}$ により, $\alpha-\beta=\pm\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

A 問題

1 2 次関数 $y=2x^2+6x+3$ を次のように移動させたグラフの方程式を求めよ.

(1) x 軸方向に 4 だけ平行移動させたグラフ.

(2) x 軸方向に -2, y 軸方向に 3 だけ平行移動させたグラフ.

(3) x 軸に関して対称　(4) y 軸に関して対称　(5) 原点に関して対称

2 次の 2 次関数の頂点の座標を求め, グラフをかきなさい.

(1) $y=-x^2+2x$　(2) $y=3x^2+x-2$　(3) $y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+3$

(4) $y=-2x^2-8x-4$　(5) $y=-x^2+5x+1$　(6) $y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{2}x$

3 次の条件を満たす 2 次関数の方程式を求めよ.

(1) $(-1,0)$ を頂点に持ち, y 切片が 2 の 2 次関数.

(2) $x=1$ を軸にもち, y 切片が 3, 点 $(3,6)$ を通る 2 次関数.

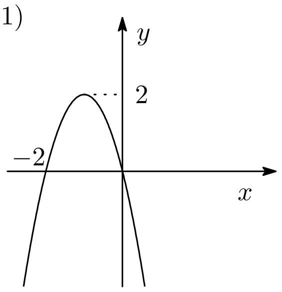
(3) x 軸と 2 点 $(3,0)$, $(-2,0)$ で交わり切片が -3.

(4) 直線 $y=x$ 上に頂点を持ち, 2 点 $(-1,1)$, $(0,10)$ を通る 2 次関数.

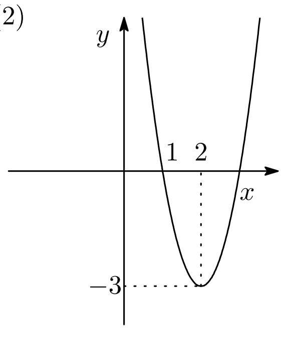
(5) 3 点 $(-1,8)$, $(1,2)$, $(2,5)$ を通る 2 次関数.

4 次のグラフに対応する 2 次関数の方程式を求めよ.

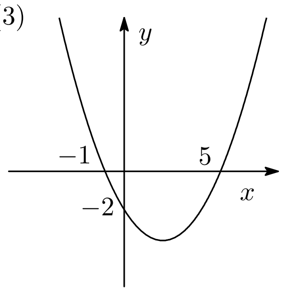
(1)



(2)



(3)



5 次の定義域における 2 次関数 $y=-x^2+3x-1$ の最大値, 最小値を求めよ.

(1) $0\leqq x\leqq 2$　(2) $-1\leqq x\leqq 1$　(3) $x<3$　(4) $x>3$　(5) $2\leqq x\leqq 5$

6 次の各問いに答えよ.

(1) 周の長さが 30 [cm] の長方形について, 長方形の面積が最大になるのはいつか. またそのときの最大値を答えよ.

(2) 一定の幅 a のトタン板の両端から同じ長さのところを直角に折り曲げて「とい」を作る. 断面積を最大にするにはどうすればよいか. また断面積が $a^2/10$ になるためにはどうすればよいか.

(3) 1 個 100 円のお菓子を 1 日あたり 300 個売る駄菓子屋がある．このお菓子に関して 1 個あたり 1 円を値上げすると, 1 日あたりの売り上げが 2 個減るという．お菓子の価格をいくらにすると最も売上額が高くなるか答えよ．また, このときの 1 日の売り上げを答えよ．

7 次の各組の 2 つの曲線（または直線）のグラフの共有点の個数を調べ, 共有点があるときはその座標を求めよ．

(1) $y = x^2 - 10x + 1$ と x 軸　(2) $y = -3x^2 + x + 1$ と $y = -4x + 3$　(3) $\begin{cases} y = 2x^2 - x - 3 \\ y = -x^2 - 7x - 6 \end{cases}$

8 2 次関数 $y = x^2 - 6x + 4$ と直線 $y = kx$ について

(1) 2 次関数と直線が接するときの定数 k の値を定め, また接点の座標を求めよ．

(2) 定数 k が変化するとき, 2 次関数と直線の共有点の個数が k の値によってどのように変わるかを答えよ．

9 次の 2 次不等式を解きなさい．

(1) $20x^2 + 7x - 3 \leqq 0$　(2) $-x^2 + 2x + 1 < 0$　(3) $\dfrac{x+1}{2} \leqq x^2$

(4) $9x^2 - 30x + 25 \leqq 0$　(5) $2x^2 - 3x + 2 < 0$　(6) $x^2 + 3x + \dfrac{9}{4} \geqq 0$

10 次の連立不等式の解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ (3x+4)(2x-1) \leqq 0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 8x - 11 < 0 \\ (2x-1)^2 > 3 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} 1 \geqq 5x^2 \\ 2x + 1 \leqq 0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 4x^2 - 12x + 9 \leqq 0 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} \geqq \dfrac{x-1}{6} \end{cases}$　(5) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geqq 0 \\ 3x^2 - 8x - 3 \leqq 0 \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x^2 < 4 \\ 6x^2 + x - 2 \geqq 0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 2 \leqq 0 \end{cases}$　(8) $\begin{cases} x^2 - 2x - 1 > 0 \\ x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases}$　(9) $\begin{cases} 4x^2 \geqq 3x \\ 8x^2 - 2x - 3 \leqq 0 \end{cases}$

11 次の複素数を計算せよ．

(1) $3(1+2i) - 2(2-i)$　(2) $(1-i)(3+2i)$　(3) $5i^5 + 4i^4 + 3i^3 + 2i^2 + i$

(4) $\sqrt{-8} - \sqrt{-2}$　(5) $\sqrt{-3} \times \sqrt{-27}$　(6) $(-\sqrt{-12})^3$

(7) $\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{2}}$　(8) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-4}}$　(9) $\dfrac{2}{1-i}$

(10) $\dfrac{1-\sqrt{-4}}{2+\sqrt{-9}}$　(11) $\dfrac{1}{(1+i)^2}$　(12) $\dfrac{1}{3+4i} + \dfrac{1}{3-4i}$

(13) $(3-2i)^3$　(14) $\dfrac{i}{(2-i)^2}$　(15) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3$

12 $\alpha = 1 + 3i,\ \beta = 2 - i$ のとき, 次の複素数を計算せよ．

(1) $2\alpha - \beta$　(2) $\alpha\beta$　(3) β^4　(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}$　(5) $\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$　(6) $\dfrac{\alpha + 2\beta}{\alpha^2}$

13 次の 2 次方程式を解きなさい.

(1) $x^2-3x+1=0$　(2) $2x^2+4x+3=0$　(3) $36x^2-3x-5=0$

(4) $2.5x^2-3x+2.5=0$　(5) $3(x-1)^2=5(x-1)+2$　(6) $x^2+2ax+a^2-b^2=0$

14 判別式を用いるなどで, 次の問いに答えよ.

(1) 2 次方程式 $2x^2-5x+3=0$ の解を判別せよ.

(2) 2 次方程式 $x^2-3x+2+a=0$ が実数解を持つような定数 a の値の範囲を求めよ.

(3) 2 次方程式 $x^2-4mx+m+3=0$ が 2 重解を持つように定数 m の値を定め, またそのときの解を求めよ.

15 2 次方程式 $3x^2+x+2=0$ の解を α, β とするとき, (1)〜(5) の値を求めよ. また (6)〜(8) の値を 2 つの解に持つ 2 次方程式を作りなさい.

(1) $\alpha^2+\beta^2$　(2) $\alpha^3+\beta^3$　(3) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$　(4) $\alpha-\beta$

(5) $\dfrac{\beta}{\alpha}-\dfrac{\alpha}{\beta}$　(6) $\dfrac{1}{\alpha}$ と $\dfrac{1}{\beta}$　(7) α^2 と β^2　(8) $\alpha+2$ と $\beta+2$

16 次の式を実数係数の範囲で因数分解せよ.

(1) $3x^2-y^2$　(2) $2x^2-4x+1$　(3) $6x^2-xy-12y^2$

(4) $9x^2-12x-1$　(5) $x^2+2xy-y^2$　(6) $2x^2-3xy+y^2-3x+y-2$

B 問題

17 次の関数の最大値と最小値を求めよ.

(1) $x-y=2$ のとき, $z=x^2+y^2$ の最大値, 最小値.

(2) $3x+4y=12$ のとき, $z=xy$ の最大値, 最小値.

(3) $y^2=2x-3$ のときの x^2+y^2 の最大値, 最小値.

(4) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}=1$ のときの x^2+2y^2 の最大値, 最小値.

18 地上から初速 v_0[m/s] で真上に投げ上げられたボールの t 秒後の高さは $h(t)=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ [m] で与えられる（v_0, g は正の定数）.

(1) $h(t)$ の右辺を平方完成することにより, ボールが最高点に達する時刻とその高さを求めよ.

(2) $v_0=20,\ g=10$ のとき, ボールが最高点に達する時刻とその高さを求めよ.

(3) $v_0=20,\ g=10$ のとき, ボールが高さ 10[m] 以上 15[m] 以下にある時刻 t の範囲を求めよ.

19 関数 $y=-2(x^2+2x-1)^2+8(x^2+2x-1)+3$ について, 次の問に答えよ.

(1) $t=x^2+2x-1$ とおき, t のとりうる範囲を求めよ.

(2) y の最大値, 最小値を求めよ.

20 次の関数のグラフをかきなさい.

(1) $y = |x^2 - 2x - 3|$　　(2) $y = -x^2 + 4|x|$　　(3) $y = x^2 - 2|x - 1|$

21 2 次関数 $y = -x^2 + 2(p-2)x + 3$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値, 最小値を定めよ.

22 関数 $y = ax^2 + (1-2a)x + a$ について, 次が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ.

(1) x 軸と共有点を持つとき.

(2) 直線 $y = x + 3$ と交点を持つとき.

(3) 第 3 象限, 第 4 象限を通らないとき.

23 半径 2 の半円に内接する長方形を考える. 長方形の面積が最大になるのはどんなときか答えよ.

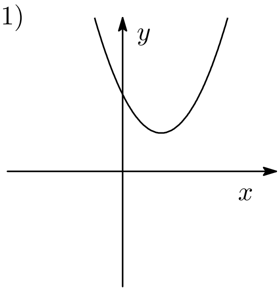
24 直線 $4x + 3y = 10$ について, 次に答えよ.

(1) 原点と直線との距離が最短になる直線上の点とそのときの距離を求めよ.

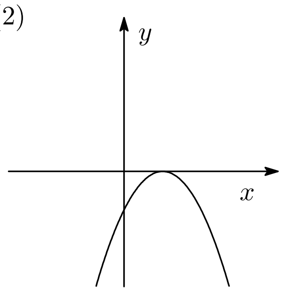
(2) 点 $(1, 3)$ との距離が最短になる直線上の点とそのときの距離を求めよ.

25 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の判別式を D とする. グラフが次の形を持つときの a, b, c, D の符号を定めよ. ただし, 答は正, 負または 0 である.

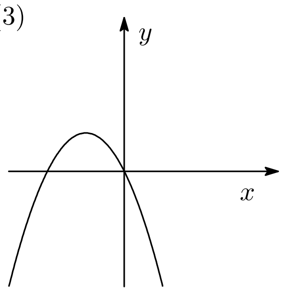
(1)



(2)



(3)



26 次の各問いに答えよ.

(1) 2 次関数 $y = 2x^2$ を x 軸方向にだけ平行移動させて直線 $y = 2x - 2$ と接するようにしたい. いくつ平行移動させればよいか. また y 軸方向にだけ平行移動させる場合はどうか.

(2) 2 次関数 $y = -x^2 + 2ax + b$ のグラフを x 軸方向に 3, y 軸方向に -2 だけ平行移動させると $y = -x^2 + 4x - 1$ に一致した. a, b の値を求めよ.

27 2 次関数 $y = 3x^2 + 2x + 1$ について, 次の問に答えよ.

(1) この 2 次関数と同じ頂点を持ち, y 切片が 2 の 2 次関数を求めよ.

(2) 原点を通る接線の方程式を求めよ.

(3) 点 $(-1, 2)$ における接線の方程式を求めよ.

28 次の条件を満たすような実定数 a の値の範囲を求めよ.

(1) 全ての実数 x について不等式 $ax^2+4x+a+3>0$ が成り立つ.

(2) 不等式 $x^2-2ax+6a+4 \leqq 0$ が解を持たない.

(3) 不等式 $ax^2-2x+a>0$ が解を持つ.

(4) 全ての実数 x について不等式 $ax^2+ax+\dfrac{1}{a} \leqq 0$ が成り立つ.

(5) 2 次関数 $y=ax^2$ のグラフが直線 $y=(a+1)x-2$ より常に上側にある.

29 複素数の共役についての性質 (1) を示し, それを用いて 2 次方程式の解の共役性 (2) を証明せよ.

(1) 2 つの複素数 z, w に対して $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$, $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$ を示せ.

(2) 実数係数の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の一つの解が $p+qi$ (p, q は実数) であるなら, その共役複素数 $p-qi$ も解になることを証明せよ.

30 次の等式を満たす実数 x, y を求めよ.

(1) $(1-i)x+(1+i)y=i$ (2) $(1+2i)x-(3+4i)y=5+6i$ (3) $(2-i)x^2-3(1-i)x-2(1+i)=0$

31 次の 2 次方程式を解きなさい. ただし, 2 重根号をはずして答えること.

(1) $\dfrac{1}{2}x^2+2x-\sqrt{3}=0$ (2) $2x^2-2\sqrt{5}x+\sqrt{6}=0$ (3) $\sqrt{a}x^2+x+\dfrac{\sqrt{1-a}}{2}=0$ $(0<a<1)$

32 次の方程式の解を判別せよ（2 次方程式の解が, 各定数 a, b, k の値によってどのように変わるかを調べよ）. ただし, a, b, k は実定数とする.

(1) $ax^2+3x-4=0$ (2) $2x^2-bx-3=0$ (3) $kx^2+kx+2=0$

33 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）の解 α, β について, 次の問に答えよ.

(1) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ を求めよ.

(2) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ を解に持つ 2 次方程式を求めよ. ただし, 2 次の項の係数は 1 にすること.

(3) (2) で定めた 2 次方程式が重解をもつための条件を a, b, c を用いて表せ.

34 2 次方程式 $x^2+4mx-2x+4m^2-4=0$ が次の解をもつように定数 m の値の範囲を定めよ.

(1) 実数解 (2) 1つが正, 1つが負の解 (3) 2つの正の解

C 問題

35

問題 [rank A]

2 つの 2 次関数 $y = 2x^2 - 3(a+1)x + 3a + 4$ と $y = -x^2 + (a-3)x + 1$ について, 次の問に答えよ.

(1) 2 つの 2 次関数のグラフが接するような定数 a の値を定めよ.

(2) (1) のとき, 2 つの 2 次関数の接点における接線の方程式を求めよ.

36

問題 [rank A]

2 次関数 $y = -3x^2 + 5x - 1$ に点 $(0, 5)$ から接線をひくとき, 接点の x 座標を α, β とする. 次の問に答えよ.

(1) $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ の値を求めよ.

(2) 上を利用して $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^3 + \beta^3$, $\alpha^4 + \beta^4$ を求めよ.

(3) $\alpha^n + \beta^n$ を求めよ.（ただし n は自然数とする.）

37

問題 [rank A]

2 次関数 $y = 3x^2 + px + 3 - p$ について次の問に答えよ.

(1) 頂点の座標を定数 p を用いて表せ.

(2) 頂点の描く軌跡を求めよ.

(3) 頂点が第 1 象限内にあるような定数 p の範囲を求めよ.

38

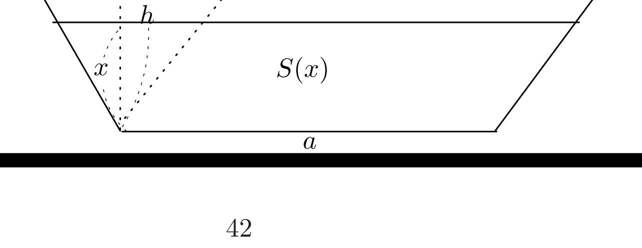
問題 [rank B]

平行な 2 辺の長さが a と b, 高さが h の台形がある. $a \leqq b$ と仮定して以下の問に答えよ.

(1) 底辺 a からの高さが x である（底辺に）平行な直線は元の台形を 2 つの台形に分割するが, そのうち a を含む側の方の面積を $S(x)$ とする. 関数 $S(x)$ $(0 \leqq x \leqq h)$ を求めよ.

(2) $S(x)$ の値が元の台形の面積 $S(h)$ の半分となる x を求めよ.

(3) (2) の解 x に対する分割線の長さを求めよ.



39

問題 [rank B]

2 次関数 $y = -2x^2 + 2(1-p)x + \dfrac{3}{2}p - \dfrac{7}{2}$ について次の問に答えよ.

(1) 頂点の座標を定めよ.

(2) 頂点が第 2 象限にあるような定数 p の範囲を求めよ.

(3) x 軸と正と負で交わるような定数 p の範囲を求めよ.

(4) x 軸の負の範囲と 2 点で交わるような p の範囲を求めよ.

40

問題 [rank B]

少なくとも一つは 0 でない実数の定数 a, b, c を係数にもつ x, y の斉次 2 次式 $ax^2+2bxy+cy^2$ に対し, 以下の問に答えよ.

(1) $b^2 - ac = 0$ の場合には平方式で表せる．その表示を求めよ.

(2) $b^2 - ac > 0$ の場合には実数係数の範囲で因数分解できる．その分解を求めよ.

41

問題 [rank B]

正五角形の 5 本の対角線で囲まれる小さな正五角形を考える．大 : 小の二つの正五角形の相似比を求めよ.

42

問題 [rank B]

2 次方程式 $x^2 - x + 2 = 0$ の解を α, β とする.

(1) $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ を求めよ.

(2) α^2, α^3, α^4 を α に関する 1 次式により表せ.

(3) $\alpha^5 - 2\alpha^4 - 4\alpha^2 - \alpha$ の値を求めよ.

様々な関数の問題

5) 様々な関数

関数の基本

(1) 関数の一般的な定義：集合 A と集合 B があって, 集合 A の各要素 x に集合 B のある要素 y を対応させることを**関数**という.
(2) x の関数 y をよく記号で $y = f(x)$ と表す. 関数 $y = f(x)$ において, $f(x)$ が定義されている x の範囲を**定義域**といい, それに対応する y の範囲を**値域**という.
(3) 関数 $y = f(x)$ に対し, $x = a$ に対応する y の値を $f(a)$ と記す.
(4) 関数 $y = f(x)$ と関数 $y = g(x)$ があり $g(x)$ の値域が $f(x)$ の定義域に含まれる場合, 関数 $y = f(g(x))$ が考えられる. これを f と g の**合成関数**と言い $f \circ g$ と記す.

関数のグラフと移動

(1) $y = f(x - a)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向へ a 移動したものである.
(2) $y = f(x) + b$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを y 軸方向へ b 移動したものである.
(3) $y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを y 軸に関して対称に移動したものである.
(4) $y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称に移動したものである.
(5) $y = -f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを原点に関して対称に移動したものである.

１次分数関数

(1) $y = \dfrac{cx + d}{ax + b}$ は１次分数関数と呼ばれる.
(2) $\boxed{y = \dfrac{r}{x - p} + q}$
は**１次分数関数の標準形**と呼ばれる. これは $x = p,\ \ y = q$ を漸近線とする双曲線となる.
(3) どんな１次分数関数も標準形に変形できる.

無理関数

(1) $y = \sqrt{ax + b} + d$ のように無理式で定義されている関数を**無理関数**と呼ぶ.

逆関数

(1) 関数 $y = f(x)$ に対して, y から x を求める式を得ることができたとき, それを $x = f^{-1}(y)$ と記す. $y = f^{-1}(x)$ を関数 $y = f(x)$ の**逆関数**という.
(2) 逆関数のグラフと元の関数のグラフは 直線 $y = x$ に関して対称である.

例題 [1]

$f(x)=x^2,\ g(x)=3x+2,\ h(x)=x^3+3x$ とする.
(1) $f(1),\ g(2),\ h(-1)$ をそれぞれ求めよ.
(2) $h(x-a)$ を求めよ.
(3) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ を求めよ.
(4) $(f\circ g)(2)$ を求めよ.

解答例：(1) $1,\ 8,\ -4$ (2) $(x-a)^2$ (3) $f(g(x))=f(3x+2)=(3x+2)^2$ (4) 64

例題 [2]

次の関数の値域を求めよ. また定義域が明示されていないときはその関数が計算できる範囲を定義域として考え, 定義域も求めよ.
(1) $f(x)=3x+1,\ -1\leqq x\leqq 1$
(2) $f(x)=x^2,\ -1\leqq x\leqq 1$
(3) $f(x)=\sqrt{x-1}$
(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

解答例：(1) $-2\leqq y\leqq 4$ (2) $0\leqq y\leqq 1$ (3) $x\geqq 1,\ y\geqq 0$ (4) x, y とも 0 以外の全実数

例題 [3]

関数 $y=x^2+2x$ のグラフを以下のように移動するとどのような式の関数のグラフになるかをそれぞれ求めよ.
(1) x 軸方向に 3 平行移動する.
(2) y 軸に関して対称移動する.
(3) x 軸に関して対称移動する.
(4) x 軸方向に -2, y 軸方向に 5 だけ平行移動する.

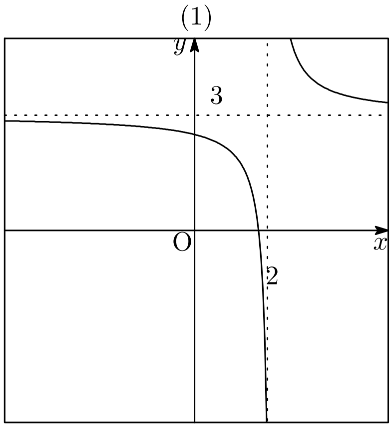
解答例：(1) $y=x^2-4x+3$ (2) $y=x^2-2x$ (3) $y=-x^2-2x$ (4) $y=x^2+6x+13$

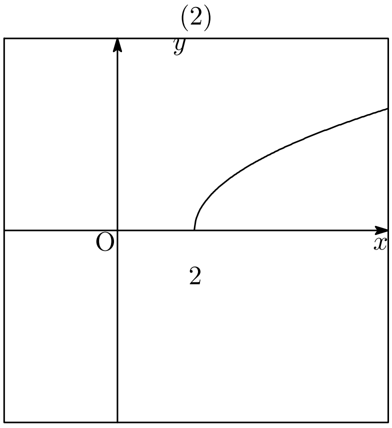
例題 [4]

次の各関数のグラフを書きなさい. また漸近線があれば明示しなさい.
(1) $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$
(2) $y=\sqrt{2x-4}$

解答例：(1) $\dfrac{3x-5}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+1}{x-2}=3+\dfrac{1}{x-2}$. 従って $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$ のグラフは $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に 3 平行移動したものである. 漸近線は $x=2$ と $y=3$ である。
(2) $\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x-2)}$ より $y=\sqrt{2x-4}$ のグラフは $y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に 2 平行

移動したものになる.





例題 [5]

次の関数の逆関数を求めよ.

(1) $y = 3x + 1$

(2) $y = x^2 \ \ (x < 0)$

解答例：(1) $y = \dfrac{x-1}{3}$.

(2) $y = x^2$ より $x = \pm\sqrt{y}$. $x < 0$ であるので $x = -\sqrt{y}$. x と y を入れ替えて $y = -\sqrt{x}$.

A 問題

1 $f(x) = 3x^2 + x,\ g(x) = 2x - 3$ とするとき, 次の値を求めよ.

(1) $f(1)$ (2) $g(-2)$ (3) $f(x-a)$ (4) $f(g(x))$ (5) $g(f(x))$ (6) $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

2 次の関数の（　）内の定義域に対する値域を求めよ. 定義域が明示されていないときはその関数が計算できる範囲を定義域として考え, 定義域も求めよ.

(1) $f(x) = -x + 2\ (-3 \leqq x \leqq 2)$ (2) $f(x) = \sqrt{x-1}$ (3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(4) $f(x) = x^2 - 2x\ (-1 \leqq x \leqq 2)$ (5) $f(x) = \log_{10} x$ (6) $f(x) = |x|\ (-2 \leqq x \leqq 2)$

3 関数 $y = \dfrac{1}{x+1}$ のグラフを以下のように移動すると, どのような式の関数のグラフになるかをそれぞれ求めよ.

(1) x 軸方向に 2 だけ平行移動する (2) x 軸方向に -2, y 軸方向に 5 だけ平行移動する

(3) x 軸に関して対称移動する (4) y 軸に関して対称移動する

(5) 原点に関して対称移動する (6) 原点を通るように y 軸方向に平行移動する

(7) 直線 $y = x$ に関して対称移動する (8) 直線 $x = 2$ に関して対称移動する

4 次の各関数のグラフを書きなさい.

(1) $y=\dfrac{2x+4}{x+3}$　(2) $y=\dfrac{3x-1}{2x-1}$　(3) $y=|x-1|$　(4) $y=|x^2-2x|$

(5) $y=\sqrt{-x}$　(6) $y=\sqrt{4-x}+1$　(7) $y=-x^3$　(8) $y=x^3+3x^2+3x$

5 次の各関数の逆関数を求めよ.

(1) $y=-3x+5$　(2) $y=2x^2\ (x \geqq 0)$　(3) $y=\dfrac{1}{x-2}$　(4) $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$

(5) $y=\sqrt{x+2}$　(6) $y=1-x^2\ (x \leqq 0)$　(7) $y=2^x$　(8) $y=\log_{10}(x+1)$

6 次の関数は, 偶関数, 奇関数, どちらでもない, のいずれか理由とともに答えよ.

(1) $y=x^2$　(2) $y=x^3$　(3) $y=\dfrac{1}{x-1}$　(4) $y=x+x^2$

(5) $y=|x|$　(6) $y=x^3-2x$　(7) $y=x(x-3x^3)$　(8) $y=\dfrac{x^2}{x+\frac{1}{x}}$

7 次の各組の 2 つのグラフの共有点の座標を求めよ.

(1) $y=2x+5$ と $y=x^2+1$　(2) $y=x-2$ と $y=\sqrt{x}$　(3) $y=x+1$ と $y=-\sqrt{x+7}$

(4) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ と $y=x-3$　(5) $y=|x|$ と $y=-x+1$　(6) $y=|x^2-2x|$ と $y=x$

8 次の方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x+1}$　(2) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4x}{x+1}+3=0$

(3) $\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{x}{2x+4}=\dfrac{1}{x-2}$　(4) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$

(5) $\dfrac{1}{x^3-1}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+x+1}$　(6) $\dfrac{x-4}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-6}{x^2-4}$

9 次の方程式・不等式を解きなさい.

(1) $|2x-3| \leqq 5$　(2) $|4-x|>3$　(3) $|x-4|=3x$　(4) $|x-2| \leqq \dfrac{1}{2}x$

10 不等式 $x+2>\dfrac{6}{x+1}$ を次の方法で解きなさい.

(1) $y=x+2$ と $y=\dfrac{6}{x+1}$ のグラフを同じ座標平面の中にかきなさい.

(2) 2 つのグラフの交点の座標を求めなさい.

(3) グラフを用いて不等式を解きなさい.

B 問題

11 次の各関数のグラフを書きなさい.

(1) $y=\dfrac{2|x|+4}{|x|+3}$　(2) $y=|x-1|+|x-2|$　(3) $y=\sqrt{2x-4}$

(4) $y=\sqrt{x^2}$　(5) $y=\dfrac{1}{x^2}$　(6) $y=x+\dfrac{1}{x}$

12

(1) 関数 $y=x^3$ のグラフにある平行移動を行ったところ, $y=x^3+6x^2+12x+3$ のグラフになった. どのような平行移動を行ったか述べよ.

(2) 関数 $y=\dfrac{ax-3}{2x+1}$ の逆関数がこの関数自身と一致するように, 定数 a の値を定めよ.

13

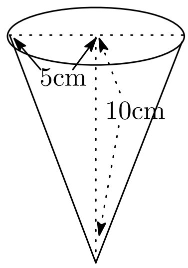
$f(x)$ を偶関数, $g(x)$ を奇関数とする. 次の関数は, 偶関数, 奇関数, どちらでもない, のいずれか理由とともに答えよ.

(1) $y=(f(x)g(x))^3$ (2) $y=\dfrac{1+g(x)^2}{g(x)}$ (3) $y=g(x)+\dfrac{1}{g(-x)}$

(4) $y=g(f(x))+f(g(x))$ (5) $y=g(g(x))$ (6) $y=\dfrac{g(x)^2+1}{1-g(x)^2}$

14

(指数関数の知識が必要.) 次の図は正円錐を逆にしたもので, この中に水を毎秒 $9\,[\mathrm{cm}^3]$ 入れていく. また水が容器に満杯になったら注入は止めるとする. 最初は水が入っていないものとし, 水を注入し始めてから t 秒の水の高さを $h(t)\,[\mathrm{cm}]$ とする. $h(t)$ を求めよ.



15

次の各方程式・不等式を関数のグラフを考察することにより解きなさい.

(1) $\sqrt{x-4}=6-x$ (2) $\sqrt{1-2x}=x+2$ (3) $x<\sqrt{x}+2$ (4) $\sqrt{5-x}<x-3$

(5) $x-1\leqq\dfrac{2}{x}$ (6) $\dfrac{4x-2}{x-1}<3x$ (7) $|x-1|>\dfrac{1}{3}x+1$ (8) $|x^2-2x|>x$

16

次の曲線と直線のグラフの共有点の個数が定数 a の値によってどのように変わるかを調べよ.

(1) 曲線 $y=ax$ と直線 $y=\sqrt{x-1}$

(2) 曲線 $y=x+a$ と直線 $y=\sqrt{2x+3}$

17

a は定数とする. 不等式 $\dfrac{x}{x-1}\geqq 1+a$ を解きなさい.

18

1 次関数 $f(x)=ax+b$ および分数関数 $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ がある.

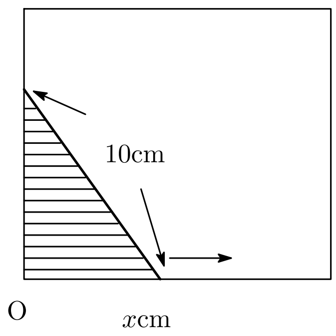
(1) $(f\circ f)(x)=9x-4$ となるように a, b を定めよ.

(2) $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x+1}$ となるように a, b を定めよ.

19 次の図のように y 軸に立てかけてあった棒をそれぞれの端点を x 軸, y 軸に接しながら静かにすべらせていくとする．x 軸と $x\,[\mathrm{cm}]$ のところで接しているとする．このとき図の網掛けの部分の面積を $s(x)\,[\mathrm{cm}^2]$, 周囲の長さを $v(x)\,[\mathrm{cm}]$ とする．

1) $s(x)$ を求めよ．　2) $s(x)$ の最大値を求めよ．

3) $v(x)$ を求めよ．　4) $v(x)$ の最大値を求めよ．



C 問題

20

問題 [rank A]

$y = 2x + 1$ および $y = -3x + 2$ のグラフをどちらも x 軸方向に a, y 軸方向に b 平行移動したところそれぞれ $y = 2x - 6$, $y = -3x + 20$ になったという．a, b を求めよ。

21

問題 [rank A]

$y = x^2 \ \ (x \geqq 0)$ のグラフを $y = -x$ に関して対称移動すると $y = g(x)$ のグラフになった．$g(x)$ を求めよ．
(山口大学)

22

問題 [rank C]

(1) $f(x) = |x-1| + |x-2|$ とする．$f(x)$ の最小値を求めよ．
(2) $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ とする．$f(x)$ の最小値を求めよ．
(3) $f(x) = |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-n|$（ただし n は自然数とする）．$f(x)$ の最小値を求めよ．（自然数の和に関する等式 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ は用いてよい.）
(大学編入学試験, 類題)

23

問題 [rank C]

自然数 m を素因数分解して $m = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ となるとき $f(m) = a_1 + \ldots + a_k$ と定義する．ここで, $p_1, \ldots, p_k$ は異なる素数とする．また $f(1) = 0$ とする．

(1) $f(1280)$ を求めよ．

(2) 自然数 m, n に対して $f(mn) = f(m) + f(n)$ を示せ．

(3) p を素数とし $m = p^j$, $n = p^k$ とする．$f(m+n) \geqq \min(f(m), f(n))$ を示せ．

(4) 自然数 m, n に対して $f(m+n) \geqq \min(f(m), f(n))$ は成立するか．

(富山大・理)

24

問題 [rank C]

A のタンクには 100 [ℓ] の水があり塩が 500 [g] 溶けている．また B のタンクには 10 [ℓ] の水があり塩が 10 [g] 溶けている．次の操作を行う．

１）A のタンクから $x[l]$ 放出する．ただし $x \leqq 10$.

２）B のタンクから $x[l]$ を A のタンクへ注ぐ.

３）A のタンクから $10 - x[\ell]$ 放出する.

４）B のタンクから $10 - x[\ell]$ を A のタンクへ注ぐ.

１）～４）の操作を行って得られる A のタンクの塩の量を y [g] とする．

(1) y を x の式で表せ.

(2) y が最大になるときの x の値をを求めよ.

(3) y が最小になるときの x の値をを求めよ.

指数関数と対数関数の問題

6）1節 指数関数

基本事項（累乗根）

a を数とし, n を自然数とする. a の n 乗根とは, n 乗して a になるような数のことである. すなわち次の方程式の解 x を **a の n 乗根**と言う：

$$x^n - a = 0$$

基本公式（指数法則）

$a,\, b > 0$ に対して, 次が成り立つ：
(1) $a^p a^q = a^{p+q}$
(2) $(a^p)^q = a^{pq}$
(3) $(ab)^p = a^p b^p$

基本公式（根号）

$a,\, b > 0,\, m,\, n$ を自然数とするとき, 次が成り立つ：
(1) $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}$.
(2) $\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$.
(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

基本公式（根号との関係）

$a > 0,\, m$ を整数, n を自然数とするとき, 次が成り立つ：
(1) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

例題 [1]

$a,\, b$ を正の数とするとき, 常に成立する式を選べ.
(1) $(a^2)^3 = a^5$
(2) $a^6 \cdot a^8 = a^{48}$
(3) $(ab^2)^3 = a^3 b^6$
(4) $(a^2)^3 = a^6$
(5) $a^6 \cdot a^8 = a^{14}$

解答例：(3), (4), (5).

例題 [2]

次の各値を根号のない値で示せ.
(1) $\sqrt[3]{27}$
(2) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$
(3) $\sqrt[3]{-1}$

解答例：(1) 3 (2) $\frac{1}{2}$ (3) -1

例題 [3]

a, b を正の数とするとき, 次の各式を簡単にせよ.
(1) $\sqrt[3]{a^7}\sqrt[3]{a^2}$
(2) $\dfrac{(\sqrt[5]{b^4a})^3}{\sqrt[5]{a^8b^2}}$
(3) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}\right)^2$

解答例：(1) $\sqrt[3]{a^7}\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^9} = a^3.$ (2) $\dfrac{(\sqrt[5]{b^4a})^3}{\sqrt[5]{a^8b^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{b^{12}a^3}}{\sqrt[5]{a^8b^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{b^{10}}}{\sqrt[5]{a^5}} = \dfrac{b^2}{a}.$

(3) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}\right)^2 = \left(\sqrt{\sqrt[3]{a^3}}\right)^2 = a.$

例題 [4]

次の指数で表現された数を根号で表し, 根号で表された数を指数で表現で表現せよ.
(1) $5^{-\frac{1}{4}}$
(2) $\sqrt[4]{3^7}$
(3) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1000000}}$

解答例：(1) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$ (2) $3^{\frac{7}{4}}$ (3) 10^{-2}

例題 [5]

次の各式を簡単にせよ.
(1) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}}$
(2) $\left(\dfrac{9}{3^{-\frac{1}{4}}}\right)^2$
(3) $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2$

解答例：(1) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}} = 4.$

(2) $\left(\frac{9}{3^{-\frac{1}{4}}}\right)^2 = \left(\frac{3^2}{3^{-\frac{1}{4}}}\right)^2 = \left(3^{\frac{9}{4}}\right)^2 = 3^{\frac{9}{2}} = 81\sqrt{3}.$

(3) $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} = x + 2 + \dfrac{1}{x}.$

A 問題

1 次の各値を求めよ.

(1) 2 の平方根　(2) 8 の 3 乗根　(3) 81 の 4 乗根　(4) $\sqrt[5]{-32}$

(5) $\sqrt[4]{(-81)^2}$　(6) $\sqrt[3]{8^4}$　(7) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$　(8) $\dfrac{\sqrt[4]{1250}}{\sqrt[4]{32}}$

2 指数で表現された数を根号で表し, 根号で表された数を指数で表現せよ $(a > 0)$.

(1) $\sqrt[3]{7}^2$　(2) $5^{-\frac{1}{3}}$　(3) $\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{5}}$　(4) $a\sqrt{a}$　(5) $a^{-\frac{4}{3}}$　(6) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}\right)^6$

3 次の各式を簡単にせよ.

(1) $5\sqrt{2}-\sqrt{18}$　(2) $\sqrt{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　(3) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}$　(4) $\sqrt[5]{0.00032}$

(5) $27^{-\frac{1}{3}}$　(6) $(0.125)^{-\frac{2}{3}}$　(7) $\sqrt[4]{\dfrac{18^2}{4^3}}$　(8) $\dfrac{\sqrt[6]{8x^2}}{\sqrt[3]{x^4}}$

4 次の各式を簡単にせよ $(a,\ b > 0)$.

(1) $16^{1.25}$　(2) $\dfrac{(a^2b^4)^3}{a^4b^3}$　(3) $(a^{-1/2}b^3)^5(a^3b^{-2})^2$　(4) $\dfrac{2^{0.5}(3^{1.5})^3}{6^{-0.5}}$

(5) $(a^{3/2}+a^{-1/2})^2$　(6) $\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[3]{a^7}$　(7) $a\sqrt{a\sqrt{a}}\div\sqrt{a}$　(8) $\dfrac{\sqrt[5]{a^4b}^3}{\sqrt[5]{b^8a^2}}$

5 次の関数のグラフの概形をかきなさい. また適当なグラフ描画ソフトを用いて確認しなさい.

(1) $y=2^x$　(2) $y=2^{-x}$　(3) $y=\dfrac{2^x}{2}$　(4) $y=3^{x+1}$

6 次の数を小さい方から順に並べよ.

(1) $3^{0.1},\ \dfrac{1}{9^{-1}},\ \sqrt[5]{3},\ 3\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{10},\ \sqrt[6]{30},\ \sqrt[12]{800}$

(3) $\sqrt{2},\ 0.5^{\frac{1}{2}},\ \dfrac{1}{2^{-2}},\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}},\ 1,\ 2\sqrt{2}$

7 次の方程式・不等式を解きなさい.

(1) $3\cdot 3^x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(2) $2^{x-2}=\dfrac{2}{4^x}$　(3) $\dfrac{3+2^x}{2^x}=7$

(4) $3^x<\dfrac{1}{9}$　(5) $(0.25)^x \geqq 8$　(6) $9^x-6\cdot 3^x-27=0$

B 問題

8 次の各式を簡単にせよ.

(1) $\sqrt[3]{54}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$　(2) $(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3$　(3) $(a^{-1}+b^{-1})^{-2}$　(4) $\dfrac{8}{3}\sqrt[6]{9}-\sqrt[3]{24}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$

9 m, n を自然数とし $w,\ v$ を正の数とするとき次の公式を証明せよ.

(1) $\sqrt[m]{w}\,\sqrt[m]{v} = \sqrt[m]{wv}$　　(2) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{w}} = \sqrt[mn]{w}$

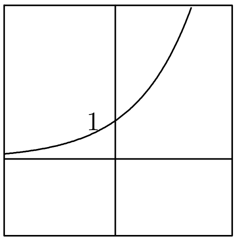
10 次の方程式・不等式を解きなさい.

(1) $4^x - 5\cdot 2^x + 4 = 0$　(2) $2^{x+2} - 2^x = 12$　(3) $3^{3x+2} \leqq 9^{2x-1}$　(4) $\dfrac{2^{x+2}}{1-2^x} = 2^{1-x}$

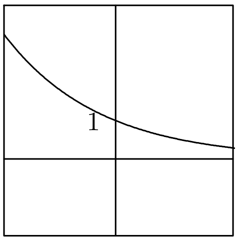
(5) $3^{2x+1} + 8\cdot 3^x = 3$　(6) $0.5^{3x-1} \geqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$　(7) $9^x - 3^x \leqq 72$　(8) $2^x - 24\cdot 2^{-x} > 5$

11 次の各関数をグラフにしたものは, 以下のどれかのグラフであるという．各関数に対して適切なグラフを選び, グラフの番号を書きなさい.

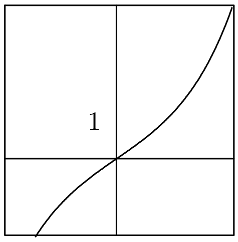
(a)	$y = 1.5^x$		(b)	$y = 2^x$	
(c)	$y = (0.7)^x$		(d)	$y = 2^{x+1}$	
(e)	$y = \frac{2^x+2^{-x}}{2}$		(f)	$y = \frac{2^x-2^{-x}}{2}$	



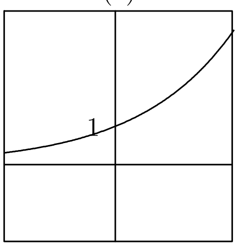
(1)



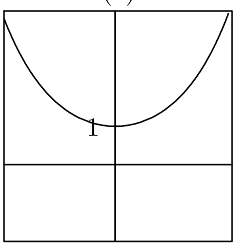
(2)



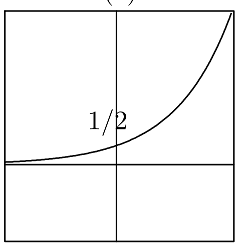
(3)



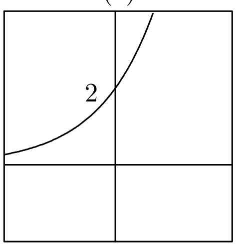
(4)



(5)



(6)



(7)

12 $a^x + a^{-x} = 3$ とする（$a > 0$）.

(1) $a^{2x} + a^{-2x}$ を求めよ.

(2) $a^{3x} + a^{-3x}$ を求めよ.

(3) a^x を求めよ.

13 $\{(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-4\}^{\frac{1}{2}}$ を簡単にしなさい（ただし $a>1$）．

14 次の連立方程式を満たす $x,\ y$ の値を求めなさい.

(1) $\begin{cases} 2^x+2^y=12 \\ 2^{x+y}=32 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2^{x-y+1}=8 \\ 4^x-4^y=60 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2^{x+2}-5^y=11 \\ 2^{x-2}\cdot 5^y=5 \end{cases}$

15 $x,\ y$ を実数の変数とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $x+2y=1$ のとき 2^x+4^y の最小値を求めよ.

(2) 関数 $y=9^x-3^x$ の最大値と最小値を求めよ.

C 問題

16

問題 [rank A]

$(321)^a=1000,\ (3210)^b=1000$ のとき $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$ を求めよ.
(大学編入学試験)

17

問題 [rank A]

正の数 e に対して $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\ g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ とおく. 次の等式を証明せよ.
(1) $f(x)^2-g(x)^2=1$
(2) $g(x+y)=g(x)f(y)+f(x)g(y)$

18

問題 [rank B]

$\pi=3.14159\cdots$ を円周率とするとき, 電卓を使わずに $2^\pi<\pi^2$ を示せ. ただし $3<\pi<\dfrac{22}{7}$ を利用してよい.

6）2節 対数関数

基本事項（対数の定義）

$x,\ a > 0,\ a \neq 1$ に対して

$\log_a x = y \Longleftrightarrow x = a^y$

基本公式（対数法則）

$x,\ y,\ a > 0,\ a \neq 1$ とするとき

(1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(3) $\log_a x^b = b \log_a x$

基本公式（底の変換）

$x,\ a,\ b > 0,\ a,\ b \neq 1$ とするとき

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

例題 [1]

次の $\boxed{}$ に適切な字句を入れよ． $y = \log_a x$ で a は $\boxed{(1)}$ と呼ばれ, 条件 $\boxed{(2)}$ および $\boxed{(3)}$ を満たす． また x は $\boxed{(4)}$ と呼ばれていて条件 $\boxed{(5)}$ を満たす.

$y = \log_a x$ は次の関係式と同じである: $x = a^{\boxed{(6)}}$

解答例：

(1) 底　(2) $a > 0$　(3) $a \neq 1$　(4) 真数　(5) $x > 0$　(6) y

例題 [2]

次の各関係式を対数で表現せよ.

(1) $2^3 = 8$

(2) $5^0 = 1$

(3) $a^m = b \quad (a,\ b > 0,\ a \neq 1)$

解答例：

(1) $\log_2 8 = 3$　(2) $\log_5 1 = 0$　(3) $\log_a b = m$

例題 [3]

次の各関係式を指数で表現せよ.

(1) $\log_3 81 = 4$

(2) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

(3) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$

解答例：

(1) $3^4 = 81$ (2) $2^{-2} = \frac{1}{4}$ (3) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

例題 [4]

次の各関係式の中で常に成立するものを選べ．ただし $x, y, a, b > 0,\ a \neq 1$ とする

(1) $\log_a x \log_a y = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(3) $c \log_a x = \log_a x^c$

(4) $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ ($x \neq 1$ とする)

(5) $a^{\log_a x} = x$

解答例：

(2) (3) (4) (5)

例題 [5]

次の各式を簡単にせよ.

(1) $\log_2 18 - 2\log_2 3$

(2) $\log_3 \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{4}$

(3) $(\log_3 8) \cdot (\log_2 3)$

解答例：

(1) $\log_2 18 - 2\log_2 3 = \log_2 \dfrac{18}{9} = 1$ (2) $\log_3 \dfrac{2}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{1}{4} = \log_3 \left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{1/2} \right) = -\dfrac{3}{2}$

(3) $(\log_3 8) \cdot (\log_2 3) = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 3} \cdot (\log_2 3) = 3$

例題 [6]

$y = \log_2 x$ について次の問いに答えよ.

(1) 定義域を求めよ.

(2) グラフの漸近線を求めよ.

(3) x 軸との交点を求めよ.

解答例：

(1) $x > 0$ (2) $x = 0$ (y 軸) (3) $(1, 0)$

A 問題

1 次の対数の値を求めよ．

(1) $\log_3 27$　(2) $\log_{16} 2$　(3) $\log_{10} 0.0001$　(4) $\log_8 4$
(5) $\log_7 1$　(6) $\log_{0.5} \sqrt{2}$　(7) $\log_3 9^{-1}$　(8) $\log_{27} \frac{1}{3\sqrt{3}}$

2 次の各関係式をチェックし，正しければ指数表現の場合は対数に，対数表現の場合は指数で表しなさい．もし間違っていたら，適切に直して前のようにしなさい．

(1) $3^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{3}$　(2) $10^{-2} = 0.01$　(3) $81^{\frac{3}{4}} = 27$
(4) $\log_5 125 = 2$　(5) $\log_2 1 = 1$　(6) $\log_{0.5} 8 = -3$

3 次の $\boxed{}$ に適切な字句を入れよ．

(1) $\log_3 \boxed{} = 4$　(2) $\log_{\frac{1}{4}} \boxed{} = \frac{3}{2}$　(3) $\log_{25} \boxed{} = -\frac{1}{2}$　(4) $\log_8 \boxed{} = \frac{4}{3}$
(5) $\log_{\square} 49 = 2$　(6) $\log_{\square} \sqrt{2} = -\frac{1}{6}$　(7) $\log_{\square} 27 = 0.75$　(8) $2^{\boxed{}} = 5$

4 次の各式を簡単にせよ．

(1) $\log_2 0.125$　(2) $\log_{\sqrt{3}} 3$　(3) $\log_{11} 121^{0.75}$　(4) $2\log_2 \dfrac{3}{5} + \log_2 \dfrac{25}{7} - \log_2 \dfrac{9}{7}$
(5) $\log \dfrac{75}{13} - \log \dfrac{15}{26}$　(6) $5^{\log_5 10}$　(7) $3^{\log_9 2}$　(8) $\log 24 - \log 54 + 4\log\sqrt{150}$

5 次の各式を簡単にせよ．

(1) $2^{-2\log_2 5}$　(2) $\log_3 5 \log_{25} 8 \log_2 3$　(3) $\log_2 3 \log_3 4 \log_4 5 \log_5 6 \log_6 7 \log_7 8$

6 $a = \log_{10} 2,\ b = \log_{10} 3$ とするとき，次の各式を $a,\ b$ で表しなさい．

(1) $\log_{10} 18$　(2) $\log_{10} 5$　(3) $\log_{10} \frac{2}{\sqrt{3}}$　(4) $\log_{10} 28 - \log_{10} 21$　(5) $\log_{10} \frac{3}{25}$　(6) $\log_3 4$

7 次の各組の数の大きさを比較せよ．

(1) $1,\ \log_4 8,\ 2^{\frac{1}{2}},\ \log_{\frac{1}{3}} 3,\ \log_{0.5} \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\log_2 5,\ \log_2 3,\ \log_4 7,\ 1$

(3) $\log_2 3,\ \frac{3}{2},\ \log_9 25$

8 次の各値を電卓や対数表などを用いて近似値を計算しなさい．

(1) $\log_{10} 300$　(2) $\log_{10} \sqrt{5}$　(3) $\log_{10}(2 \times 10^{50})$　(4) $\log_2 3$　(5) $2 \cdot 3^x = 125$ となる x

9 次の各関数のグラフの概形をかきなさい．また適当なグラフ描画ソフトを用いて確認しなさい．

(1) $y = \log_2 x$　(2) $y = \log_3 x$　(3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
(4) $y = \log_3(x-1)$　(5) $y = \log_2 |x|$　(6) $y = \log_2 4(x+1)$

10 3^{40} を１０進数で表したときに何桁の数になるか．またその逆数は小数何位ではじめて 0 以外の数が現れるか．ただし $\log 3 = 0.477$ として計算せよ．

11 次の方程式を満たす各 x を求めよ．

(1) $2\log(3-x) = 1$　(2) $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$　(3) $\dfrac{1}{2}\log(x+2) = \log x$

(4) $\log_x 6 = \dfrac{1}{2}$　(5) $\log_3(2x+1) = \log_3(2x-1) + 2$　(6) $\log(x+2) = \log\sqrt{x} + \log 3$

12 $\log 2 = 0.301,\ \log 3 = 0.477$ として以下の問いに答えよ．

(1) $3^{100},\ 6^{80}$ の大小を述べよ．

(2) $4000 < 1.25^n < 5000$ を満たす整数 n を求めよ．

(3) 2.7^n の整数部分が 5 桁になる整数 n を求めよ．

B 問題

13 指数法則を前提にして, 次の基本公式を証明せよ．ただし $x,\ y,\ \ a,\ b > 0$ かつ $a,\ b \neq 1$ とする．

(1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$　(2) $\log_a \dfrac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$

(3) $\log_a x^b = b\log_a x$　(4) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

14 地震のエネルギー E（単位はジュール [J]）とマグニチュード M との間には $\log_{10} E = 4.8 + \dfrac{3}{2}M$ という関係式が成り立つ. 地震のマグ二チュードが 1 増えると, そのエネルギーは何倍になるか.

15

(1) $a > b > 1$ とする．$\log_a b$ と $\log_b a$ の大小を判定せよ．

(2) $1 > a > b > 0$ とする．$\log_a b$ と $\log_b a$ の大小を判定せよ．

16 次の方程式・不等式を解きなさい.

(1) $\log_{0.5}(x-2) > 3$　(2) $\log x + \log(x-3) < 1$　(3) $2\log(2-x) > \log(2x+1)$

(4) $\log x^3 \leqq (\log x)^2$　(5) $(\log_2 x)^2 + \log_2(8x^4) \leqq 0$　(6) $\log_2 x + \log_8 x = 2(\log_2 x)(\log_8 x)$

17 自然数 $x,\ y$ がそれぞれ m 桁と n 桁で $x < y$ であるとする．積 xy は何桁になりうるか.
また商 $\dfrac{x}{y}$ は小数第何位に初めて 0 以外の数が現われうるか.

18 $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010,\ \log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771$ として以下の問いに答えよ.

(1) ある細菌は 1 分間に 1 回分裂して個体数が 2 倍になる。1 個の細菌が 100 万個以上に増加するのに何分かかるか.

(2) 1.6^n の整数部分が 3 桁となるのは整数 n がどんな値のときか.

(3) 0.6^{30} は小数点以下第何位に初めて 0 でない数が現れるか．またその数は何か.

(4) 池田首相は国民総生産を毎年，前年比 x %以上増加させて 10 年後に国民総生産を 2 倍以上にすることを目指す政策をとった．x を求めよ.

(5) 光線があるガラス板を 1 枚通過するとその明るさの 1 割を失う．このガラス板を何枚重ねると，光線の明るさがもとの $\frac{1}{10}$ 以下になるか.

19

次の関数の最大値・最小値およびそれを与える x を求めよ.

(1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad (0 < x \leqq 2)$　(2) $y = \log_3 x + \log_3(6-x)$　(3) $y = (\log_2 2x)(\log_2 8x)$

20

n 個のデータ $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ を横軸に $x_1, \ldots, x_n$ を縦軸に $\log_{10} y_1, \ldots, \log_{10} y_n$ を取ってグラフを書いたところ, 傾きが a で切片 b の直線になった．このとき x_i と $y_i (i = 1, \ldots, n)$ の間の関係式を求めよ.

C 問題

21

問題 [rank B]

M を正の定数とする．このとき x を十分大きくしていくと, あるところから常に（ある定数よりも大きい全ての x に対して）以下の不等式が成立することを示せ.

$$\log_2 x < Mx$$

22

問題 [rank B]

x, y を 1 より大きい変数とするとき, 次の式の最小値およびそれを与えるときの x, y の関係式を求めよ.

$$\log_x y + 4 \log_y x$$

三角関数の問題

7) 三角関数

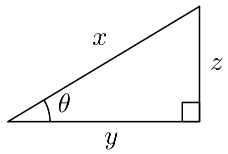
三角比

右のような直角三角形について, 角 θ の三角比を次のように定義する.

サイン (正弦) $\sin\theta = \dfrac{z}{x}$

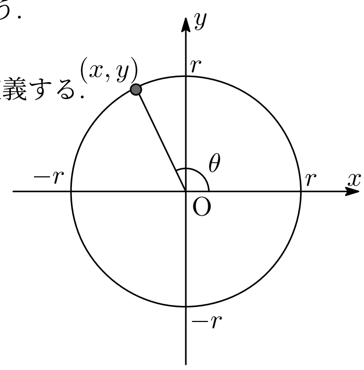
コサイン (余弦) $\cos\theta = \dfrac{y}{x}$

タンジェント (正接) $\tan\theta = \dfrac{z}{y}$



三角関数

原点中心, 半径 r の円について, x 軸の正の部分を**始線**,
始線を原点中心反時計回りに θ だけ回転させた半直線を**動径**という.
動径と円の交点の座標を (x, y) とするとき
一般角 θ に対するサイン, コサイン, タンジェントを次のように定義する.



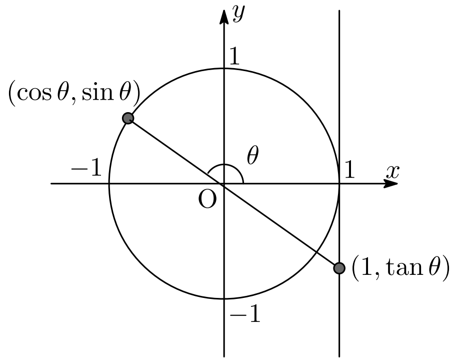
サイン (正弦) $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

コサイン (余弦) $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

タンジェント (正接) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

このとき, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ などは
x を変数にもつ関数であり, **三角関数**と呼ばれる.

また, 原点中心の単位円 (半径 1 の円) を考えたとき,
動径と単位円との交点の座標が $(\cos\theta, \sin\theta)$ になる.
直線 $x = 1$ と動径を延長して得られる直線の
交点の座標が $(1, \tan\theta)$ になる.



三角関数を扱うとき, 次の記号を用いることもある.

コセカント (余割) $\csc\theta = (\mathrm{cosec}\,\theta) = \dfrac{1}{\sin\theta}$

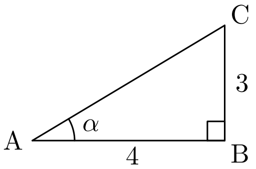
セカント (正割) $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

コタンジェント (余接) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

三角関数

例題 [1]

AB= 4，BC= 3，$\angle$ABC $= 90^\circ$ の直角三角形 ABC において，$\angle$CAB $= \alpha$ とするとき，$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ の値を求めよ．また，三角関数表を使って，α が約何度か求めよ．



解答例：三平方の定理より，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2$ だから，AC= 5 である．
$\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CA}} = \dfrac{4}{5}$, $\tan\alpha = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{3}{4}$.
$\sin\alpha = 0.6$ に最も近い値を三角関数表で探すと，$\sin 37^\circ = 0.6018$ より α は約 37° である．

三角関数の性質

三角関数 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ について, 次の等式が成り立つ.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

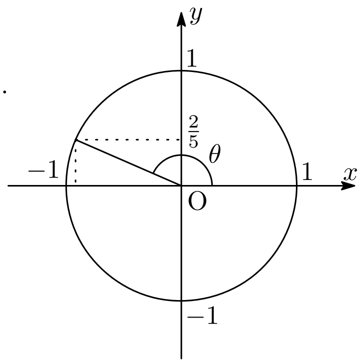
例題 [2]

θ が第 2 象限の角で $\sin\theta = \dfrac{2}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

解答例：$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より，$\cos^2\theta = 1 - \dfrac{4}{25} = \dfrac{21}{25}$.

θ は第 2 象限の角だから $\cos\theta < 0$ より，$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}$ となる．

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，$\tan\theta = \dfrac{\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = -\dfrac{2}{\sqrt{21}}$ となる．

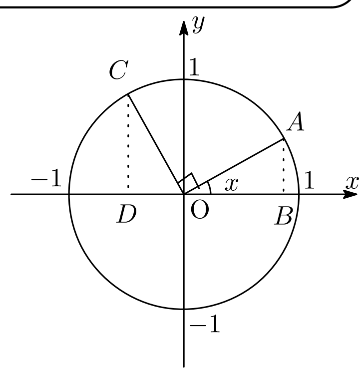


例題 [3]

$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right), \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right), \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $\sin x, \cos x, \tan x$ を用いて表せ.

解答例：右図において $\triangle OAB$ と $\triangle COD$ は合同なので
$CD = OB = \cos x$. よって, $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = CD = \cos x$.
また, $OD = AB = \sin x$ により $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -OD = -\sin x$.

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\frac{1}{\tan x}.$$



加法定理

任意の角 α, β について, 次の等式が成り立つ.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

例題 [4]

加法定理を使って，$\sin\dfrac{5\pi}{12}$，$\cos\dfrac{5\pi}{12}$，$\tan\dfrac{5\pi}{12}$ の値を求めよ.

解答例：

$\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{2\pi}{12}+\dfrac{3\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}$ だから,

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=2+\sqrt{3}.$$

したがって，$\sin\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，$\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\tan\dfrac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$.

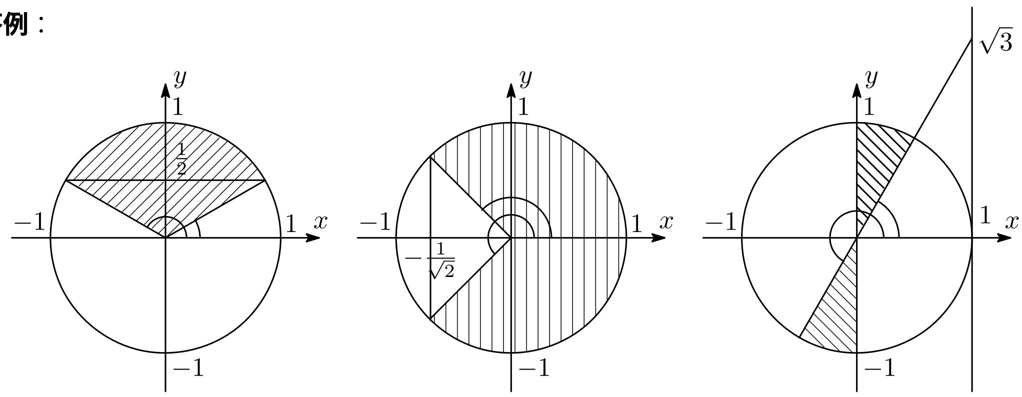
例題 [5]

$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け.

(1) $\sin x=\dfrac{1}{2}$　(2) $\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $\tan x=\sqrt{3}$

(4) $\sin x>\dfrac{1}{2}$　(5) $\cos x\geqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(6) $\tan x\geqq\sqrt{3}$

解答例：



(1) $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}$　(2) $x=\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}$　(3) $x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$

(4) $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{6}$　(5) $0\leqq x\leqq\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}\leqq x<2\pi$　(6) $\dfrac{\pi}{3}\leqq x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{4\pi}{3}\leqq x<\dfrac{3\pi}{2}$

例題 [6]

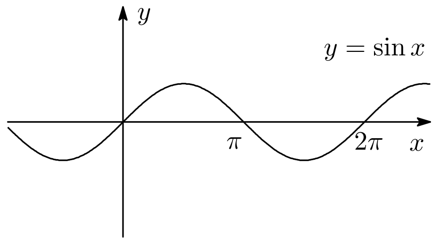
$\sin x + \sqrt{3}\cos x$ を $r\ \sin(x+\alpha)$ $(r>0,\ 0 \leqq \alpha < 2\pi)$ の形に変形せよ.

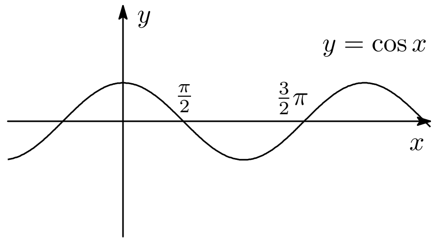
解答例：$a\sin x + b\cos x$ に対して，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ であるから，$r=\sqrt{1+3}=2$ となる.

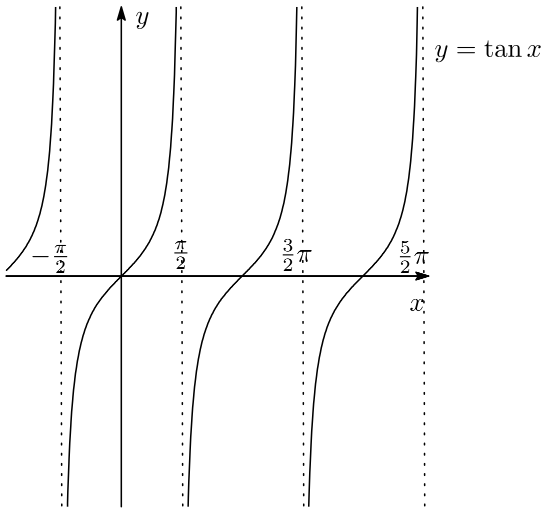
よって，$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$ と変形できる.

ここで，$\sin(x+\alpha) = \sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha$ と比較すると，$\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる角 α は $\alpha = \frac{\pi}{3}$ である．よって，$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ となる．（これを**三角関数の合成**と言う.）

三角関数のグラフ





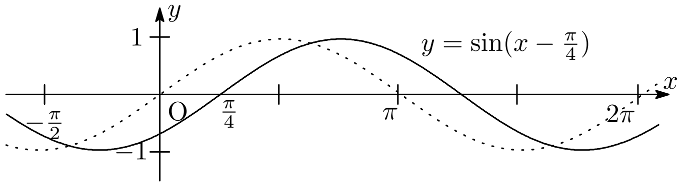


これらを基本に, 平行移動, x 軸, y 軸方向への拡大・縮小を利用して様々な三角関数のグラフをかくことができる.

例題 [7]

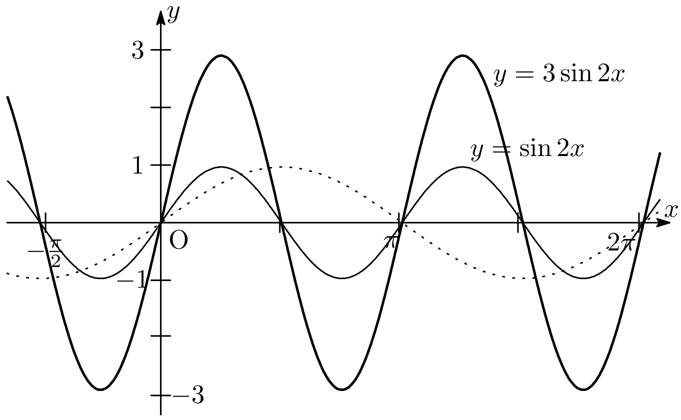
次の三角関数のグラフをかけ.
(1) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$　　(2) $y=\sin 2x$　　(3) $y=3\sin 2x$

解答例：(1)　$y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ 平行移動して次が得られる.



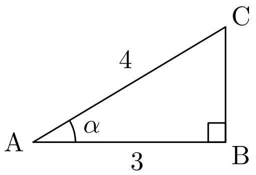
(2)　$y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小して次が得られる.

(3)　$y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小, y 軸方向に 3 倍に拡大して次が得られる.

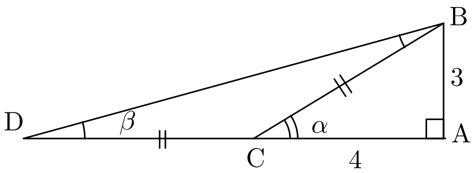


A 問題

1 AB= 3，AC= 4，$\angle \mathrm{ABC} = 90°$ の直角三角形 ABC において，$\angle \mathrm{CAB} = \alpha$ とするとき，$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ の値を求めよ．また，三角関数表を使って，α が約何度か求めよ．



2 図において, AB= 3, AC= 4, ∠BAC=90°, BC=CD, $\angle \mathrm{BCA} = \alpha$，$\angle \mathrm{BDA} = \beta$ とする．

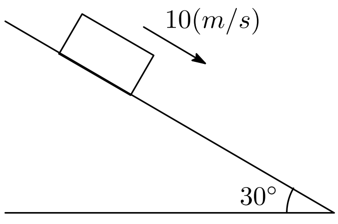


(1) 辺 AD，BD の長さを求めよ．

(2) $\sin\beta$ と $\cos\beta$ の値を求めよ．

3 水平な校庭で垂直に立てた長さ 2 [m] の棒の影の長さが 3.2 [m] であった．このとき，太陽を見上げる角度は何度か．三角関数表を用いて求めよ．

4 水平面からの角が 30° の斜面の上においた物体が滑り落ちるとき, 物体の速度が 10 [m/s] の瞬間の物体の鉛直方向の速さと水平方向の速さを求めよ．



5 次の表を埋めなさい.

θ	radian	sin	cos	tan
$30°$				
$45°$				
$60°$				
$90°$				
$120°$				
$135°$				
$150°$				

θ	radian	sin	cos	tan
$180°$				
$210°$				
$270°$				
$315°$				
$0°$				
$-30°$				
$420°$				

6 次の問いに答えよ.

(1) $800°$ を $\alpha + 360° \times n$ ($0° \leqq \alpha < 360°$, n は整数) の形で表せ.

(2) $75°$ を弧度法 (ラジアン) で表せ.

(3) $\dfrac{3\pi}{5}$[rad] を 60 分法 (°) で表せ.

(4) $-\dfrac{13}{4}\pi$ を $\alpha + 2n\pi$ (n は整数, $0 \leqq \alpha < 2\pi$) の形で表せ.

(5) $\dfrac{11}{3}\pi$ は第何象限の角か.

(6) $\dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき, $\cos\theta$ の値の範囲を求めよ.

(7) 半径 4[cm], 中心角 $70°$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ.

(8) $\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi$ のとき, $\cos 2\theta$ の符号を調べよ.

(9) $y = 3\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフは, $y = \sin x$ のグラフをどのように変形, 移動したものか.

7 次の三角関数を角 θ の三角関数（$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$）を用いて表しなさい.

(1) $\sin(-\theta)$, $\cos(-\theta)$, $\tan(-\theta)$

(2) $\sin(\theta + \pi)$, $\cos(\theta + \pi)$, $\tan(\theta + \pi)$

(3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

(4) $\sin(\pi - \theta)$, $\cos(\pi - \theta)$, $\tan(\pi - \theta)$

8 $\sin 20° = 0.3420$, $\cos 20° = 0.9397$, $\tan 20° = 0.3640$ を使って, 次の三角関数の値を求めよ.

(1) $\sin 70°$　(2) $\cos 70°$　(3) $\cos 160°$　(4) $\tan 160°$　(5) $\sin 200°$

(6) $\tan 200°$　(7) $\cos 290°$　(8) $\tan 290°$　(9) $\cos(-20°)$　(10) $\tan(-20°)$

9 加法定理を用いて，次の三角関数の値を求めよ．

(1) $\sin 105^\circ$，$\cos 105^\circ$，$\tan 105^\circ$　　(2) $\sin 165^\circ$，$\cos 165^\circ$，$\tan 165^\circ$

(3) $\sin 15^\circ$，$\cos 15^\circ$，$\tan 15^\circ$

10 (1) θ が第 2 象限の角，$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

(2) θ が第 3 象限の角，$\tan\theta = 3$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ．

11 (1) $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) $4\sin\theta\cos\theta = \sqrt{3}$ のとき，$\sin\theta + \cos\theta$ および $\sin^3\theta + \cos^3\theta$ の値を求めよ．

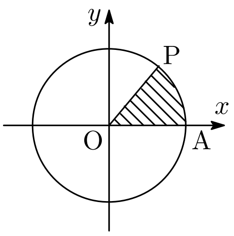
12 次の等式を証明せよ．

(1) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$　　(2) $\tan\theta + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \dfrac{1}{\cos\theta}$

(3) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \sin^2\theta\tan^2\theta$　　(4) $\tan^2\theta + \tan^4\theta = \dfrac{1}{\cos^4\theta} - \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

13 $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$，$\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ を証明せよ．

14 原点を中心とする半径 2 [cm] の円上を，点 P が 1 秒間に $\dfrac{\pi}{18}$ [rad] の速さで動いている．点 P は最初 $A(2, 0)$ にいるとする．10 秒後の扇形 APO の面積を求めよ．また扇形 APO の面積が初めて 6 [cm^2] になるのは，P が A を出発してから何秒後か．



15 次の関数のグラフをかきなさい．

(1) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$　　(2) $y = 3\cos 2x$　　(3) $y = 2\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

16 α が第 2 象限の角，β が第 3 象限の角で $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\sin\beta = -\dfrac{12}{13}$ であるとき, 次の値を求めよ．

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　(2) $\cos(\alpha+\beta)$　　(3) $\tan(\alpha+\beta)$

17 α が第 2 象限の角で $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ であるとき，次の値を求めよ．

(1) $\sin 2\alpha$　　(2) $\cos 2\alpha$　　(3) $\tan 2\alpha$

18 次の式を $r\sin(x+\alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする．

(1) $\sin x+\cos x$　　(2) $\sin x+\sqrt{3}\cos x$

(3) $\sqrt{3}\sin x-\cos x$　　(4) $-\sin x+\cos x$

19 $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ で $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$ であるとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ．

20 次の三角関数の和（差）を積の形に直しなさい．

(1) $\sin 3x+\sin 5x$　(2) $\cos 5x+\cos 9x$　(3) $\cos\dfrac{3\pi}{4}-\cos\dfrac{2\pi}{3}$　(4) $\sin\dfrac{\pi}{9}-\sin\dfrac{2\pi}{9}$

21 次の値を求めよ．

(1) $\cos 75^\circ\cos 15^\circ$　　(2) $\sin\dfrac{7}{12}\pi\sin\dfrac{5}{12}\pi$

(3) $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$　　(4) $\cos\dfrac{7}{12}\pi-\cos\dfrac{\pi}{12}$

22 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式と不等式を解きなさい．

(1) $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(2) $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan x=\sqrt{3}$

(4) $\sin x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(5) $\cos x\geqq-\dfrac{1}{2}$　　(6) $\tan x<-1$

23 $\triangle$ABC（頂点 A, B, C に向かい合う辺の長さを a, b, c とする）の辺の長さや角が次のように分かっているとき, それぞれの値を求めよ．

(1) $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{3}+1$ のとき，角 A および $\triangle$ABC の面積 S.

(2) $a=6$, $A=60^\circ$, $C=45^\circ$ のとき，辺 c および $\triangle$ABC の面積 S.

(3) $a=2\sqrt{3}$, $b=2$, $B=30^\circ$ のとき, 残りの辺と角および $\triangle$ABC の外接円の半径 R.

B 問題

24 $\cos 2x, \cos 3x, \cos 4x$ を $\cos x$ を用いて表しなさい．

25 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式または不等式を解きなさい．

(1) $\sin x+\cos x=-1$　　(2) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$

(3) $\cos 2x+\cos x=0$　　(4) $-\cos x=\cos 3x$

(5) $\sin 2x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(6) $\sin 2x<\sqrt{3}\cos x$

26 次の関数の最大値と最小値およびそれを与える変数 θ, x, t の値を求めよ（a, b, ω は正の定数）．ただし，変数の範囲は 0 以上 2π 未満 とする．

(1) $y=\sqrt{3}\cos\theta-3\sin\theta$　(2) $y=\sin x-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$　(3) $y=3\sin x+4\cos x$

(4) $y=\cos 2\theta+2\sin\theta$　(5) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　(6) $y=a\sin\omega t+b\cos\omega t$

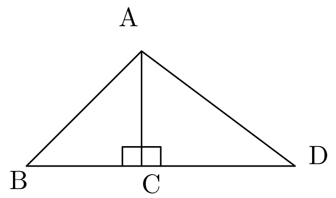
27 関数 $y = \sin 2x - 2(\sin x - \cos x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ について，次の問いに答えよ．
(1) $t = \sin x - \cos x$ とおいて，y を t の関数で表せ．
(2) t の範囲を求め，y の最大値，最小値を求めよ．

28 次の等式が成り立つ $\triangle ABC$ はどんな三角形か．
(1) $c\cos B = b\cos C$ (2) $b\cos B = c\cos C$ (3) $c^2\sin^2 B + b^2\sin^2 C = 2bc\cos B\cos C$

29 円に内接する四角形 ABCD がある．AB $= 3$，BC $= 4$，CD $= 4$，DA $= 5$ であるとき，この四角形の AC の長さ，$\sin B$ および面積 S を求めよ．

30 $\triangle ABC$（3 辺の長さが a, b, c）の面積を S, 3 辺の長さの和を $2s = a + b + c$, 外接円の半径を R, 内接円の半径 r とおくとき, 次の各等式が成り立つことを証明せよ．
(1) $S = \dfrac{abc}{4R}$ (2) $S = sr$ (3) $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{2Rr}$

31 次の文章は，三角形の面積を用いた加法定理の証明である．かっこの中に適切な数式を入れよ．



$\triangle$ABD において，AC は頂点 A から辺 BD に下ろした垂線で，$\angle$BAC $= \alpha$, $\angle$DAC $= \beta$ とする．直角三角形 $\triangle$ABC に着目して，AC, BC をそれぞれ AB と α で表すと,

AC= ( ), BC= ( ) $\cdots$①

また, 直角三角形 $\triangle$ACD に着目して，AC, CD をそれぞれ AD と β で表すと,

AC= ( ), CD= ( ) $\cdots$②

次に，直角三角形 $\triangle$ABC の面積 $= \dfrac{1}{2}$BC$\cdot$AC となるが，BC に ① を，AC に ② を代入すると,

$\triangle$ABC の面積 $=$ ( ) $\cdots$③

同様に，直角三角形 $\triangle$ACD の面積 $= \dfrac{1}{2}$CD$\cdot$AC の CD に ② を，AC に ① を代入すると,

$\triangle$ACD の面積 $=$ ( ) $\cdots$④

したがって，$\triangle$ABD の面積は ③ $+$ ④ より,

$\triangle$ABD の面積 $=$ ( ) $\cdots$⑤

一方，$\triangle$ABD の面積は, 2 辺とその間の角を使って,

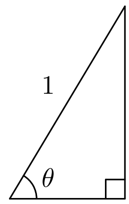
$\triangle$ABD の面積 $= \dfrac{1}{2}$AB$\cdot$AD $\sin(\alpha + \beta)$ $\cdots$⑥

と表すことができる．したがって，⑤ と ⑥ が等しいことより,

$\sin(\alpha + \beta) =$ ( )

が導かれる．

32 斜辺の長さが 1 で一つの鋭角を θ とした直角三角形において
$L=$(底辺)$+$(高さ) とする．このとき, 次の問に答えよ．



(1) 底辺と高さをそれぞれ θ を用いて表せ．

(2) $\sin 2\theta = L^2 - 1$ であることを示せ．

(3) $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{2}{\sin 2\theta}$ であることを示せ．

(4) L の最大値とそのときの θ を求めよ．

(5) $L = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ とする．このとき, 次の値を求めよ．

(a) $\sin 2\theta$ の値を求めよ．
(b) θ のおおよその値を三角関数表を用いて求めよ．
(c) $\tan\theta + \tan(90^\circ - \theta)$ の値を求めよ．

(6) $10^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ とするとき, $\tan\theta + \tan(90^\circ - \theta)$ の値が整数となるような L の値をすべて求めよ．ただし, 三角関数表を用いて良い．

33 (1) グラフ描画ソフトを用いて，$y = a\sin(bx+c)$ のグラフを描き，a, b, c をそれぞれ変化させると，グラフがどのように変化するか調べよ．

(2) グラフ描画ソフトを用いて，$y = \sin(t-x)$ のグラフを描き，t を 0 から増やしていくと，グラフがどのように変化するか調べよ．

34 次の問に答えよ．

(1) $y = \sin x$ のグラフを平行移動や拡大・縮小をしたグラフを考える．$0 \leqq x < 2\pi$ において, $x = \dfrac{\pi}{3}$ だけで最大値 5 をとり, 最小値が -1 となるグラフを一つ答えよ．

(2) (1) において求める関数を $y = r\sin(ax+b)+c$ (ただし, $a>0$) と表すとき, a の範囲を求めよ．また最小値を与える x の値 a を用いて表せ．

35 次の各式をできるだけ簡単にせよ．

(1) $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \dfrac{4\pi}{3}\right)$　(2) $\sin 10^\circ - \sin 70^\circ + \sin 130^\circ$

(3) $\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right)$　(4) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

C 問題

36

問題 [rank A]

α, β がともに鋭角で $\sin\alpha = \dfrac{1}{5}, \sin\beta = \dfrac{2}{5}$ のとき，$\tan(\alpha+\beta)$ を求めよ．
（豊橋技科大, 類題）

37

問題 [rank A]

3 点 O$(0,0)$, A$(2,4)$, B$(3,1)$ を頂点とする △OAB の外接円の半径を求めよ.
（豊橋技科大, 類題）

38

問題 [rank A]

次の式を簡単にせよ.
(1) $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2$　　(2) $(2\tan x+\cot x)^2-(2\tan x-\cot x)^2$
（岐阜大, 類題）

39

問題 [rank B]

$\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=2+\sqrt{3}$ のとき，$\cos x$ を求めよ.
（岐阜大, 類題）

40

問題 [rank B]

$\triangle ABC$ について $BC=5\sqrt{5},\ CA=9,\ AB=16$ である．このとき, 三角形の外側にあり, 点 B または 点 C の少なくとも一方からの距離が 6 以下である部分の面積を求めよ.
（数学オリンピック・国内予選）

41

問題 [rank C]

2 次元座標平面で x, y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ．鋭角が 30° の直角三角形の 3 つの頂点を格子点に置くことは可能であるか述べよ.
（名古屋大, 類題）

平面上の図形の問題

8）平面上の図形

点の座標と内分点・外分点

数直線上の 2 点 $A(a)$ と $B(b)$ に対し, 二点間の距離を AB で表すと $AB = |b-a|$ となる. また, 線分 AB を $m:n$ に内分する点 $P(x)$ は $x = \dfrac{mb+na}{m+n}$, $m:n$ に外分する点 $Q(x)$ は $x = \dfrac{mb-na}{m-n}$ となる. 特に 1 : 1 に内分する点 $R(x)$ を AB の中点と言い, $x = \dfrac{a+b}{2}$ となる.

平面上の 2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ に対し, 二点間の距離 AB は $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ で与えられる（三平方の定理から導かれる）. また, 線分 AB を $m:n$ に内分する点 $P(x,y)$ は $(x,y) = \left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$, $m:n$ に外分する点 $Q(x,y)$ は $(x,y) = \left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ となる. 1 : 1 に内分する点 $R(x,y)$ を AB の中点と言い, $(x,y) = \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ となる.

例題 [1]

数直線上の二点 $P(-1)$, $Q(3)$ に対して次の問に答えよ.
(1) 点 P と点 Q の距離 PQ を求めよ.
(2) 線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 A を求めよ.
(3) 線分 PQ の 中点 B を求めよ.
(4) 線分 PQ を 3 : 1 に外分する点 C を求めよ.

解答例：(1) $PQ = |3-(-1)| = 4$.　(2) $\dfrac{2\cdot 3+1\cdot(-1)}{1+2} = \dfrac{5}{3}$ より $A\left(\dfrac{5}{3}\right)$.　(3) $\dfrac{(-1)+3}{2} = 1$ より $B(1)$.　(4) $\dfrac{3\cdot 3-1\cdot(-1)}{3-1} = 5$ より $C(5)$.

例題 [2]

平面上の二点 $P(-2,4)$, $Q(4,1)$ に対して次の問に答えよ.
(1) 点 P と点 Q の距離 PQ を求めよ.
(2) 線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 A を求めよ.
(3) 線分 PQ の 中点 B を求めよ.
(4) 線分 PQ を 3 : 1 に外分する点 C を求めよ.

解答例：(1) $PQ = \sqrt{\{4-(-2)\}^2+(1-4)^2} = 3\sqrt{5}$.　(2) $\left(\dfrac{2\cdot 4+1\cdot(-2)}{1+2}, \dfrac{2\cdot 1+1\cdot 4}{1+2}\right) = (2,2)$ より $A(2,2)$.　(3) $\left(\dfrac{(-2)+4}{2}, \dfrac{4+1}{2}\right) = \left(1, \dfrac{5}{2}\right)$ より $B\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$
(4) $\left(\dfrac{3\cdot 4-1\cdot(-2)}{3-1}, \dfrac{3\cdot 1-1\cdot 4}{3-1}\right) = \left(7, -\dfrac{1}{2}\right)$ より $C\left(7, -\dfrac{1}{2}\right)$.

直線の方程式

a と b の少なくとも一方が 0 でないとき, $ax+by+c=0$ を満たす点 $P(x,y)$ の集合は直線をなす (直線の方程式). この方程式は, $b \neq 0$ のとき $y = mx+n$, $b = 0$ のとき $x = k$ の形で表せる.

つまり,

$$ax + by + c = 0 \iff y = mx + n \text{ または } x = k.$$

傾き m, y 切片 n の直線の方程式は $y = mx + n$ と表せる. 傾き m で点 (x_1, y_1) を通る直線は, 原点を通り傾き m の直線 $y = mx$ を x 軸方向に x_1, y 軸方向に y_1 だけ平行移動したものなので, $y - y_1 = m(x - x_1)$ と表せる. また 2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る直線の方程式は, $x_1 \neq x_2$ のとき $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, $x_1 = x_2$ のとき $x = x_1$ と表せる.

平行な 2 直線の傾きは一致し, 垂直な 2 直線の傾きの積は -1 になる. ただし, 直線が $x = a$ で表されているときは $y = a'$, $y = b$ で表されているときは $x = b'$ が垂直に交わる直線となる.

点と直線の距離

直線 ℓ: $ax + by + c = 0$ と点 $P(x_1, y_1)$ を通る直線 ℓ の垂線 ℓ' との交点 H を, 点 P から直線 ℓ に下ろした垂線の足と言う. 2 点 P, H の距離 d は, 点 P と直線 ℓ 上の点との距離の中で最小であり, d を点 P と直線 ℓ の距離という. 距離は $\boxed{d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$ で与えられる.

例題 [3]

次の直線の方程式を求めよ.
(1) 点 $(3, 1)$ を通り, 傾きが -3 である直線.
(2) 2 点 $(-2, 2)$, $(4, -1)$ を通る直線.
(3) 2 点 $(3, -1)$, $(3, 3)$ を通る直線.
(4) 点 $(-2, 4)$ を通り, 直線 $3x + 2y - 2 = 0$ に平行な直線.
(5) 点 $(1, 4)$ を通り, 直線 $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ に垂直な直線.

解答例：(1) $y - 1 = -3(x - 3)$ より, $y = -3x + 10$. (2) 傾きは $\dfrac{-1 - 2}{4 - (-2)} = -\dfrac{1}{2}$. よって求める直線の方程式は $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x + 2)$ より $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$. (3) 2 点の x 座標が一致しているので, 求める直線の方程式は $x = 3$. (4) 平行な 2 直線の傾きは等しい. また $3x + 2y - 2 = 0 \iff y = -\dfrac{3}{2}x + 1$ より, 求める直線の傾きは $-\dfrac{3}{2}$. よって求める直線は $y - 4 = -\dfrac{3}{2}(x + 2)$ より $y = -\dfrac{3}{2}x + 1$. (5) 垂直な 2 直線の傾きの積は -1 となるから, 求める直線の傾きを m とすると $-\dfrac{1}{2} \cdot m = -1$. よって $m = 2$ となり, 求める直線は $y - 4 = 2(x - 1)$ より $y = 2x + 2$.

例題 [4]

$A(-2, -2)$, $B(1, 1)$, $C(2, 4)$ に対し次の問に答えよ.
(1) 2 点 B, C を通る直線の傾き m を求め, その方程式を求めよ.
(2) 点 A を通り, 傾きが m の直線 ℓ の方程式を求めよ.
(3) 2 点 A, B を通る直線の傾きを m' とするとき, 点 C を通り傾きが m' の直線 ℓ' の方程式を求めよ.
(4) 四角形 $ABCD$ が平行四辺形になるような点 D の座標を求めよ.

解答例：(1) $m = \dfrac{4 - 1}{2 - 1} = 3$. また直線の方程式を $y = 3x + a$ とおき, $x = 1$, $y = 1$ を代入する

と, $1=3+a$ より $a=-2$. つまり直線の方程式は $y=3x-2$ (2) $y=3x+b$ とおき, $x=-2$, $y=-2$ を代入すると, $-2=3(-2)+b$ より $b=4$. つまり直線 ℓ の方程式は $y=3x+4$ (3) $m'=1$. また 直線 ℓ' の方程式は $y=x+c$ とおける. $x=2, y=4$ を代入すると, $c=2$. つまり直線 ℓ' の方程式は $y=x+2$ (4) 点 D は直線 ℓ と ℓ' の交点になるので, 2 つの式を連立させて, $x=-1, y=1$. よって $D(-1,1)$ [1].

円の方程式

中心が (x_1, y_1) で半径 r の円の方程式は, $\boxed{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2}$ (標準形) で与えられる. また円の方程式は $x^2+y^2+ax+by+c=0$ の形 (一般形) で表されることもある. 特に, 中心が原点の円の方程式は $x^2+y^2=r^2$ で与えられる.

円 $C:(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$ $(r>0)$ と直線 $\ell: y=ax+b$ の関係を見るには次の 2 つの方法がある：(1) 円と直線の式を連立しててできる 2 次方程式 $(x-x_1)+(ax+b-y_1)-r^2=0$ の判別式 D を見る方法 (2) 中心と直線の距離 d と半径 r の関係を見る方法.

	(1) 判別式 D	(2) d と r の関係
2 点で交わる	$D>0$	$d<r$
1 点で接する	$D=0$	$d=r$
共有点を持たない	$D<0$	$d>r$

特に, 円と直線が 1 点 P で接するとき, その点 P を直線 ℓ と円 C の接点と言い, 直線 ℓ を円 C の (点 P における) 接線という.

例題 [5]

(1) 中心 $(-2,5)$ で, 半径 3 の円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ の形 (一般形) で表せ.
(2) 円 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ の中心と半径をそれぞれ求めよ.
(3) 中心が $(2,4)$ で点 $(1,1)$ を通る円の方程式を求めよ.
(4) 3 点 $A(0,3)$, $B(1,6)$, $C(2,-1)$ を通る円の方程式を求めよ.

解答例：(1) 中心 $(-2,5)$ で半径 3 の円の方程式は $(x+2)^2+(y-5)^2=3^2$ で表せる. この式を展開して $x^2+y^2+4x-10y+20=0$. (2) $x^2+y^2-2x+4y+1=0 \iff (x^2-2x+1-1)+(y^2+4y+4-4)+1=0 \iff (x-1)^2+(y+2)^2=2^2$. よって中心 $(1,-2)$, 半径 2. (3) 求める円の半径は $\sqrt{(2-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$. よって求める円の方程式は $(x-2)^2+(y-4)^2=10$. (4) 求める円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおく. これが 3 点 $A(0,3)$, $B(1,6)$, $C(2,-1)$ を通るから代入して, $3b+c+9=0\cdots①$, $a+6b+c+37=0\cdots②$, $2a-b+c+5=0\cdots③$. ② − ① より $a+3b+28=0\cdots④$. また ② − ③ より $-a+7b+32=0\cdots⑤$. ④, ⑤ より, $b=-6$, $a=-10$. このとき $c=9$. よって求める円の方程式は $x^2+y^2-10x-6y+9=0$. [別解] 線分 AB の垂直二等分線と線分 AC の垂直二等分線が円の中心となることを用いる. 2 つの垂直二等分線は $y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. この 2 直線の交点は $(5,3)$. よって中心は $(5,3)$. 半径は中心と A の距離だから 5. よって求める円の方程式は $(x-5)^2+(y-3)^2=25$.

[1] ここでは「平行四辺形 $\iff$ 向かい合った 2 組の辺が平行」を使ったが, 「平行四辺形 $\iff$ 向かい合った 1 組の辺が平行で長さが等しい」を使っても D の座標は求められる.

例題 [6]

円 $x^2+y^2=10$ と次の直線との関係について調べよ.
(1) 直線 $y=3x+5$ (2) 直線 $y=3x+10$ (3) 直線 $y=3x+15$

解答例:(1) $y=3x+5$ を $x^2+y^2=10$ に代入して, $x^2+(3x+5)^2=10 \Longleftrightarrow 2x^2+6x+3=0$. この二次方程式の判別式 $D/4=3^2-2\cdot3=3>0$ より, 円と直線は 2 点で交わる. (2) $y=3x+10$ を $x^2+y^2=10$ に代入して, $x^2+(3x+10)^2=10 \Longleftrightarrow x^2+6x+9=0$. この二次方程式の判別式 $D/4=3^2-9=0$ より, 直線は円に接する. (3) $y=3x+15$ を $x^2+y^2=10$ に代入して, $x^2+(3x+15)^2=10 \Longleftrightarrow 2x^2+18x+43=0$. この二次方程式の判別式 $D/4=81-86=-5<0$ より, 円と直線は交わらない.

[別解] 中心 $(0,0)$ と直線の距離 d と半径 $r=\sqrt{10}$ の大小を調べる. (1) $d=\dfrac{|3\cdot0-1\cdot0+5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}<\sqrt{10}$ より $d<r$. よって 2 点で交わる. (2) $d=\dfrac{|0+0+10|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ より $d=r$. よって接する. (3) $d=\dfrac{|0+0+15|}{\sqrt{10}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{10}>\sqrt{10}$ より $d>r$. よって共有点を持たない.

例題 [7]

円 C: $x^2+y^2=4$ とその接線について次の問に答えよ.
(1) 直線 $y=2x+k$ が円 C の接線であるとき, k の値を求めよ.
(2) 円 C の接線で $(0,4)$ を通るものを求めよ.

解答例:(1) $y=2x+k$ を $x^2+y^2=4$ に代入して, $x^2+(2x+k)^2=4$. つまり $5x^2+4kx+k^2-4=0$. この二次方程式の判別式が 0 になればよいので $\left(16k^2-4\cdot5(k^2-4)=0 \Longleftrightarrow\right) 4k^2-5(k^2-4)=0 \Longleftrightarrow k^2=20$ $\therefore k=\pm2\sqrt{5}$ [別解] 直線 $y=2x+k$ が円 C の接線 $\Longleftrightarrow$ (直線と原点の距離 d) = (半径) . 点と直線の距離の公式を用いて $d=\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$ より $d=2$ を解いて $k=\pm2\sqrt{5}$. (2) 求める接線 ℓ を $y=mx+4$ とおく. 原点と直線 ℓ との距離 d が 2 になればよい. 原点を通り ℓ と垂直な直線は $y=-\dfrac{1}{m}x$. またこの 2 直線の交点は, $-\dfrac{1}{m}x=mx+4$ より $x=-\dfrac{4m}{m^2+1}$. このとき $y=\dfrac{4}{m^2+1}$ り交点は $\left(-\dfrac{4m}{m^2+1}, \dfrac{4}{m^2+1}\right)$ よって, 原点と直線 ℓ の距離は $d=\dfrac{4}{m^2+1}\sqrt{m^2+1}=\dfrac{4}{\sqrt{m^2+1}}$ [2]. $d=2$ として, $\sqrt{m^2+1}=2$. ゆえに $m=\pm1$. つまり接線の方程式は $y=x+4$ と $y=-x+4$.

二次曲線

• 放物線 $y=x^2$ は点 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ と直線 $y=-\dfrac{1}{4}$ からの距離が等しい点の軌跡になっている (問題 20 参照). ここでは, 放物線を $y^2=ax$ の形 (二次関数で扱ったグラフを 90° 回転したもの) の放物線を扱う. $\boxed{y^2=4px}$ を放物線の標準形という. **放物線** $y^2=4px$ は点 $F(p,0)$ と直線 $x=-p$ からの距離が等しい点全体の集合になっている. 点 F を放物線の焦点 (focus) といい, 直線 $x=-p$ を放物線の準線という.

[2] 点と直線の距離の公式を用いて $d=\dfrac{|4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{m^2+1}}$ としてもよい.

• 2 点 $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ からの 距離の和が一定 である点の軌跡は, 円をつぶした形をしている. この軌跡を**楕円**という. 楕円の方程式は, 距離の和を $2a$ (ただし $a>c>0$), $b=\sqrt{a^2-c^2}$ として, $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ の形で表される (だ円の標準形). 焦点の座標は a, b を用いて $F(\sqrt{a^2-b^2},0)$, $F'(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ と表される[3].

• 2 点 $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ からの 距離の差が一定 である点の軌跡を**双曲線**という. 双曲線の方程式は 距離の差を $2a$ $(a<c)$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$ として, $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ の形で表される (双曲線の標準形). 焦点の座標は a, b を用いて $F(\sqrt{a^2+b^2},0)$, $F'(-\sqrt{a^2+b^2},0)$ と表される[4]. また直線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ はこの双曲線の漸近線になる.

• $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ ($a\neq 0$ または $b\neq 0$) を満たす点全体の集合を**二次曲線**と言う. 二次曲線には, 放物線・楕円（円も含む)・双曲線（・２直線）があり, またそれらに限られる.

例題 [9]

次の二次曲線の方程式を標準形で答えよ.
(1) 焦点 $(3,0)$, 準線 $x=-3$ の放物線.
(2) 焦点 $(2,0)$, $(-2,0)$ からの距離の和が 6 であるだ円.
(3) 焦点 $(4,0)$, $(-4,0)$ からの距離の差が 6 である双曲線.

解答例：(1) 焦点 $F(p,0)$, 準線 $x=-p$ の放物線の方程式の標準形は $y^2=4px$ だから, 今の場合 $p=3$ として, $y^2=12x$. (2) 焦点 $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ からの距離の和が $2a$ であるだ円の方程式の標準形は $b=\sqrt{a^2-c^2}$ として, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{b^2}=1$ である. 今の場合 $c=2$, $a=3$ として $b=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ より, $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$. (3) 焦点 $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ からの距離の差が $2a$ である双曲線の方程式の標準形は $b=\sqrt{c^2-a^2}$ として, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ である. 今の場合 $c=4$, $a=3$ として $b=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ より, $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$.

不等式と領域

点 $A(p,q)$ と直線 ℓ: $y=ax+b$ の関係について

$q>ap+b$ のとき	$q=ap+b$ のとき	$q<ap+b$ のとき
A は ℓ の上側にある	A は ℓ 上にある	A は ℓ の下側にある

点 $A(p,q)$ と円 C: $x^2+y^2=r^2$ の関係について

$p^2+q^2>r^2$ のとき	$p^2+q^2=r^2$ のとき	$p^2+q^2<r^2$ のとき
A は C の外側にある	A は C 上にある	A は C の内側にある

[3] $a<b$ のとき, 焦点が y 軸上にあるだ円になる.
[4] $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ のとき, 焦点が y 軸上にある双曲線になる.

例題 [10]

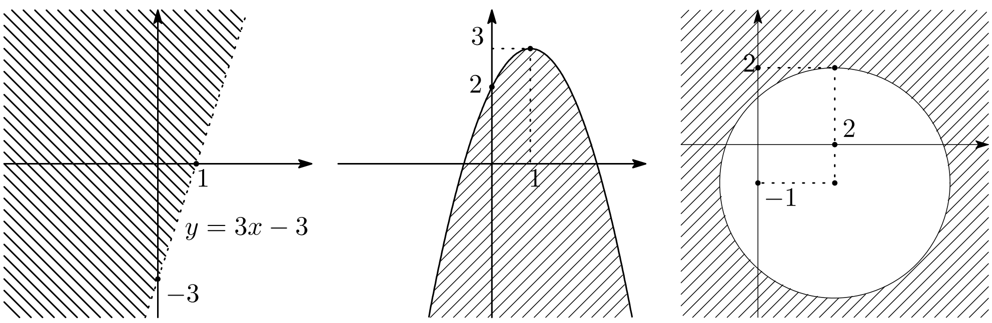
次の点に対して, 直線 ℓ: $y=2x-1$ との関係を調べよ.
(1) 点 $A(3,6)$ (2) 点 $B(-2,-5)$ (3) 点 $C(4,5)$

解答例：(1) ℓ の左辺・右辺にそれぞれ $y=6$, $x=3$ を当てはめると $6>2\cdot3-1$. よって, 点 A は直線 ℓ の上側にある. (2) ℓ の左辺・右辺にそれぞれ $y=-5$, $x=-2$ を当てはめると $-5=2\cdot(-2)-1$. よって, 点 A は直線 ℓ 上にある. (3) ℓ の左辺・右辺にそれぞれ $y=5$, $x=4$ を当てはめると $5<2\cdot4-1$. よって, 点 A は直線 ℓ の下側にある.

例題 [11]

次の不等式の表す領域を図示せよ.
(1) $y>3x-3$
(2) $y\leqq -x^2+2x+2$
(3) $x^2+y^2-4x+2y-4\geqq 0$

解答例：(1) 求める領域は直線 $y=3x-3$ の上側なので下図左のようになる（境界は領域に含まない）. (2) 求める領域は二次関数 $y=-(x-1)^2+3$ の下側なので下図中のようになる（境界も領域に含む）. (3) 求める領域は円 $(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$ の外側なので下図右のようになる（境界も領域に含む）.



A 問題

1 数直線上の二点 $P(-3,6)$, $Q(2,3)$ に対して次の問に答えよ.
(1) 線分 PQ を $3:1$ に内分する点 A を求めよ.
(2) 線分 PQ の 中点 B を求めよ.
(3) 線分 PQ を $1:3$ に外分する点 C を求めよ.
(4) 線分 PR の中点が点 Q になるような点 R を求めよ.

2 次の直線の方程式を求めよ.
(1) 点 $(-2,5)$ を通り, 傾きが $\dfrac{1}{2}$ である直線.
(2) 2 点 $(-3,1)$, $(3,3)$ を通る直線.
(3) 2 点 $(-2,-1)$, $(2,-1)$ を通る直線.
(4) 点 $(-2,4)$ を通り, 直線 $2x+3y-6=0$ に平行な直線および垂直な直線.
(5) 点 $(1,3)$ を通り, 直線 $x=2$ に垂直な直線および垂直な直線.
(6) 2 点 $(a,0)$, $(0,b)$ を通る直線（ただし a, b は 0 でない定数）.

3 以下の 3 点を頂点とする三角形 ABC はどんな三角形か.

(1) $A(1, 2),\ B(-2, 3),\ C(-3, 0)$

(2) $A(1, -1),\ B(-1, 1),\ C(5, 3)$

(3) $A(1, -1),\ B(3, 1),\ C(2 - \sqrt{3}, \sqrt{3})$

4 2 点 $A(6, 1),\ B(2, 3)$ に対して

(1) $A,\ B$ から等距離にある x 軸上の点 P および y 軸上の点 Q の座標を求めよ.

(2) 線分 AB の垂直 2 等分線の方程式を以下の 2 通りの方法で求めよ.

(i) AB の中点を通り線分 AB に垂直な直線として.

(ii) 2 点 $A,\ B$ から等距離にある点 $P(x,\ y)$ の集合として.

5 直線 $\ell : x + 2y - 8 = 0$ と点 $P(3, 5)$ について, 次のものを求めよ.

(1) 点 P を通り, 直線 ℓ と垂直な直線 ℓ' の方程式.

(2) 直線 ℓ と直線 ℓ' の交点 Q (点 P から直線 ℓ に下ろした垂線の足).

(3) 点 P と点 Q の距離 PQ (点 P と直線 ℓ の距離).

(4) 直線 ℓ に関して点 P と対称な点 R の座標.

6 円に関する次の各問いに答えよ.

(1) 中心 $(3, -1)$ で, 半径 4 の円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ の形 (一般形) で表せ.

(2) 円 $x^2 + y^2 + 4x + 8y = 0$ の中心と半径を求め, そのグラフをかきなさい.

【(3)〜(8) の円の方程式を求めよ.】

(3) 中心が $(-1, 4)$ で点 $(-2, -1)$ を通る円.

(4) $(1, -5),\ (-3, 7)$ を直径の両端とする円.

(5) 点 $(a,\ b)$ を中心とし x 軸に接する円.

(6) 3 点 $(-1, -1),\ (1, 5),\ (3, 1)$ を通る円.

(7) 円 $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ と同じ中心をもち, 直線 $x - 2y - 3 = 0$ に接する円.

(8) 2 つの円 $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4x$ の交点と点 $(1,\ 1)$ を通る円.

7 次の条件を満たす点の集合である 2 次曲線の方程式（標準形）を求めよ.

(1) 焦点が $(2, 0)$, 準線が $x = -2$ の放物線.

(2) 焦点 $(1, 0),\ (-1, 0)$ からの距離の和が 4 である楕円.

(3) 焦点 $(3, 0),\ (-3, 0)$ からの距離の差が 4 である双曲線.

(4) 2 点 $(0,\ \sqrt{5}),\ (0,\ -\sqrt{5})$ からの距離の和が 6 である楕円.

(5) 焦点が $(\sqrt{7},\ 0),\ (-\sqrt{7},\ 0)$ で点 $(-4,\ 3)$ を通る双曲線.

(6) 漸近線が $y = \pm 2x$ で点 $(1,\ 0)$ を通る双曲線.

8 次の 2 次曲線の焦点, 漸近線, 準線などを求め, そのグラフをかきなさい.

(1) $4x^2 + y^2 = 4$　(2) $9x^2 + 16y^2 = 144$　(3) $4x^2 - 9y^2 = 36$

(4) $-4x^2 + 9y^2 = 36$　(5) $y^2 = -2x$　(6) $y^2 - 2y - 12x - 35 = 0$

9 次の各問いに答えよ.

(1) 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+k$ が共有点を持つような k の範囲を求めよ.

(2) 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ と直線 $y=mx$ が共有点を持たないような m の範囲を求めよ.

10 次の不等式の表す領域を図示せよ.

(1) $x-y+2>0$　(2) $y \leqq x^2-4x+3$

(3) $x^2+y^2+4y \leqq 0$　(4) $(x+y+1)(x-y-1)>0$

11 連立不等式, $y \leqq x+1$, $y \geqq -x-3$, $y \geqq 3x-3$ の表す領域を U とする.

(1) 領域 U を図示せよ.

(2) 領域 U 内で, $-2x+y$ の最大値・最小値とそのときの (x,y) の値を求めよ

(3) 領域 U 内で, x^2+y^2 の最大値とそのときの (x,y) の値を求めよ

B 問題

12 点 $P(x_1, y_1)$ と直線 ℓ: $ax+by+c=0$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 点 P を通り直線 ℓ に平行な直線は $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ と表せることを示せ.

(2) 点 P を通り直線 ℓ に垂直な直線は $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ と表せることを示せ.

13 次の点と直線との距離を求めよ.

(1) 点 $(0,0)$ と 直線 $y=4x+5$.

(2) 点 $(1,2)$ と直線 $3x-2y+5=0$.

(3) 点 $(-1,3)$ と直線 $y=mx+2$.

14 平面上の 2 点 $A(1,\ 2)$, $B(4,\ 1)$ に対して

(1) A, B, C を頂点とする正三角形の他の頂点 C の座標を求めよ.

(2) O(原点), A, B を 3 頂点として平行四辺形 $OABD$ をつくるときの頂点 D の座標を求めよ.

15 直線 ℓ : $(3a-4)x+(5-a)y=2a+12$ について

(1) ℓ が直線 $y=2x$ と平行になるときの定数 a を求めよ.

(2) ℓ は, 定数 a の値に関係なく必ずある定点を通ることを証明せよ.

16 次の円の接線の方程式（および接点の座標）を求めよ.

(1) 円 $x^2+y^2=4$ 上の点 $(1,\ \sqrt{3})$ における接線（公式 $x_0x+y_0y=r^2$ は用いないこと）.

(2) 原点から円 $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ に引いた接線（および接点の座標）.

(3) 円 $x^2+y^2=4$ の接線で y 切片が 4 のもの（および接点の座標）.

(4) 円 $(x-5)^2+y^2=25$ の接線で傾きが $\dfrac{4}{3}$ のもの.

17 次のうち, 円が一つに定まるものを選び, その方程式を答えよ.

(a) 2 点 $A(-1, 3)$, $B(3, 1)$ を通る円.

(b) 2 点 $A(-1, 3)$, $B(3, 1)$ を直径の両端とする円.

(c) 2 点 $A(-1, 3)$, $B(3, 1)$ を通り, 半径が $\sqrt{10}$ の円.

(d) 3 点 $A(-1, 3)$, $B(3, 1)$, $C(-1, 1)$ を通る円.

(e) 4 点 $A(-1, 3)$, $B(3, 1)$, $C(-1, 1)$, $D(2, 4)$ を通る円.

(f) 4 点 $A(-1, 3)$, $B(3, 1)$, $C(-1, 1)$, $E(-2, 4)$ を通る円.

18 中心が $A(7, 1)$ である円 C に原点 O から引いた 2 つの接線が垂直に交わるとき, 円 C の方程式を求めよ.

19 $A(1, 3)$, $B(3, 2)$ と原点中心で半径が $\sqrt{5}$ の円 C の上にある点 P について, 次の問に答えよ.

(1) 原点と 2 点 A, B を通る直線 ℓ の距離を求め, 円 C と ℓ の関係を調べよ.

(2) 円と接する直線で, 傾きが m である直線の方程式を m を使って表せ.

(3) ℓ と平行な円 C の接線とそのときの接点を求めよ.

(4) 三角形の面積 ΔABP が最大・最小になるときの点 P の座標を求めよ.

20 点 $A\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ と直線 $y = -\dfrac{1}{4}$ からの距離が等しい点 P の軌跡が, 放物線 $y = x^2$ になっていることを確かめよ.

21 次の点の軌跡（の方程式）を求め，そのグラフをかきなさい.

(1) 2 点 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ からの距離の比が $3 : 1$ である点 P の軌跡.

(2) 2 点 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ からの距離の和が 10 である点 Q の軌跡.

(3) 2 点 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ からの距離の差が 4 である点 R の軌跡.

(4) 2 点 $A(-2, 4)$, $B(3, -6)$ に対し $AS : BS = 2 : 3$ を満たす点 S の軌跡.

(5) 長さ l の線分の両端がそれぞれ x 軸, y 軸上を動くとき, その線分の中点 T の軌跡.

22 xy 平面内に 3 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ がある.

(1) $\triangle ABC$ の重心 G の座標は, $G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ で与えられることを証明せよ.

(2) $\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB を $m : n$ に内分する点をそれぞれ点 L, M, N とおく. このとき, $\triangle ABC$ の重心と $\triangle LMN$ の重心は一致することを証明せよ.

23 2 つの円 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 10 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - y - 16 = 0$ について

(1) 2 つの円の交点を通る直線の方程式を求めよ.

(2) 2 つの円の交点および原点を通る円の方程式を求めよ.

24 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

(1) $\begin{cases} x+2y<2 \\ x^2+4y^2<4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} xy \geqq 1 \\ x-y \leqq 0 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 4x^2-y^2 \leqq 4 \\ |y| \leqq 2 \end{cases}$

C 問題

25

問題 [rank A]

(1) 2 点 $P(1,1)$, $Q(5,3)$ が向かい合う頂点であるようなひし形の残りの頂点はどのような直線上にあるか. また 3 点目が $(a,1)$ であったときの, a の値と残りの頂点の座標を求めよ.
(2) 2 点 $P(1,1)$, $Q(5,3)$ を頂点として持つ正方形の残りの頂点の座標を求めよ.

26

問題 [rank A]

次の問に答えよ.
(1) 直線 $y=\sqrt{3}x$ と x 軸 (直線 $y=0$) で平面は 4 つの領域に分割できるが, そのうち点 $P(-3\sqrt{3},-1)$ を含む領域を斜線で示せ.
(2) 直線 $y=\sqrt{3}x$ と x 軸に接し, 点 $(-3\sqrt{3},-1)$ を通る円の半径 r を求めよ.

27

問題 [rank B]

連立不等式
$$x^2+y^2+2x-3 \leqq 0, x^2+y^2-2x-3 \leqq 0, y \geqq 0$$
が表す領域 U について次の問に答えよ.
I(1) 領域 U を図示せよ.
(2) U の点 (x,y) に対し, $x^2+y^2-10x-16y$ の最大値・最小値とそのときの点を求めよ.
II(1) U の任意の 2 点 P, Q に対し $PQ \leqq 2$ となり, 等号成立は P または Q が $(-1,0)$ または $(1,0)$ のときに限られることを示せ.
(2) 平面上の 4 点 A, B, C, D に対し, $AB=CD=2$ で, AC, AD, BC, BD はすべて 2 以下であるという. このとき, 線分 AB と CD は必ず交わることを示せ.

28

問題 [rank C]

平面上の n 点で, すべての点が同一直線上にないような配置を考える（n は 2 以上の自然数）. 任意の 2 点を直線で結んだとき, 直線上に 2 点しかのっていない直線が含まれていることを示せ.

個数の処理の問題

9）個数の処理

場合の数

ある事象において, 起こりうるすべての場合を数えるとき, その総数を**場合の数**という.

和の法則

同時に起こらない事象 A, B について, A の起こり方が m 通り, B の起こり方が n 通りあるとき, A または B の起こる場合の数は $m+n$ 通りある.

積の法則

事象 A の起こり方が m 通り, その各々に対して事象 B が n 通りずつ起こるとき,
A, B がともに起こる場合の数は $m \times n$ 通りある.

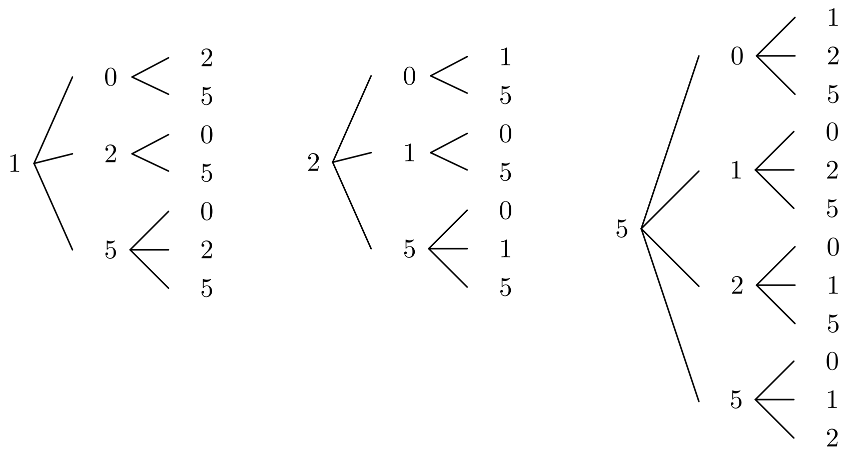
例題 [1]

5 つの数字 $0, 1, 2, 5, 5$ を並べて出来る次の数は何通りあるか答えよ.

(1) 3 桁の偶数.

(2) 3 桁の 5 の倍数.

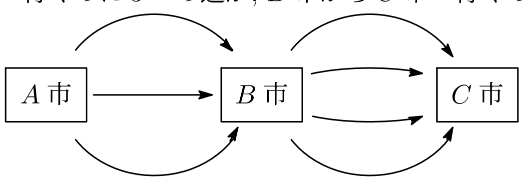
解答例：樹形図により調べる (0 から始まる数は 2 桁の数になる).



(1) 12 通り.　(2) 1 桁目が 0 または 5 のとき, 5 の倍数になるので 16 通り.

例題 [2]

次の図のように A 市から B 市へ行くのに 3 つの道が, B 市から C 市へ行くのに 4 つの道がある．このとき次の問に答えよ.



(1) A 市から C 市へ行き, また A 市まで戻る道は何通りあるか答えよ.

(2) A 市から C 市へ行き, 同じ道を通らずに A 市まで戻る方法は何通りあるか答えよ.

解答例：(1) $3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$ 通り.　(2) $3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$ 通り.

例題 [3]

次の約数の個数を求めよ.
(1) $2^4 \cdot 3^2$ の約数の個数.
(2) 600 の約数の個数.
(3) 600 の約数で偶数の個数.

解答例：(1) 約数は $2^a \cdot 3^b$ $(a = 0,1,2,3,4, b = 0,1,2)$ と表せるので $5 \times 3 = 15$ 個. (2) $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ により約数は $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ $(a = 0,1,2,3, b = 0,1, c = 0,1,2)$ と表せるので $4 \times 2 \times 3 = 24$ 個. (3) 偶数の約数は $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ $(a = 1,2,3, b = 0,1, c = 0,1,2)$ と表せるので $3 \times 2 \times 3 = 18$ 個.

順列

いくつかのものに順序をつけて 1 列に並べたものを**順列**という.
異なる n 個のものから異なる r 個を選び, 1 列に並べる並べ方を n **個から** r **個をとる順列**といい, その総数を ${}_n\mathbf{P}_r$ と表す.

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}} $$

${}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ を n の**階乗**といい, $\mathbf{n}!$ と表す.

$$ n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 $$

$0! = 1$ と定義することにより, 0 以上 n 以下の整数 r に対して順列の総数は次のように表せる.

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

円順列

いくつかのものを円形に並べたものを**円順列**という. 異なる n 個のものの円順列の総数は $(n-1)!$ である.

重複順列

異なる n 個のものから繰り返しとることを許して r 個を取り出し並べる順列を n **個から** r **個をとる重複順列**といい, ${}_\mathbf{n}\mathbf{\Pi}_\mathbf{r}$ と表す.

$$ {}_n\Pi_r = n^r $$

同じものを含む順列

a が p 個, b が q 個, c が r 個, $\cdots$ について, これら $n = p + q + r + \cdots$ 個を 1 列に並べて出来る順列の総数は $\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots}$ である.

例題 [4]

次を満たす数は何通りあるか答えよ.
(1) $1,2,3,4,5$ を一度ずつ使ってできる 3 桁の数.
(2) 同じ数を何回使っても良いので, $1,2,3,4,5$ の中の数を並べてできる 3 桁の数.
(3) $1,2,2,3,3,3$ を一度ずつ使ってできる 6 桁の数.
(4) $1,2,2,3,3,3$ から選んだ 4 つを一度ずつ使ってできる 4 桁の数.

解答例：(1) ${}_5\mathrm{P}_3 = 60$ 通り. (2) ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$ 通り. (3) $\dfrac{6!}{1!2!3!} = 60$ 通り.

(4) $\{2,3,3,3\}$ により作られる数は $\dfrac{4!}{1!3!}=4$ 通り, $\{2,2,3,3\}$ により作られる数は $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り, $\{1,3,3,3\}$ により作られる数は $\dfrac{4!}{1!3!}=4$ 通り, $\{1,2,3,3\}$ により作られる数は $\dfrac{4!}{1!1!2!}=12$ 通り, $\{1,2,2,3\}$ により作られる数は $\dfrac{4!}{1!2!1!}=12$ 通り. 以上を足し合わせて 38 通り.

例題 [5]

男子 4 人, 女子 2 人が円卓に座るとき, 次のような座り方は何通りあるか答えよ.
(1) 6 人の座り方の総数.
(2) 女子 2 人が隣り合う座り方.
(3) 女子 2 人が向かい合う座り方.
(4) 男子 4 人, 女子 2 人をそれぞれ区別しないときの座り方 (男女の違いだけを考える).

解答例：(1) $(6-1)!=120$ 通り.　(2) 2 人の女子を 1 つと考え円卓への座り方を数え, 女子の並び方を考えると $(5-1)!\times 2=48$ 通り.　(3) 向かい合う女子の席を固定し, 男子の座り方のみを考えれば良いので $4!=24$ 通り.　(4) 女子の位置関係だけを考えるので 3 通り.

組合せ

異なる n 個のものから異なる r 個の選び方を n **個から** r **個をとる組合せ**といい, その総数を ${}_n\mathbf{C}_r$ と表す.

$$ {}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個の積}}}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!} $$

また, 次の式が成り立つ.

$$ {}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}\ (0\leqq r\leqq n),\quad {}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r\ (1\leqq r\leqq n-1) $$

重複組合せ

異なる n 個のものから繰り返しとることを許して r 個の選び方を n **個から** r **個をとる重複組合せ**といい, その総数を ${}_n\mathbf{H}_r$ と表す.

$$ {}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

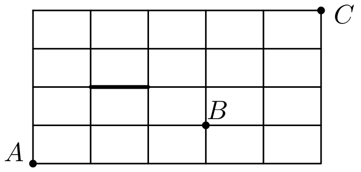
例題 [6]

4 種類の果物 (いちご, なし, りんご, みかん) がある. ここから 3 つの果物を選ぶ. 次のような選び方は何通りあるかを答えよ.
(1) 重複なく 3 つの果物を選ぶ方法.
(2) 重複なく 3 つの果物を選び, 食べる順番まで決める方法.
(3) 重複を認めて 3 つの果物を選び, 食べる順番まで決める方法.

解答例：(1) ${}_4\mathrm{C}_3=4$ 通り.　(2) ${}_4\mathrm{P}_3=24$ 通り.　(3) ${}_4\Pi_3=4^3=64$ 通り.

例題 [7]

次の図において最短距離で移動する道が何通りあるかを答えよ.



(1)　A から C まで移動する道は何通りあるか.

(2)　A から C へ, 太線の道を通って移動する道は何通りあるか.

(3)　A から B を通らずに C へ移動する道は何通りあるか.

解答例：(1)　9 回の移動のうち右に移動する 5 回を選べば良いので ${}_9\mathrm{C}_5 = 126$ 通り.

(2)　${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_3 = 30$ 通り

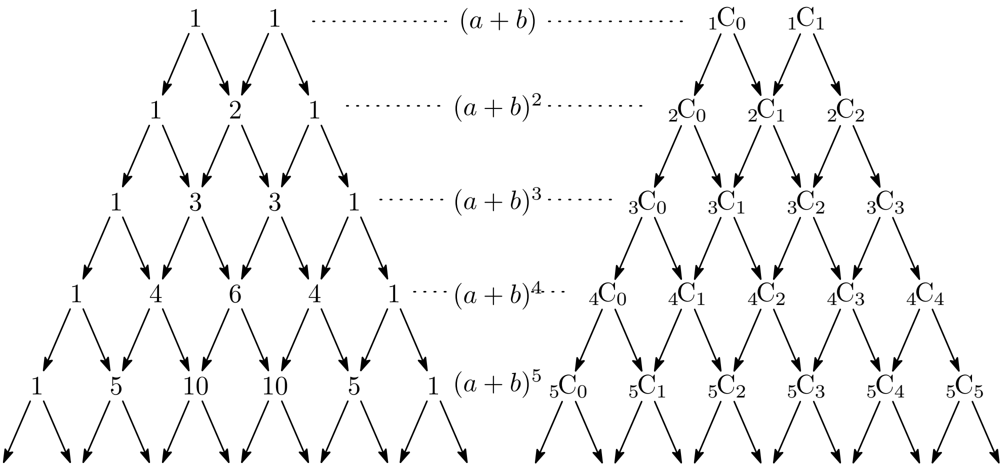
(3)　全体から B を通る道を引けば良いので, $126 - {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 86$ 通り.

二項定理

$(a+b)^n$ を展開したとき, $a^{n-k}b^k$ の項を考えるとき $\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{ 個の積}}$ のうち, b を選ぶ方法が ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りなので, $a^{n-k}b^k$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_k$ になる. よって, 次が得られる.

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n.$$

下図を**パスカルの三角形**と呼び, これを用いて二項定理の係数を決定できる.



例題 [9]

次の問に答えよ.

(1)　$(a+b)^6$ を展開せよ.

(2)　$(2x-1)^4$ を展開せよ.

(3)　$(3x+2y)^{10}$ の展開式において, $x^{10-k}y^k$ の係数を求めよ.

解答例：(1)　$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

(2)　$(2x)^4 + 4(2x)^3(-1) + 6(2x)^2(-1)^2 + 4(2x)(-1)^3 + (-1)^4 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$.

(3)　第 k 項は ${}_{10}\mathrm{C}_k(3x)^{10-k}(2y)^k$ と表せるので, 係数は ${}_{10}\mathrm{C}_k 3^{10-k}2^k$.

A 問題

1 次を計算せよ.

(1) $4!$ (2) ${}_7\mathrm{P}_3$ (3) ${}_7\mathrm{C}_5$ (4) ${}_{10}\mathrm{C}_7$ (5) ${}_4\Pi_3$

2 次を満たす数はいくつあるかを答えよ.

(1) 4 桁の数 (2) 各桁の数が互いに異なる 4 桁の数

(3) 千の位より百の位, 百の位より十の位, 十の位より一の位が小さい 4 桁の数

(4) $\{1, 2, 3\}$ だけを使って出来る 6 桁の数 (5) 各桁の数が互いに異なる 4 桁の 5 の倍数

3 8 人の部員から 5 人の選手で試合に出場するとき, 次のような選び方は何通りあるかを答えよ.

(1) 先鋒, 次鋒, 中堅, 副将, 大将まで決める方法

(2) 試合の出場順は決めずに 5 人の選手だけを選ぶ方法

4 男子 5 人, 女子 4 人から 3 人を選ぶとき, 次のような選び方は何通りあるかを答えよ.

(1) すべての選び方. (2) 全て男子の選び方. (3) 少なくとも 1 人は男子が含まれる選び方.

5 正 10 角形について次の数を答えよ.

(1) 長さが最も長い対角線の本数.

(2) 対角線の総数.

(3) 正 10 角形の頂点を結んで出来る三角形の総数.

6 $A, B, C, D.E, F, G, H$ の 8 人が円形に座るとき, 次のような方法は何通りあるかを答えよ.

(1) 円形に座るすべての方法.

(2) 8 人のうち 5 人を選び円に並ぶ方法.

(3) 4 人ずつに分かれて 2 つの円をつくる方法.

7 次を展開せよ.

(1) $(x+y)^4$ (2) $(a-1)^9$ (3) $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$

B 問題

8 次の等式を証明せよ.

(1) ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ (2) ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$

9 4 つのアルファベット M, A, T, H を使って (重複して利用して良い), パスワードを作るとき, 次のような条件を満たすパスワードは何通りあるかを答えよ.

(1) 5 文字のパスワードをつくるとき（4 つのアルファベット全てを利用する必要はない）.

(2) 4 つのアルファベットを全て利用して 5 文字のパスワードをつくるとき.

(3) 3 つのアルファベットを利用して 5 文字のパスワードをつくるとき.

10 大人 3 人, 子供 6 人が円形に座るとき, 次のような座り方は何通りあるかを答えよ.

(1) 円形に座るすべての座り方

(2) 大人 3 人が隣り合う座り方.

(3) 大人 3 人が等間隔に座る方法,

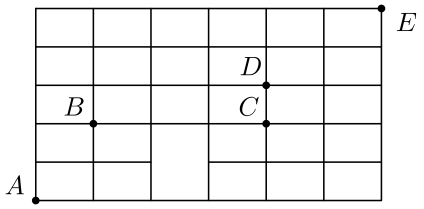
(4) 大人 3 人が隣り合わない座り方. (3 人のうち 2 人は隣に座ってもよい.)

11 (1) $x+y+z=8$ を満たすような, 0 または正の整数 $x,\ y,\ z$ の組は何個あるか.

(2) $x+y+z=8$ を満たすような, 正の整数 $x,\ y,\ z$ の組は何個あるか.

(3) 8 をいくつかの 1 と 2 の和で表すとき, その表し方は何通りあるか.

12 次の図において最短距離で移動するとき何通りあるかを答えよ.



(1) B から E へ移動する方法.

(2) A から E へ移動する方法.

(3) A から E へ CD を通らずに移動する方法.

13 赤玉と白玉が 1 つずつ入った中の見えない箱がある．玉を引き色を確認した後, 引いた玉を元に戻すことを 6 回繰り返すとき, 次のような引き方は何通りあるかを答えよ.

(1) 赤白の並び方の総数.

(2) 赤玉を 3 個引く場合の数.

(3) 赤玉を引いたのが 2 個以下の場合の数.

14 赤玉 3 つ, 青玉が 2 つ, 黄玉が 1 つあるとき, 次のような並べ方は何通りあるかを答えよ.

(1) 6 つを 1 列に並べる方法.　(2) 5 つの玉を選び 1 列に並べる方法.

(3) 6 つを円形に並べる方法.　(4) 6 つに糸を通しネックレスを作る方法.

15 バナナ, リンゴ, メロンを組み合わせて 8 つを購入するとき, 次のような組合せは何通りあるか.

(1) 3 種類の果物すべてを少なくとも 1 つは含む場合.

(2) 2 種類の果物により購入するとき.

(3) すべての組合せ.

16 次を展開したときの括弧内の項の係数を答えよ.

(1) $(2x-1)^5$ $[x^3]$　(2) $\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^7$ $[x^5]$

(3) $\left(\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ [定数項]　(4) $(a+b+c)^7$ $[a^2b^3c^2]$

17 2 点 $(3x+2)^{10}$ の展開式における x^r の係数を a_r とおく.

(1) $a_r < a_{r+1}$ となる r の範囲を求めよ.　(2) 係数 a_r のうち最大のものは何か.

18 直線 $(2a-4b+c)^5$ の展開式において

(1) a^2bc^2 の係数を求めよ.　(2) 項は全部でいくつあるか？　(3) 係数の総和を求めよ.

19 次の等式を証明せよ.

(1) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

(3) ${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+{}_n\mathrm{C}_2{}^2+{}_n\mathrm{C}_3{}^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$

C 問題

20

問題 [rank A]

どの 2 本も平行でない n 本の直線をひいたとき, 交点の数を $f(n)$, 直線が作る三角形の数を $g(n)$ とする. このとき, 次の問に答えよ.
(1) $f(3), f(4), f(5)$ を求めよ.
(2) $g(3), g(4), g(5)$ を求めよ.
(3) $f(n), g(n)$ を n の式で表せ.

21

問題 [rank A]

$(x+y+kz)^6$ を展開したとき x^3y^2z の係数が -10 である k の値を求めよ. また, このとき yz^5 の係数を求めよ.

22

問題 [rank B]

正四面体の各面を 4 色の色で塗り分ける方法は何通りあるかを答えよ. また, 立方体の各面を 6 色の色で塗り分ける方法は何通りあるかを答えよ.

23

問題 [rank B]

ある人が階段を上がるとき, 1 歩で 1 段または 2 段あがるとする. 全部で 12 段の階段を上がる方法は何通りあるかを答えよ.
(1) 全部で 12 段の階段を上がる歩数は何通りあるかを答えよ.
(2) 全部で 12 段の階段を上がる方法は何通りあるかを答えよ.

24

問題 [rank C]

大きさが同じ 5 つのボールを大きさが同じ 3 つの箱に入れるとき, 次のような入れ方は何通りあるかを答えよ.
(1) すべてのボール, すべての箱を区別しないとき.
(2) ボールのみが 5 色に塗り分けられているとき (箱は区別しない).
(3) 箱のみが 3 色に塗り分けられているとき (ボールは区別しない).
(4) ボールが 5 色に, 箱が 3 色に塗り分けられているとき.

基礎数学問題集　答

数と式の問題　答.

1 (1) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$　(2) $\frac{b}{a}$
(3) $27x^3-9x^2+x-\frac{1}{27}$　(4) $-\frac{8}{27}a^6b^3x^3y^9$
(5) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$　(6) $x^2-y^2-z^2+2yz$
(7) $p^2+4q^2+9r^2-4pq-12qr+6rp$　(8) $s^4+s^2t^2+t^4$
(9) $x^4+10x^3+25x^2-36$　(10) $\frac{x^3}{8}+8y^3$
(11) a^6-1　(12) $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

2 (1) $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$　(2) $(a-2)(a+2)(a^2+3)$
(4) $(3t+5)(t-2)$　(4) $(a-b)(b+c)$
(5) $(x-3)^3$　(6) $(6x-y)(x+3y)$
(7) $(a-b)(ab+bc+ca)$　(8) $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$
(9) $(2a-b)^3$　(10) $(p^2+3pq+5q^2)(p^2-3pq+5q^2)$
(11) $(ar+b+rt)(ar-b-rt)$　(12) $(2ab+a+b-1)(ab+a-2b+1)$
(13) $(a+2b)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$　(14) $(2x+y-1)(x-y-2)$

3 (1) $(2x+y-2)(x-y+3)$ (2) $(3a-b+4)(a-b-2)$ (3) $2(2x-y-5)(x-y-1)$ (4) $(3x-y-3)(x+y+5)$ (5) $(p+2q-3)(p-2q-4)$ (6) $(x+3y-2)(x-y+6)$ (7) $a(2x-3y-4)(3x-2y+2)$ (8) $(2x-2y-5)(3x+2y-3)$ (9) $(a+b+c)(a+b)$ (10) $(x+2y-z)(x-y)$

4 (1) 7 (2) $\frac{31+27\sqrt{5}}{44}$　(3) $\frac{2ax^2}{3by}$　(4) $\frac{(2x+1)(x^2-2x+4)}{x-1}$　(5) $\frac{x+y}{xy}$　(6) $\frac{x^3-4x^2+2x}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)}$
(7) $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (8) $\frac{1-x}{2}$　(9) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$　(10) $\frac{7+3\sqrt{3}-\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{11}$　(11) $\frac{a-b}{a+b}$　(12) $x-\sqrt{x^2-1}$

5 (1) 12　(2) 12　(3) 142　(4) 1692

6 (1) $2-\sqrt{6}$　(2) $x=5,\ -2$　(3) (i) 15　(ii) $2-\sqrt{3}$　(iii)$x \geqq -2$ のとき $x+2$, $x<-2$ のとき $-(x+2)$　(4) (i) -1　(ii) -5　(iii) $2\sqrt{5}-1$

7 (1) $G.C.D.=a(b+2),\ L.C.M.=a^2(b+2)(b^4-16)$.
(2) 最大公約数は $x-5$, 最小公倍数は $(x-5)(x-2)(3x+2)$.
(3) 最大公約数は $x-1$, 最小公倍数は $(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)$.

8 (1) $A=2x^3-x^2-4$　(2) $B=x^2+2x+3$　(3) $c=2$

9 (1) $L=(x+2)PQ$　(2) $A=(x+2)(x-2),\ B=(x+2)(x^2+1)$

10 仮定より $a=-3,\ b=-4$. このとき A と B の最小公倍数は $(x-1)(2x+3)(3x-5)$.

11 (1) ×　(2) ○　(3) ×　(4) ○　(5) ×　(6) ○

12 (1) 成り立たない　(2) $a>0,\ b<0$　(3) $a=-6,\ b=2$　(4) (i) $a^2>b^2$ (ii) $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

13 (1) $x=1, 2$　(2) $-2<x<3$　(3) $x>8$ または $x<2$　(4) $x=\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2}$　(5) $0\leqq x\leqq 1$

14 (1) 40 個で和は 60. (2) 14 個で和は 21.

答

15 (1) $\frac{1}{a}-1$　(2) $a<-3$ のとき $-(a-3)+(a+3)=6$, $-3 \leqq a < 3$ のとき $-(a-3)-(a+3)=-2a$, $a \geqq 3$ のとき $(a-3)-(a+3)=-6$.　(3) $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

16 (1) $\frac{2x(x+9)}{(2x-1)(x-1)(3x+2)}$　(2) $\frac{(2x+1)(x^2-2x+4)}{x-1}$　(3) $\frac{1}{xy(x+y)}$　(4) $\frac{x^3-4x^2+2x}{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}$　(5) 0
(6) $\frac{8a^7}{a^8-b^8}$　(7) $-\frac{xy}{x+y}$　(8) $\frac{c-1}{c}$　(9) $\frac{x}{x^2+2x+4}$　(10) $\frac{2(2a^2+7a-8)}{(a-1)(a+2)(2a-3)}$

17 (1) $\frac{137}{111}$　(2) $\frac{5}{12}$　(3) $(x^2-2x+2)-\frac{3}{x+2}$　(4) $(t+3)+\frac{7t-6}{t^2-3t+2}$

18 (1) $\sqrt{6}-1$　(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$　(3) $\sqrt{10}+\sqrt{2}$　(4) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　(5) $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}$

19 $4+\sqrt{3}$

20 整式 A, B は $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x+3)$ または $(x-1)$, $(x-1)(x-2)(x+3)$（順不同）.

21 (1) 0　(2) $-(a-b)(b-c)(c-a)$　(3) 1 ((2) を用いた）

22 $\angle A=90^\circ$ の直角三角形または $\angle B=90^\circ$ の直角三角形.
【注：長さ a, b, c の辺に向かい合う頂点をそれぞれ A, B, C と書いた.】

23 (1) $ac+ad+ae+bc+bd+be$. (2) 分配法則により $2\times3\times4\times5=120$ 個の項が出てくる.
(3) ac^2e の係数は 1. $abce$ の係数は 4. 文字 a に着目したときの a^3 の係数は $4b+3c+2d+e$.

24 $x^2-1=(x-1)(x+1)$, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$, $x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, $x^8-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$, $x^9-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$, $x^{12}-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

25 (1) $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-1$.　(2) $x=3$ のとき, $N=1$ となる.

26 $(x,y)=(6,4),\ (4,6),\ (2,16),\ (16,2)$

27 (1) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
(2) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=(a+b+c)(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)$

28 (1) $5x+3$　(2) -19　(3) $-7x-40$

29 (1) $\frac{2}{a}$　(2) t

30 $(x,y)=(1001,1004)$

等式と不等式の問題　答.

1 (1) $a=3,\ b=5,\ c=-1$　(2) $a=3,\ b=-3,\ c=-1$
(3) $a=-1,\ b=2$　(4) $a=3,\ b=-3,\ c=2$

2 (1) 剰余の定理より 2.　(2) $\frac{49}{8}$　(3) $\frac{11x+19}{4}$　(4) $a=-\frac{11}{3},\ b=-\frac{14}{3}$

3 (1) $(x-1)(2x-3)(5x+6)$　(2) $(x-1)(x-2)(x^2-x+5)$　(3) $(x+2)(2x-1)^2$

4 (1) $x=1,\ \frac{2}{3},\ -2$　(2) $x=-1,\ 2,\ \frac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$　(3) $\omega=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$　(4) $x=\pm2,\ \pm2i$
(5) $x=3\pm\sqrt{5}$　(6) $x=-4,\ 3$　(7) $x=3$　(8) $x=0,\ 5,\ \frac{5\pm\sqrt{15}\,i}{2}$
(9) $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　(10) $x=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -1\pm\sqrt{2}$

5 (1) 証明略. 等号が成り立つのは $x=1,\ y=-1$ のとき.
(2) 証明略.
(3) 証明略. 等号は $ay=bx$ すなわち $a:b=x:y$ のとき.
(4) 証明略. 等号が成り立つのは $\frac{b}{4a}=\frac{a}{b}$ すなわち $4a^2=b^2$ $\therefore 2a=b$ のとき.
(5) 証明略. 等号が成り立つのは $a=b$ のとき.
(6) 証明略. 等号が成り立つのは $a=b$ かつ $c=d$ のとき.

6 (1) 2つの異なる実数解　(2) 虚数解　(3) 実数解（2重解か2つの異なる実数解）

7 証明略.

8 (1) $\frac{3x-7}{(x+3)(x-1)}=\frac{4}{x+3}-\frac{1}{x-1}$　(2) $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{1}{9}\left\{\frac{4}{x-1}+\frac{6}{(x-1)^2}+\frac{5}{x+2}\right\}$
(3) $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)$　(4) $\frac{x^2-2x+3}{(x+1)^3}=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{6}{(x+1)^3}$

9 (1) $-3<x<-1,\ 2<x$　(2) $-1\leqq x\leqq -\frac{1}{2},\ 1\leqq x\leqq 2$
(3) $x\leqq -\frac{1}{2},\ x=0,\ \frac{1}{2}\leqq x$　(4) $-2\leqq x\leqq 1$

10 (1) $x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}$　(2) $\frac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+x-2}=x+1+\frac{-2x+3}{x^2+x-2}=x+1+\frac{1/3}{x-1}-\frac{7/3}{x+2}$
(3) $x\leqq -4,\ 0<x\leqq 1$　(4) $-2\leqq x\leqq 2$

11 正三角形【なぜ正三角形しかあり得ないのかをきちんと証明すること.】

12 (1) 求める余りは $\frac{-x+1}{2}$.　(2) $a=2$, 求める余りは -7.

13 (1) 証明略. 等号は $a=b$ のとき.
(2) 証明略. 等号は $p:q:r=x:y:z$ のとき成り立つ.
(3) 証明略. 等号は $x=y=z=w=\frac{1}{2}$ のとき.

14 証明略.【例えば, 文字をひとつ消去せよ.】

15 (1) 証明略.　(2) $m=40$ のとき3つの解は $5,\ 2,\ -4$, または $m=0$ のとき3つの解は $6,\ 0,\ -3$.
(3) $x^3+(2\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2})x^2+(\frac{c^2}{a^2}-2\frac{bd}{a^2})x-\frac{d^2}{a^2}=0$ または分母を払って $a^2x^3+(2ac-b^2)x^2+(c^2-2bd)x-d^2=0$.

答

16 (1) 証明略. 等号は $x=y=z$ のとき成り立つ.
(2) 記号は異なるが, (1) と同じ不等式である. (3) 証明略. 等号は $a=b=c$ のとき成り立つ.

17 (1) $-1<x<4.$ (2) $x<1,\ 3<x$ (3) $1 \leqq x \leqq 4$
(4) $-2 \leqq x < 3,\ 5 \leqq x$ (5) $-3<x<1,\ 2<x$ (6) $-1<x \leqq -\frac{2}{3},\ 0<x \leqq 1$

18 証明略.

19 $a<0$ のとき $a<x<0$ または $1<x$, $a=0$ のとき $1<x$, $0<a<1$ のとき $0<x<a$ または $1<x$, $a=1$ のとき $0<x<1$ または $1<x$, $1<a$ のとき $0<x<1$ または $a<x$.

20 $x=0,\ y=-z=\pm 3$ または $y=0,\ x=-z=\pm 3$ または $z=0,\ x=-y=\pm 3.$

21 証明略.

22 $2,\ -3$

23 (1) 十分条件 (2) 必要十分条件 (3) 必要条件 (4) 必要条件

24 (1) $\frac{1/6}{(1-q)^3}+\frac{1/4}{(1-q)^2}+\frac{17/72}{1-q}+\frac{1/8}{1+q}+\frac{(2+q)/9}{1+q+q^2}$ (2) $\frac{1/6}{(1-q)^3}+\frac{1/4}{(1-q)^2}+\frac{1/4}{1-q^2}+\frac{1/3}{1-q^3}$
(3) $p(1,3)=1,\ p(2,3)=2,\ p(3,3)=3,\ p(4,3)=4,\ p(5,3)=5,$
$p(6,3)=7,\ p(7,3)=8,\ p(8,3)=10,\ p(9,3)=12,\ p(10,3)=14$
(4) (5) 懸賞問題！

集合と論理の問題　答.

1 (1) $\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ (2) $\overline{B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10\}$ (3) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$
(4) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 5,\ 7\}$ (5) $\overline{A\cup B}=\{1,\ 5,\ 7\}$ (6) $\overline{A\cap B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

2 (1) $A\cap B=\{x\,|\,0\leqq x<2\}$ (2) $A\cup B=\{x\,|\,-2<x\leqq 3\}$ (3) $\overline{A}=\{x\,|\,x\leqq -2,\ 2\leqq x\}$
(4) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{x\,|\,x\leqq -2,\ 3<x\}$ (5) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{x\,|\,x<0,\ 2\leqq x\}$ (6) $\overline{A\cap B}=\{x\,|\,x<0,\ 2\leqq x\}$
(7) $\overline{A\cup\overline{B}}=\{x\,|\,2\leqq x\leqq 3\}$

3 (1) n は素数でない（n は合成数である） (2) $x=-1$ (3) $x\geqq -1$ (4) $x<-10$
(5) $x\neq 2$ または $y\neq 1$ (6) $x\leqq 2$ かつ $y>-1$ (7) x,y の少なくとも一方は 0 以上である
(8) x,y はともに 0 以上である

4 (1) 命題は真, 逆は偽, 裏も偽, 対偶は真. (2) 命題は偽である. 逆, 裏, 対偶はない.
(3) 命題は偽, 逆は真, 裏も真, 対偶は偽. (4) 命題は偽, 逆は真, 裏も真, 対偶は偽.
(5) $a^3-1=0$ の実数解は $a=1$ のみとなる. よって命題, 逆, 裏, 対偶ともに全て真である.

5 (1) 十分 (2) いずれでもない (3) 必要十分 (4) 必要 (5) 必要十分 (6) 十分 (7) 必要 (8) 十分

6 (1) $x<-2$ を満たす実数 x の集合を P, $x<0$ を満たす実数 x の集合を Q とすると $P\subset Q$ が成り立つ. よって命題は真である. (2) 命題は真である. (3) $|x|<3$ つまり $-3<x<3$ を満たす実数 x の集合を P, $x<1$ を満たす実数 x の集合を Q とする. 例えば, $x=2$ は $2\in P$ ではあるが $2\notin Q$ であるため, $P\not\subset Q$ である. よって命題は偽である. (4) 命題は真である.

7 (1) 真. (2) $ax^2+bx+c=0$ の解は, 公式より $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となる. よって偽.
(3) $ab=0$ は a,b の少なくとも一方が 0 であることを意味するので, 命題は偽である.

8 (1) $A\cap B,\ n(A\cap B)=16$ (2) $A\cup B,\ n(A\cup B)=67$ (3) $\overline{A},\ n(\overline{A})=50$ (4) $\overline{A}\cap\overline{B},\ n(\overline{A}\cap\overline{B})=33$
(5) $B\cap\overline{C},\ n(B\cap\overline{C})=27$ (6) $A\cup B\cup C,\ n(A\cup B\cup C)=74$

9 (1) 元の命題は真, 逆は「 n は 4 の倍数 ならば n が 8 の倍数」で偽. 裏は偽, 対偶は真.
(2) 元の命題は偽, 逆は真, 裏は「$ac\neq bc$ ならば $a\neq b$」で真, 対偶は偽.
(3) 元の命題は真, 逆は偽, 裏は偽, 対偶は「$m+n$ が奇数ならば, m または n が奇数」で真.

10 (1) $x>3$ の満たす x の集合を P, $x^2-5x+6\geqq 0$ つまり $x\leqq 2$ または $3\leqq x$ の満たす実数 x の集合を Q とすると $P\subset Q$ である. よってこの命題は真である.
(2) この命題は真である. (3) この命題は偽である. (4) この命題は真である.

11 (1) 十分 (2) または (3) 必要 (4) かつ

12 (1) $\sqrt{8}$ が無理数でない, つまり有理数であると仮定すると, $\sqrt{8}=m$ (m は有理数) とおける. $2\sqrt{2}=m$ であるから $\sqrt{2}=m/2$ となり右辺が有理数となってしまい $\sqrt{2}$ が無理数であることに反する. よって, $\sqrt{2}$ は無理数である. (2)(3) 略.

13 略.【背理法を用いよ. 3 の倍数でない数は $3k\pm 1$ とおける（k は整数）.】

14 (a) (ア) $\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}=\{1,\ 9\}$ (イ) $(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\cap\mathrm{C}=\{2,\ 7\}\cup\{2,\ 4\}=\{2,\ 4,\ 7\}$
(b) $\overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}=\{x:x\leqq 1$ または $3\leqq x\}$

15 (1) (a)　(2) (a)　(3) (b)　(4) (c)　(5) (d)

16 $-1 \leqq a \leqq 3$

17 (a) 逆：「n^2 が 5 の倍数ではないならば，n は 5 の倍数ではない」
裏；「n が 5 の倍数ならば，n^2 は 5 の倍数である」
対偶：「n^2 が 5 の倍数ならば，n は 5 の倍数である」
(b) (c) 詳細は略.【(b) n が 5 の倍数でないとき, $n = 5m+1$ または $n = 5m+2$ または $n = 5m+3$ または $n = 5m+4$（m は整数）とおける．(c) $\sqrt{5}$ が有理数であると仮定すると $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$（m, n は整数で $n \neq 0$）とおける．両辺を２乗して分母を払うと, **整数を素因数に分解する方法は一意的**であることから, 素因子 5 の個数に矛盾が生じることに着目せよ.】

18 英語は話せるが海外旅行したことが無い，という人は多くとも **15** 人しかいない.
また，英語は話せないが海外旅行はしたことがある，という人は少なくとも **15** 人，多くとも **30** 人いる.

19 (1) 必要十分条件である．よって，⓪.
(2)「p ならば $\boxed{}$ が真」となるのは，q または $\bar{r}$ の①である.「$\boxed{}$ ならば p」は真である」が成り立つのは，$q \cap \bar{r}$ の⓪である.

20 (1) ②　(2) ③　(3) ③　(4) ④　(5) ①　(6) ②

21 $n = 829$ のとき，ア $\boxed{6}$ であり，$n = 830$ のとき，イ $\boxed{1}$ である.

22 (a) $m = ad + bc + ac$，$n = bd - ac$
(b) 求める条件は $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ であり，そのとき，$x = \frac{bm-an}{a^2+b^2+ab}$，$y = \frac{am+(a+b)n}{a^2+b^2+ab}$.

23 (a) $b \leqq 0 \leqq a$ である．ただし，$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.　　(b) 証明略.

24 証明略.【微分積分学における連続関数に関する中間値の定理を用いるとよい.】

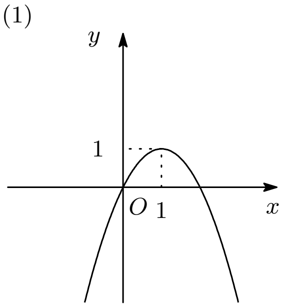
25 略.【素因数分解の一意性を用いるとよい.】

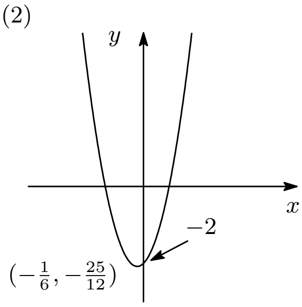
26 (1) **偽**，反例：$x = -3$，$y = -2$　(2) **偽**，反例：$x = \frac{1}{2}$，$y = \frac{1}{3}$　(3) **偽**，反例：$f(x) = x^3$，$a = 0$
(4) $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ とおくと $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ となる（２年生の「数列」で学習するが, S_n を２つ足すと幾つになるか考えてみれば比較的容易に分かる）．n が偶数のとき $\frac{1}{2}n$ が整数となるから, $n+1$ は奇数で 3 以上かつ S_n の約数となり，命題は成り立つ．n が奇数のとき，n は 3 以上である．このとき $\frac{1}{2}(n+1)$ が整数で，$n(\geqq 3)$ は S_n の約数となるので，命題は成り立つ．よって，この命題は**真**である.

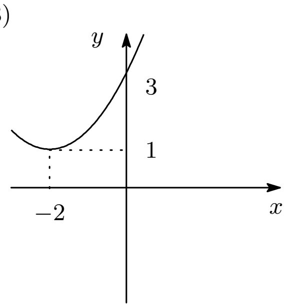
２次の関数・方程式の問題　答.

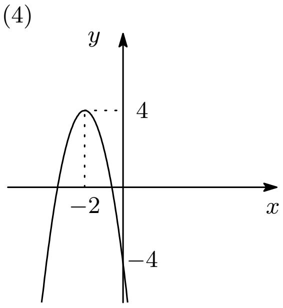
1 (1) $y=2x^2-10x+11$ (2) $y=2x^2+14x+26$ (3) $y=-2x^2-6x-3$ (4) $y=2x^2-6x+3$ (5) $y=-2x^2+6x-3$ 【$y=f(x)$ について, x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動したものは $y=f(x-p)+q$. x 軸に関して対称に移動したものが $y=-f(x)$. y 軸に関して対称に移動したものが $y=f(-x)$. 原点に関して対称に移動したものが $y=-f(-x)$. 】

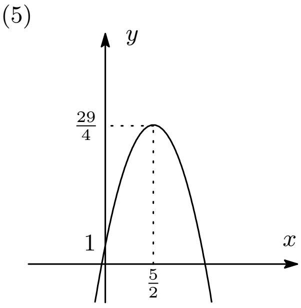
2 (1) $y=-(x-1)^2+1$ より頂点は $(1,1)$, (2) $y=3\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{25}{12}$ より頂点は $\left(-\dfrac{1}{6},-\dfrac{25}{12}\right)$.
(3) $y=\dfrac{1}{2}(x+2)^2+1$ より頂点は $(-2,1)$. (4) $y=-2(x+2)^2+4$ より頂点は $(-2,4)$.
(5) $y=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{29}{4}$ より頂点は $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{29}{4}\right)$. (6) $y=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{3}{16}$ より頂点は $\left(\dfrac{3}{4},-\dfrac{3}{16}\right)$.

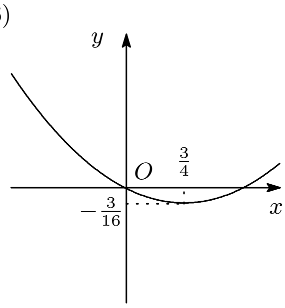
(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


(6)


3 (1) $y=a(x+1)^2$ とおくと $a=2$, よって $y=2(x+1)^2$. (2) $y=x^2-2x+3$. (3) $y=\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$. (4) $y=3(x+2)^2-2$ および $y=21\left(x+\dfrac{5}{7}\right)^2-\dfrac{5}{7}$.【$y=a(x-p)^2+p$ とおく.】 (5) $y=2x^2-3x+3$.

4 (1) $y=-2(x+1)^2+2=-2x^2-4x$. (2) $y=3(x-2)^2-3=3x^2-12x+9$. (3) $y=\dfrac{2}{5}x^2-\dfrac{8}{5}x-2$.

5 $y=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$ なので頂点は $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{4}\right)$. (1) $x=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$, $x=0$ のとき最小値 -1. (2) $x=1$ のとき最大値 1, $x=-1$ のとき最小値 -5. (3) $x=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$, 最小値なし. (4) 最大値なし, 最小値なし.【注意：定義域に $x=3$ は入らないので $-3^2+3\cdot3-1=-1$ は最大値ではない.】 (5) $x=2$ のとき最大値 1, $x=5$ のとき最大小値 -11.

6 (1) 1 辺の長さを x [cm], 隣り合う 1 辺の長さを $15-x$ [cm] とすると, 長方形の面積は $S=x(15-x)=-\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2+\dfrac{225}{4}(0<x<15)$. よって 1 辺が $\dfrac{15}{2}$ [cm] の正方形のとき面積は最大で $\dfrac{225}{4}$ [cm^2] になる. (2) 前半は, 両端から幅 $\dfrac{1}{4}a$ の長さのところを折り曲げる. 後半は, 両端から幅 $\left(\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{5}}{20}\right)a$ の長さのところを折り曲げる. (3) 1 個あたり 125 円にすると 1 日の売り上げは最大で 31250 円になる.

7 (1) 共有点 2 個, $(5+2\sqrt{6},\ 0)$, $(5-2\sqrt{6},\ 0)$. (2) 共有点 2 個, $(1,\ -1)$, $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$. (3) 共有点 1 個, $(-1,\ 0)$.

8 (1) $k=-2,\ -10$. $k=-2$ のとき接点は $(2,\ -4)$, $k=-10$ のとき接点は $(-2,\ 20)$.【$x^2-(6+k)x+4=0$ の判別式 $D=(6+k)^2-16$ が 0 になる k を求める.】 (2) $k<-10$ または $k>-2$ のとき 2 個, $k=-10,\ -2$ のとき 1 個, $-10<k<-2$ のとき 0 個.

9 (1) $-\dfrac{3}{5} \leqq x \leqq \dfrac{1}{4}$ (2) $x < 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2} < x$ (3) $x \leqq -\dfrac{1}{2},\ 1 \leqq x$ (4) $x = \dfrac{5}{3}$ (5) 解なし
(6) 全ての実数

10 (1) $-\dfrac{1}{2} < x \leqq \dfrac{1}{2}$ (2) $x < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < x < \dfrac{11}{8}$ (3) 解無し (4) $x = \dfrac{3}{2}$ (5) $2 \leqq x \leqq 3$
(6) $-2 < x \leqq -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{2} \leqq x < 2$ (7) $-1-\sqrt{3} \leqq x < -1,\ \dfrac{1}{2} < x \leqq -1+\sqrt{3}$
(8) $x < 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2} < x < 3,\ x > 4$ (9) $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0,\ x = \dfrac{3}{4}$

11 (1) $-1+8i$ (2) $5-i$ (3) $2+3i$ (4) $\sqrt{2}i$ (5) -9 (6) $24\sqrt{3}i$ (7) $4i$ (8) $-\sqrt{3}i$ (9) $1+i$
(10) $-\dfrac{4+7i}{13}$ (11) $-\dfrac{i}{2}$ (12) $\dfrac{6}{25}$ (13) $-9-46i$ (14) $\dfrac{-4+3i}{25}$ (15) 1

12 (1) $7i$ (2) $5+5i$ (3) $-7-24i$ (4) $\dfrac{-1+7i}{5}$ (5) $\dfrac{5+14i}{13}$ (6) $-\dfrac{17+19i}{50}$

13 (1) $x = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (2) $x = \dfrac{-2\pm\sqrt{2}i}{2}$ (3) $x = \dfrac{5}{12},\ -\dfrac{1}{3}$
(4) $x = \dfrac{3\pm 4i}{5}$ (5) $x = \dfrac{2}{3},\ 3$ (6) $x = -a \pm b$

14 (1) $D = 1 > 0$ により, 異なる 2 つの実数解を持つ. (2) $a \leqq \dfrac{1}{4}$.
(3) $m = 1,\ -\dfrac{3}{4}$ のとき. $m = 1$ のとき解は $x = 2$, $m = -\dfrac{3}{4}$ のとき解は $x = -\dfrac{3}{2}$.

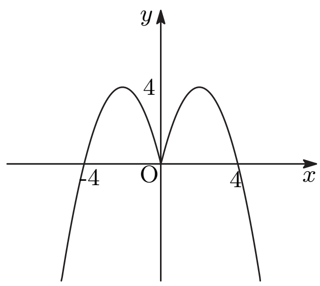
15 $\alpha+\beta = -\dfrac{1}{3},\ \alpha\beta = \dfrac{2}{3}$ を利用する. (1) $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = -\dfrac{11}{9}$ (2) $\dfrac{17}{27}$ (3) $-\dfrac{11}{6}$
(4) $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta = -\dfrac{23}{9}$ より $\alpha-\beta = \pm\dfrac{\sqrt{23}}{3}i$ (5) $\pm\dfrac{\sqrt{23}}{6}i$
(6) $2x^2+x+3 = 0$ (7) $9x^2+11x+4 = 0$ (8) $3x^2-11x+12 = 0$

16 (1) $\left(\sqrt{3}x+y\right)\left(\sqrt{3}x-y\right)$ (2) (与式) $= 0$ を解の公式を用いて解くと $x = \dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$, ゆえに (与式) $=$
$2\left(x-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{2}x-\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2}+1\right)$ (3) $6\left(x-\dfrac{3y}{2}\right)\left(x-\dfrac{-4y}{3}\right) =$
$(2x-3y)(3x+4y)$ (4) $(3x-2-\sqrt{5})(3x-2+\sqrt{5})$ (5) $\{x+(1-\sqrt{2})y\}\{x+(1+\sqrt{2})y\}$
(6) $(y-2x-1)(y-x+2)$

17 (1) $x^2+y^2 = x^2+(x-2)^2 = 2(x-1)^2+2$ により, $x = 1, y = -1$ のとき最小値 2, 最大値なし. (2) $x = 2,\ y = \dfrac{3}{2}$ のとき最大値 3, 最小値なし. (3) $x^2+y^2 = x^2+2x-3 = (x+1)^2-4$ により, $x = \dfrac{3}{2}, y = 0$ のとき最小値 $\dfrac{9}{4}$, 最大値なし.【$y^2 = 2x-3 \geqq 0$ により $x \geqq \dfrac{3}{2}$ に注意.】 (4) $x = 0,\ y = \pm 2\sqrt{2}$ のとき最大値 16, $x = \pm 2,\ y = 0$ のとき最小値 4.【$y^2 = 8-2x^2 \geqq 0$ により $-2 \leqq x \leqq 2$ の下で考える.】

18 (1) $t = \dfrac{v_0}{g}$ [s] のとき最高点に達し, その高さは $h = \dfrac{v_0^2}{2g}$ [m]. (2) $t = 2$ [s] のとき最高点に達し, その高さは $h = 20$ [m]. (3) $2-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1$ および $3 \leqq t \leqq 2+\sqrt{2}$ のとき.

19 (1) $t = (x+1)^2-2$ により $t \geqq -2$. (2) $x = -3, 1\ (t = 2)$ のとき最大値 11, 最小値なし.

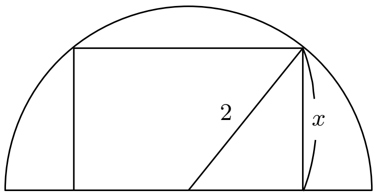


20 (1) (3) グラフ略. (2)【$x \geqq 0$ のときと $x < 0$ のときで場合分けする.】

21 $y=-(x-(p-2))^2+p^2-4p+7$ により頂点は $(p-2,\, p^2-4p+7)$.
$p \leqq 2$ のとき, 最大値 3 ($x=0$ のとき), 最小値 $4p-9$ ($x=2$ のとき).
$2<p<3$ のとき, 最大値 p^2-4p+7 ($x=p-2$ のとき), 最小値 $4p-9$ ($x=2$ のとき).
$p=3$ のとき, 最大値 4 ($x=1$ のとき), 最小値 3 ($x=0,2$ のとき).
$3<p<4$ とき, 最大値 p^2-4p+7 ($x=p-2$ のとき), 最小値 3 ($x=0$ のとき).
$p \geqq 4$ のとき, 最大値 $4p-9$ ($x=2$ のとき), 最小値 3 ($x=0$ のとき).

22 (1) $a \leqq \frac{1}{4}$ (2) $a>0$ (3) $a \geqq \frac{1}{4}$ 【(1) $a \neq 0$ のとき, $D=1-4a \geqq 0$ より $a \leqq \frac{1}{4}$. $a=0$ のときも題意を満たす. これらをまとめて $a \leqq \frac{1}{4}$.】

23 下図のように長方形の高さを x と定めると, 面積は $S=2x\sqrt{4-x^2}$. $S^2=4x^2(4-x^2)=-4(x^2-2)^2+16$ により $x^2=2$ のとき S^2 は最大値 16 である. よって, 長方形の隣り合う辺の長さを $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ とすると, 面積は最大値 4 になる.



24 (1) $y=\frac{1}{3}(10-4x)$ により, 距離は $l=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{5}{3}\sqrt{\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{36}{25}}$ と変形できる. よって, $(x,y)=\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$ のとき距離は最小で 2 になる. (2) $(x,y)=\left(\frac{13}{25},\frac{66}{25}\right)$ のとき距離は最小で $\frac{3}{5}$ になる.

25 (1) $a>0, b<0, c>0, D<0$ (2) $a<0, b>0, c<0, D=0$ (3) $a<0, b<0, c=0, D>0$

26 (1) x 軸方向に $\frac{3}{4}$ だけ移動させる. また y 軸方向に $-\frac{3}{2}$ だけ移動させる. (2) $a=-1,\ b=4$.

27 (1) $y=12\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}=12x^2+8x+2$ (2) $y=(2\pm2\sqrt{3})x$ (3) $y=-4x-2$ 【(2) 求める接線を $y=ax$ とおいて, 2 次関数の式と連立させた $ax=3x^2+2x+1$ の判別式が $D=a^2-4a-8=0$ により定数 a を定める. (3) 求める接線を $y=a(x+1)+2$ とおく. 】

28 (1) $a>1$ (2) $3-\sqrt{13}<a<3+\sqrt{13}$ (3) $a>-1$ (4) $-2 \leqq a<0$ (5) $0<a<3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}<a$

29 (1) $z=p+qi,\ w=r+si$ ($p,\ q,\ r,\ s$ 実数) とすると $\overline{z+w}=\overline{p+r+(q+s)i}=p+r-(q+s)i=p-qi+r-si=\bar{z}+\bar{w}$, $\overline{z\cdot w}=\overline{pr-qs+(ps+qr)i}=pr-qs-(ps+qr)i=(p-qi)\cdot(r-si)=\bar{z}\cdot\bar{w}$.
(2) (1) で $w=z$ とすれば $\overline{z^2}=\bar{z}^2$ より, z が解なら $az^2+bz+c=0$ の両辺の共役複素数を考えることで $\overline{az^2}+\overline{bz}+\bar{c}=a\bar{z}^2+b\bar{z}+c=0$. よって $\bar{z}$ も解となる. (この論法を使うと, 実数係数の代数方程式の解は複素平面上で実数軸に関して線対称に分布することが分かる.)

30 (1) $x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$ (2) $x=-1,\ y=2$ (3) $x=2$

31 (1) $x=-2\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}}=-2\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=-2\pm(\sqrt{3}+1)=-1+\sqrt{3}, -3-\sqrt{3}$ (2) $\dfrac{\sqrt{5}\pm\sqrt{3}\mp\sqrt{2}}{2}$ (複合同順) (3) $x=\dfrac{-1\pm|\sqrt{a}-\sqrt{1-a}|}{2\sqrt{a}}$ 【2 重根号は $\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ $(a \geqq b>0)$ により外す.】

32 (1) $D=9+16a$ により, $-\frac{9}{16}<a<0$ または $0<a$ のとき異なる 2 つの実数解, $a=-\frac{9}{16}$ のとき 2 重解, $a<-\frac{9}{16}$ のとき 2 つの虚数解を持つ. また, $a=0$ のときは 1 つの実数解を持つ.
(2) $D=b^2+24>0$ により, 異なる 2 つの実数解を持つ.
(3) $D=k^2-8k=k(k-8)$ により, $k<0$ または $8<k$ のとき異なる 2 つの実数解, $k=8$ のとき 2 重解, $0<k<8$ のとき 2 つの虚数解を持つ. また, $k=0$ のときは解なし.

33 (1) $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ (2) $x^2+\dfrac{b-c}{a}x-\dfrac{bc}{a^2}=0$ (3) $b+c=0$ 【(2) $\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\left(x-\dfrac{c}{a}\right)=0$ を展開する.】

34 (1) $m \leqq \dfrac{5}{4}$ (2) $-1<m<1$ (3) $m<-1$

35 (1) $a=3,-\dfrac{3}{4}$【y を消去した 2 次方程式 $3x^2-4ax+3a+3=0$ の判別式が $D/4=4a^2-9a-9=0$.】

(2) $a=3$ のとき, 接線の方程式は $y=-4x+5$. $a=-\dfrac{3}{4}$ のとき, 接線の方程式は $y=-\dfrac{11}{4}x+\dfrac{5}{4}$.
【 $a=3$ のとき, $3x^2-4ax+3a+3=0$ を用いて接点の座標 $(2,-3)$ が得られる. ここで接線の方程式を $y=m(x-2)-3$ とおくと, $-x^2+1=m(x-2)-3$ の判別式が $D=m^2+8m+16=0$ により $m=-4$. よって, このとき接線の方程式は $y=-4x+5$. $a=-\dfrac{3}{4}$ のときも同様.】

36 (1) $\alpha+\beta=0, \alpha\beta=-2$. (2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4$, $\alpha^3+\beta^3=0$, $\alpha^4+\beta^4=8$.

(3) $\alpha^n+\beta^n=(-\sqrt{2})^n+\sqrt{2}^n=\begin{cases}2\sqrt{2^n} & n \text{ が偶数のとき}\\ 0 & n \text{ が奇数のとき}\end{cases}$.

37 (1) 頂点は $\left(-\dfrac{p}{6}, 3-p-\dfrac{p^2}{12}\right)$. (2) $\begin{cases}x=-\dfrac{p}{6}\\ y=3-p-\dfrac{p^2}{12}\end{cases}$ から p を消去すると $y=-3x^2+6x+3$.

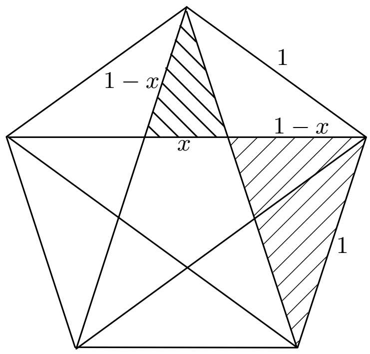
(3) 頂点の x 座標, y 座標がともに正なので, $\begin{cases}-\dfrac{p}{6}>0\\ 3-p-\dfrac{p^2}{12}>0\end{cases}$. これを解いて $-6-6\sqrt{2}<p<0$.

38 (1) $S(x)=ax+\dfrac{(b-a)x^2}{2h}$ (2) $x=\dfrac{\left(-a+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)h}{b-a}$ (3) $a=b$, $a>b$ のいずれの場合でも $\ell=a+\dfrac{(b-a)x}{h}$ に (2) の x の値を代入して $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (a と b の相加二乗平均と呼ばれる量である).

39 (1) 頂点は $\left(\dfrac{1-p}{2}, \dfrac{p^2+p-6}{2}\right)$ (2) $p>2$ (3) $p>\dfrac{7}{3}$ (4) $2<p<\dfrac{7}{3}$

40 (1) $a, c \geqq 0$ であるか $a, c \leqq 0$ であるかによって, 斉次 2 次式は $(\sqrt{a}x \pm \sqrt{c}y)^2$ か $-\left(\sqrt{-a}x \mp \sqrt{-c}y\right)^2$ の 4 種いずれかの平方式となる. (2) $a \neq 0$ なら x について平方完成することで $ax^2+2bxy+cy^2=a\left\{\left(x+\dfrac{b}{a}y\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)^2y^2\right\}=\dfrac{1}{a}\left\{ax+\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)y\right\}\left\{ax+\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)y\right\}$,
$a=0$ なら $ax^2+2bxy+cy^2=y(2bx+cy)$. (c で場合分けしても可.)

41 外側の正五角形の一辺の長さを 1, 対角線で囲まれる小正五角形の一辺を x とすると二等辺三角形の相似から $1:1-x=1-x:x$. これを解き, 相似比は $2:3-\sqrt{5}$.



42 (1) $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=2$ (2) $\alpha^2=\alpha-2$, $\alpha^3=-\alpha-2$, $\alpha^4=-3\alpha+2$ (3) 10

様々な関数の問題　答.

1 (1) 4 (2) -7 (3) $3x^2-6ax+x+3a^2-a$
(4) $12x^2-34x+24$ (5) $6x^2+2x-3$ (6) $6a+3h+1$

2 (1) 値域: $0 \leqq y \leqq 5$ (2) 定義域: $x \geqq 1$, 値域: $y \geqq 0$
(3) 定義域: 0 以外の全実数, 値域: 0 以外の全実数 (4) 値域: $-1 \leqq y \leqq 3$
(5) 定義域: $x > 0$, 値域: 全実数 (6) 定義域: 全実数, 値域: $0 \leqq y \leqq 2$

3 (1) $y=\dfrac{1}{x-1}$ (2) $y=\dfrac{1}{x+3}+5$ (3) $y=\dfrac{-1}{x+1}$ (4) $y=\dfrac{-1}{x-1}$
(5) $y=\dfrac{1}{x-1}$ (6) $y=\dfrac{1}{x+1}-1$ (7) $y=\dfrac{1}{x}-1$ (8) $y=\dfrac{-1}{x-5}$

4 (1) $y=2-\dfrac{2}{x+3}$. 漸近線 $x=-3,\ y=2$ (2) $y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}$. 漸近線 $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{2}$
(3) $x \geqq 1$ のとき $|x-1|=x-1$, $x<1$ のとき $|x-1|=-(x-1)=-x+1$.
＊ グラフは次ページに記載.

5 (1) $y=-\dfrac{x-5}{3}$ (2) $y=\sqrt{\dfrac{x}{2}}$ (3) $y=\dfrac{1}{x}+2$ (4) $y=\dfrac{-x-1}{x-3}$
(5) $y=x^2-2\ (x \geqq 0)$ (6) $y=-\sqrt{1-x}$ (7) $y=\log_2 x$ (8) $y=10^x-1$

6 (1) 偶関数 (2) 奇関数 (3) どちらでもない (4) どちらでもない
(5) 偶関数 (6) 奇関数 (7) 偶関数 (8) 奇関数

7 (1) $(1+\sqrt{5}, 7+2\sqrt{5}),\ (1-\sqrt{5}, 7-2\sqrt{5})$ (2) $(4,\ 2)$ (3) $(-3,\ -2)$
(4) $(1,\ -2),\ (5,\ 2)$ (5) $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ (6) $(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (3,\ 3)$

8 (1) $x=3$ (2) $x=1$ (3) 解なし (4) $x=1,\ -\frac{2}{3}$ (5) $x=-1\pm\sqrt{2}$ (6) $x=3$

9 (1) $-1 \leqq x \leqq 4$ (2) $x<1$ または $7<x$ (3) $x=1$ (4) $\frac{4}{3} \leqq x \leqq 4$

10 (1) 略 (2) (-4, 2), (1, 3) (3) $-4<x<-1,\ 1<x$

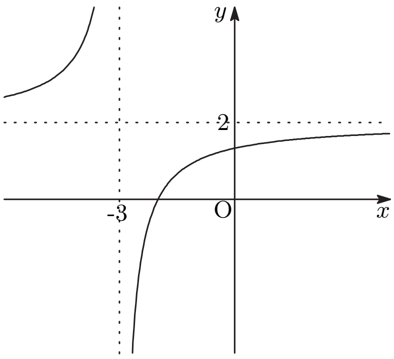
11 (1) 条件 $x \geqq 0$ の下で $y=\dfrac{2x+4}{x+3}$, 条件 $x<0$ の下で $y=\dfrac{-2x+4}{-x+3}$ のグラフを書く. (2) $x \leqq 1$ のとき $|x-1|+|x-2|=-(x-1)-(x-2)=-2x+3$, $1<x \leqq 2$ のとき $|x-1|+|x-2|=(x-1)-(x-2)=1$, $2<x$ のとき $|x-1|+|x-2|=(x-1)+(x-2)=2x-3$. (3) $\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x-2)}$ (4) $\sqrt{x^2}=|x|$
＊ グラフは次次ページに記載.

12 (1) x 軸方向に -2, y 軸方向に $b=-5$ だけ平行移動させた. (2) $a=-1$.

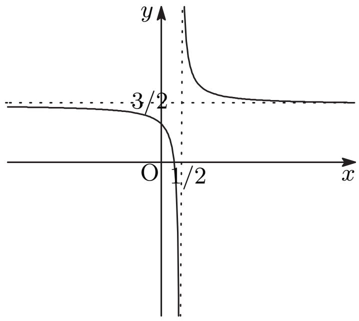
13 (1) 奇関数 (2) 奇関数 (3) 奇関数 (4) 偶関数 (5) 奇関数 (6) 偶関数

14 $t \leqq \dfrac{250\pi}{27}$ のとき $h(t)=3\sqrt[3]{\dfrac{4t}{\pi}}$ [cm], $t>\dfrac{250\pi}{27}$ のとき $h(t)=10$ [cm].

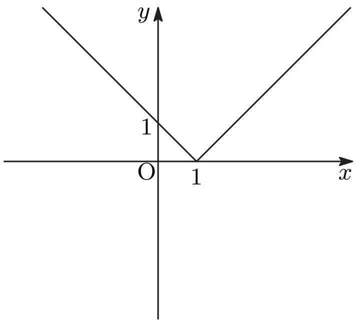
15 (1) $x=5$ (2) $x=-3+\sqrt{6}$ (3) $0 \leqq x < 4$ (4) $4 < x \leqq 5$ (5) $x \leqq -1,\ 0 < x \leqq 2$
(6) $\dfrac{1}{3}<x<1,\ 2<x$ (7) $x<0,\ 3<x$ (8) $x<0,\ 0<x<1,\ 3<x$



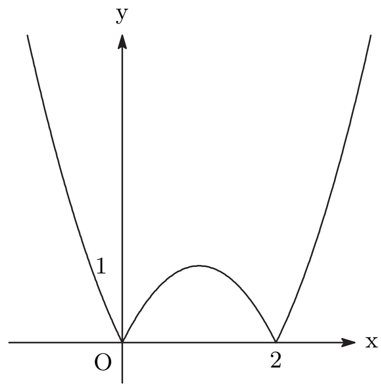
4(1)



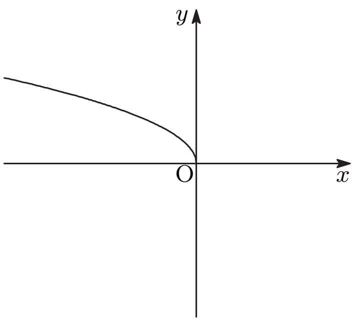
4(2)



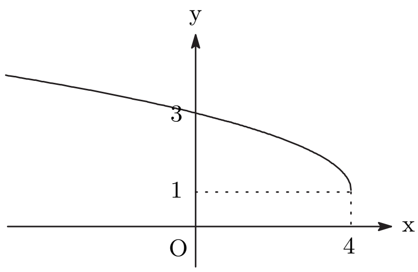
4(3)



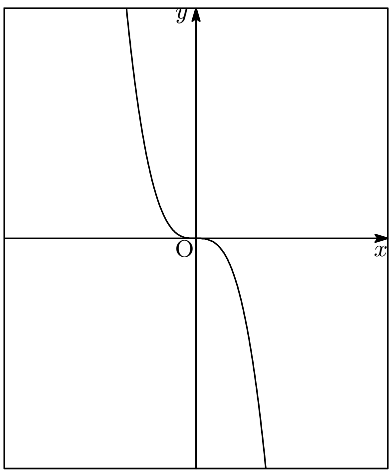
4(4)



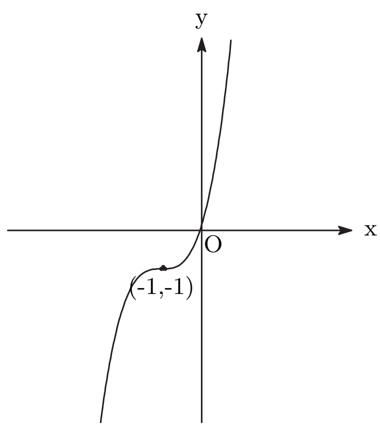
4(5)



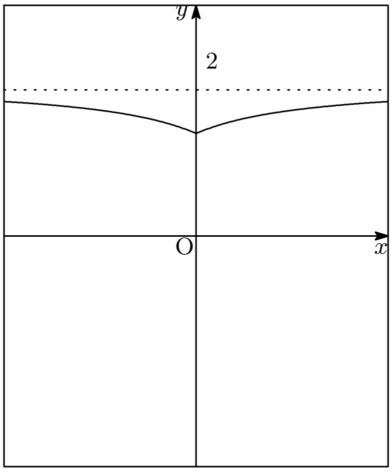
4(6)



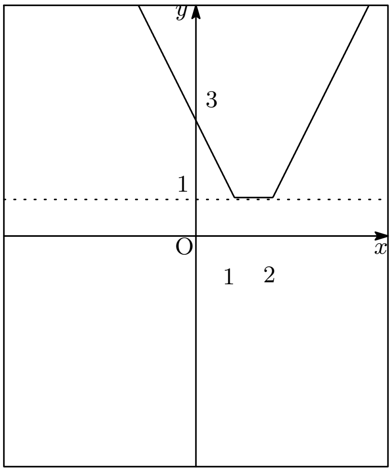
4(7)



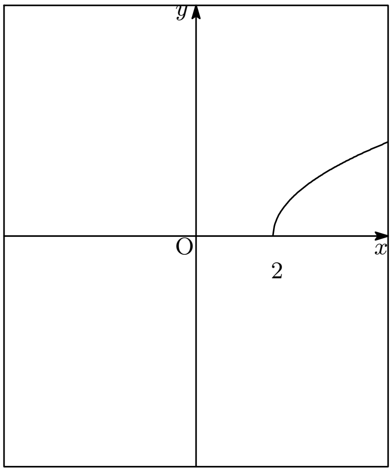
4(8)



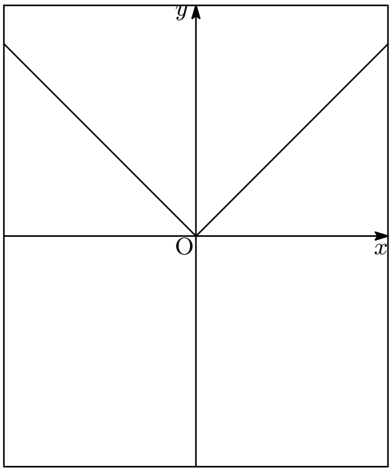
11(1)



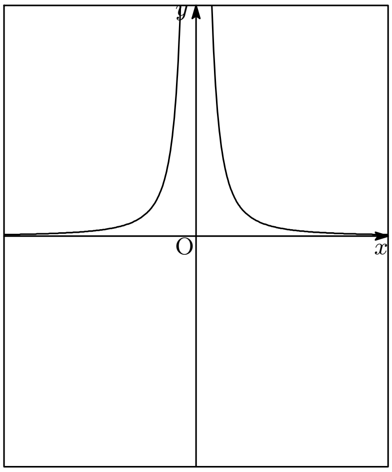
11(2)



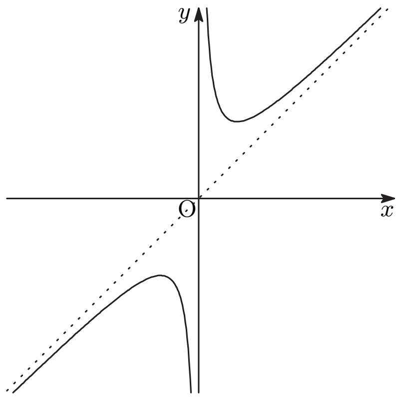
11(3)



11(4)



11(5)



11(6)

16 (1) $a<0$ または $a>\dfrac{1}{2}$ のとき共有点は 0 個, $a=0$ または $a=\dfrac{1}{2}$ のとき共有点は 1 個, $0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき共有点は 2 個.

(2) $a>2$ のとき共有点は 0 個, $a=2$ および $a<\dfrac{3}{2}$ のとき共有点は 1 個, $\dfrac{3}{2}\leqq a<2$ のとき共有点は 2 個.

17 $a>0$ のとき $x<1$ または $1+\dfrac{1}{a}\leqq x$, $a=0$ のとき $x<1$, $a<0$ のとき $x\leqq 1+\dfrac{1}{a}$.

18 (1) $a=3,\ b=-1$ または $a=-3,\ b=2$ (2) $a=-1,\ b=1$

19 1) $s(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{100-x^2}$ 2) $x = 5\sqrt{2}$ のとき最大値 25.
3) $v(x) = x + \sqrt{100-x^2} + 10.$ 4) $x = 5\sqrt{2}$ のとき最大値 $10\sqrt{2} + 10$ をとる.
【4) 解法の一例: $(x + \sqrt{100-x^2})^2$ の最大値について調べる.】

20 $a = 5,\ b = 3$

21 $y = -\sqrt{-x}$

22 (1) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき $f(x)$ は 最小値は 1 をとる.
(2) $x = 2$ のとき $f(x)$ は最小値は 2 をとる.
(3) n が偶数として $n = 2m$ のとき, $m \leqq x \leqq m+1$ のとき $f(x)$ は最小値は m^2 をとる. n が奇数として $n = 2m+1$ のとき, $x = m+1$ のとき $f(x)$ は最小値は $m(m+1)$ をとる.

23 (1) $f(1280) = f(2^8 5^1) = 9.$
(2) $m = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k},\ n = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$ とすると, $f(mn) = f(p_1^{a_1+b_1} \cdots p_k^{a_k+b_k}) = a_1 + b_1 + \cdots + a_k + b_k = a_1 + \cdots + a_k + b_1 + \ldots + b_k = f(m) + f(n).$
(3) 証明略. (4) 成立しない. 反例：$f(4) = 2,\ f(9) = 2,\ f(13) = 1.$

24 (1)
1）の操作で A のタンクの塩の量は $(500-5x)[g]$
2）の操作で A のタンクの塩の量は $(500-4x)[g]$
3）の操作で A のタンクの塩の量は $\dfrac{(500-4x)(90+x)}{100}[g]$
4）の操作で A のタンクの塩の量は $\dfrac{(500-4x)(90+x)}{100} + 10 - x = -\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{2\,x}{5} + 460$
(2) $-\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{2\,x}{5} + 460 = \dfrac{-1}{25}(x-5)^2 + 461.$ したがって $x = 5$ のとき最大になる.
(3) (2) の標準形より $x = 0,\ 10$ のとき最小になる.

指数関数と対数関数の問題　答.

§1 指数関数

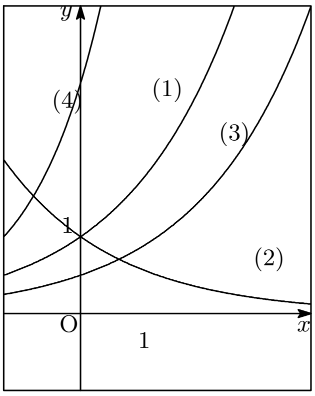
1 (1) $\pm\sqrt{2}$　(2) $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)=0$, これを解いて $x=2,\ -1\pm\sqrt{3}i$.
(3) $\pm3,\ \pm3i$　(4) -2　(5) 9　(6) 16　(7) $\sqrt{2}$　(8) $\frac{5}{2}$

2 (1) $7^{\frac{2}{3}}$　(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ (3) $5^{-\frac{1}{4}}$　(4) $a^{\frac{3}{2}}$　(5) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$　(6) a

3 (1) $2\sqrt{2}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(3) 5　(4) $\frac{1}{5}$
(5) $\frac{1}{3}$　(6) 4　(7) $\frac{3}{2}$　(8) $\frac{\sqrt{2}}{x}$

4 (1) 32　(2) a^2b^9　(3) $(a^{-1/2}b^3)^5(a^3b^{-2})^2=a^{-5/2}b^{15}\cdot a^6b^{-4}=a^{7/2}b^{11}$　(4) 486
(5) $a^3+2a+\frac{1}{a}$　(6) a^4　(7) $a^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{a^5}$　(8) $\frac{a^2}{b}$

5



6 (1) $3^{0.1}<\sqrt[5]{3}<3\sqrt{3}<\dfrac{1}{9^{-1}}$　(2) $\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}<\sqrt[12]{800}<\sqrt[6]{30}<\sqrt[4]{10}$

(3) $0.5^{\frac{1}{2}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}<1<\sqrt{2}<2\sqrt{2}<\dfrac{1}{2^{-2}}$.【全ての数を 2^x の形に表す.】

7
(1) $x=-\frac{3}{2}$　(2) $x=1$　(3) $x=-1$
(4) $x<-2$　(5) $x\leqq-\frac{3}{2}$　(6) $x=2$

8 (1) $\sqrt[3]{54}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}=3\sqrt[3]{2}+\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{7\sqrt[3]{2}}{2}$　(2) $a+3a^{\frac{1}{3}}+3a^{-\frac{1}{3}}+a^{-1}$　(3) $\dfrac{a^2b^2}{a^2+2ab+b^2}$　(4) $\sqrt[3]{3}$

9 (1) 略. (2) $s=\sqrt[m]{\sqrt[n]{w}}$ とすると $s^m=\sqrt[n]{w}$. 両辺を n 乗すれば $(s^m)^n=w$, 従って $s^{mn}=w$ を得るが,
これは定義より $s=\sqrt[mn]{w}$ を意味する. すなわち $\sqrt[m]{\sqrt[n]{w}}=\sqrt[mn]{w}$.

10 (1) $x=0,\ 2$　(2) $x=2$　(3) $x\geqq4$　(4) $x=-1$　(5) $x=-1$　(6) $x\leqq\frac{4}{9}$
(7) $X=3^x$ と置くと, 与不等式は $X^2-X\leqq72$. これを解いて $-8\leqq X\leqq9$. また $X=3^x>0$ であるので $0<X\leqq9$, 従って $0<3^x\leqq9$. これより $x\leqq2$.　(8) $x>3$

11

(a)	$y=1.5^x$	(4)	(b)	$y=2^x$	(1)
(c)	$y=(0.7)^x$	(2)	(d)	$y=2^{x+1}$	(7)
(e)	$y=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$	(5)	(f)	$y=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$	(3)

12 (1) 7【与式の両辺を 2 乗する.】　(2) 18　(3) $a^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$【$t=a^x$ とおくと $t+\frac{1}{t}=3$.】

13 $\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

14 (1) $(x, y) = (2, 3)$ または $(3, 2)$ (2) $x = 3,\ y = 1$ (3) $x = 2,\ y = 1$

15 (1) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{4}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$. (2) 最大値なし, 最小値 $-\frac{1}{4}$（$x = -\log_3 2$ のとき）.

16 $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = -\dfrac{1}{3}$.

17 略.

18 略.

§2 対数関数

1 (1) 3 (2) $\frac{1}{4}$ (3) -4 (4) $\frac{2}{3}$ (5) 0 (6) $-\frac{1}{2}$ (7) -2 (8) $-\frac{1}{2}$

2 (1) $3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$ と訂正．$\log_3 3\sqrt{3} = \frac{3}{2}$ (2) 正しい．$\log_{10} 0.01 = -2$ (3) 正しい．$\log_{81} 27 = \frac{3}{4}$ (4) $\log_5 25 = 2$ と訂正．$5^2 = 25$ あるいは, $\log_5 125 = 3$ と訂正．$5^3 = 125$ (5) $\log_2 1 = 0$ と訂正．$2^0 = 1$ あるいは, $\log_2 2 = 1$ と訂正．$2^1 = 2$ (6) 正しい．$0.5^{-3} = 8$

3 (1) 81 (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) 16 (5) 7 (6) $\frac{1}{8}$ (7) 81 (8) $\log_2 5$

4 (1) -3 (2) 2 (3) $\frac{3}{2}$ (4) $2\log_2 \frac{3}{5} + \log_2 \frac{25}{7} - \log_2 \frac{9}{7} = \log_2 \left(\frac{3^2}{5^2} \cdot \frac{25}{7} \cdot \frac{7}{9}\right) = \log_2 1 = 0$
(5) 1 (6) 10 (7) $\sqrt{2}$ (8) 4

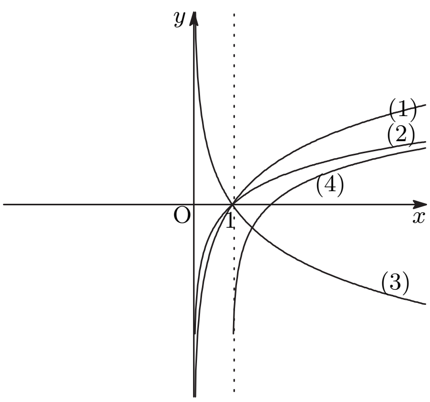
5 (1) $\dfrac{1}{25}$ (2) $\log_3 5 \log_{25} 8 \log_2 3 = \dfrac{\log 5}{\log 3} \times \dfrac{\log 8}{\log 25} \times \dfrac{\log 3}{\log 2} = \dfrac{\log 5}{\log 3} \times \dfrac{3\log 2}{2\log 5} \times \dfrac{\log 3}{\log 2} = \dfrac{3}{2}$ (3) 3

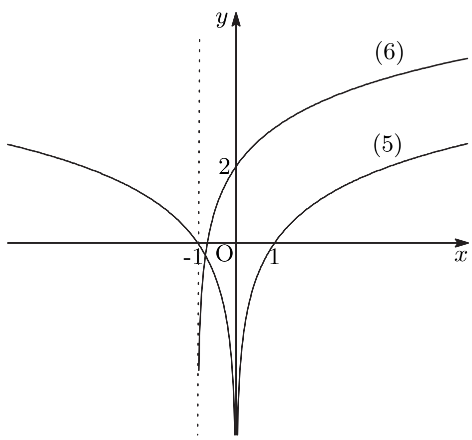
6 (1) $\log_{10} 18 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3^2 = \log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 = a + 2b$ (2) $1 - a$ (3) $a - \frac{b}{2}$ (4) $2a - b$
(5) $2a + b - 2$ (6) $\frac{2a}{b}$

7 (1) $\log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_{0.5} \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 < 2^{\frac{1}{2}} < \log_4 8$ (2) $\log_2 5 > \log_2 3 > \log_4 7 > 1$.
(3) $\log_9 25 < \frac{3}{2} < \log_2 3$

8 (1) $\log_{10} 300 = 2.477$ (2) $\log_{10} \sqrt{5} = 0.349$ (3) $\log_{10}(2 \times 10^{50}) = 0.301$ (4) $\log_2 3 = 1.585$
(5) $x = \log_3 \frac{125}{2} = \frac{3\log 5 - \log 2}{\log 3} = 3.764$

9





10 3^{40} は 20 桁になる．またその逆数は小数点以下 20 位に初めて 0 以外の数が現れる.

11 (1) $x = 3 - \sqrt{10}$. (2) 与式より $\log_2(x-1)(x-3) = 3$, 従って $(x-1)(x-3) = 8$ を解いて $x = 5, -1$. 真数条件 $x > 3$ と合わせて $x = 5$. (3) $x = 2$ (4) $x = 36$ (5) $x = \frac{5}{8}$ (6) $x = 1,\ 4$

12 (1) $\log 3^{100} = 100\log 3 = 47.7$, $\log 6^{80} = 62.24$, 従って $3^{100} < 6^{80}$. (2) $n = 38$ (3) $n = 10,\ 11$

13 (1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ の証明．$m = \log_a x, n = \log_a y$ とすると，$x = a^m$，$y = a^n$．従って $xy = a^m a^n = a^{m+n}$．これより $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$． (2)(3)(4) 略.

14 $10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10} \fallingdotseq 31.6$ 倍になる.

15

(1) $a > b > 1$ であるので $\log_b a > \log_b b = 1$．一方 $\log_a b < \log_a a = 1$．よって $\log_b a > \log_a b$.
(2) $1 > a > b > 0$ であるので $\log_b a < \log_b b = 1$．一方 $\log_a b > \log_a a = 1$．$\therefore \log_a b > \log_b a$.

16 (1) $2 < x < \frac{17}{8}$ (2) $3 < x < 5$ (3) $-\frac{1}{2} < x < 3 - \sqrt{6}$
(4) $0 < x \leqq 1,\ 1000 \leqq x$ (5) $\frac{1}{8} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ (6) $x = 1,\ 4$

17 $10^{m-1} \leqq x < 10^m$, $10^{n-1} \leqq y < 10^n$ の両辺の積をとると $10^{m+n-2} \leqq xy < 10^{m+n}$．よって xy は $m+n-1$ 桁か $m+n$ 桁．同様に $\dfrac{x}{y}$ は小数第 $n-m+1$ 位か第 $n-m$ 位に初めて 0 以外の数が現れ得る.
【1 より小さな正数 z の小数第 k 位に初めて 0 以外の数が現れるのは, $10^{-k} \leqq z < 10^{-k+1}$ である場合.】

18 (1) 20 分後. (2) $n = 10, 11, 12, 13, 14.$ (3) 小数点以下第 7 位に初めて 2 が現れる.
(4) 毎年国民総生産が $1 + \dfrac{x}{100}$ 倍されるので 10 年後は初めの $\left(1 + \dfrac{x}{100}\right)^{10}$ 倍になる.
$\left(1 + \dfrac{x}{100}\right)^{10} \geqq 2$ の両辺に対して底が 10 で対数をとると, $10 \log_{10} \left(\dfrac{100 + x}{100}\right) \geqq \log_{10} 2.$
よって $\log_{10} \left(\dfrac{100 + x}{100}\right) \geqq \dfrac{\log_{10} 2}{10}$. ゆえに $100 + x \geqq 100 \cdot 10^{\frac{\log_{10} 2}{10}}$.
$x \geqq 100 \left(10^{\frac{\log_{10} 2}{10}} - 1\right) \fallingdotseq 100 \left(10^{0.03010} - 1\right)$ ($\fallingdotseq 7.2$). (5) 22 枚.

19 (1) 最大値なし, 最小値 -1（$x = 2$ のとき）. (2) 最大値 2（$x = 3$ のとき）, 最小値なし.
(3) 最大値なし, 最小値 -1（$x = \frac{1}{4}$ のとき）.

20 $y = 10^{ax+b}$

21 略.

22 $y = x^2$ の関係があるとき, 最小値は 4 である.【相加・相乗平均の関係式を用いよ.】

三角関数の問題　答.

1 三平方の定理 $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$,　$\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$,　$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.
$\cos\alpha = \dfrac{3}{4} = 0.75$ だから，三角関数表より α は約 41° である．($\cos 41^\circ = 0.7547$)

2 (1) AD$=9$, BD$=3\sqrt{10}$. (2) $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$,　$\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

3 太陽を見上げる角度を θ とすると，$\tan\theta = \dfrac{2}{3.2} = 0.625$. よって, 三角関数表より θ は約 32° である. ($\tan 32^\circ = 0.6249$)

4 鉛直方向 $10\sin 30^\circ = 5\,[\mathrm{m/s}]$, 水平方向 $10\cos 30^\circ = 5\sqrt{3}\,[\mathrm{m/s}]$.

5 注意：$\tan 90^\circ$，$\tan 270^\circ$ は 0 ではない.

θ	radian	sin	cos	tan
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	なし
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

θ	radian	sin	cos	tan
180°	π	0	-1	0
210°	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	なし
315°	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
0°	0	0	1	0
-30°	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
420°	$\frac{7}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

6 (1) $800^\circ = 80^\circ + 360^\circ \times 2$　(2) $180^\circ : \pi = 75^\circ : x$ より，$x = \dfrac{75^\circ}{180^\circ}\pi = \dfrac{5\pi}{12}$

(3) $180^\circ : \pi = x : \dfrac{3\pi}{5}$ より，$x = 180^\circ \times \dfrac{3}{5} = 108^\circ$　(4) $-\dfrac{13}{4}\pi = -\dfrac{16}{4}\pi + \dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{3}{4}\pi + 2(-2)\pi$

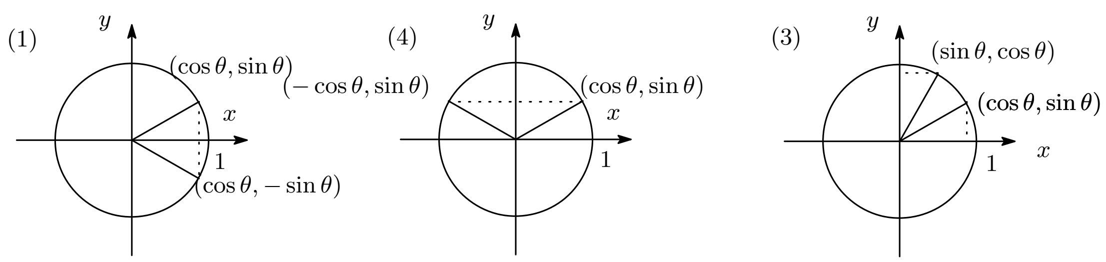
(5) $\dfrac{11}{3}\pi = \dfrac{6}{3}\pi + \dfrac{5}{3}\pi = 2\pi + \dfrac{5}{3}\pi$ より，第 4 象限　(6) $0 \leqq \cos\theta \leqq 1$

(7) $70^\circ = \dfrac{7}{18}\pi$ より，弧の長さ $= r\theta = 4 \cdot \dfrac{7}{18}\pi = \dfrac{14}{9}\pi(cm)$, 面積 $= \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 4^2 \cdot \dfrac{7}{18}\pi = \dfrac{28}{9}\pi(cm^2)$

(8) $\dfrac{3}{2}\pi < 2\theta < \dfrac{5}{2}\pi$ より，2θ は第 4 象限か第 1 象限, つまり x 軸が正の範囲の角なので，$\cos 2\theta > 0$

(9) $y = 3\sin\left\{\dfrac{1}{2}(x+\pi)\right\}$ より，$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に 2 倍に拡大，y 軸方向に 3 倍に拡大した後，x 軸方向に $-\pi$ だけ平行移動したもの. (または, $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動した後, x 軸方向に 2 倍に拡大，y 軸方向に 3 倍に拡大したもの.)

7 (1)　$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta,\ \tan(-\theta) = -\tan\theta$
(2)　$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta,\ \cos(\theta+\pi) = -\cos\theta,\ \tan(\theta+\pi) = \tan\theta$
(3)　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta,\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta,\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}$
(4)　$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta,\ \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta,\ \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$



8 (1) $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ = 0.9397$ (2) $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ = 0.3420$
(3) $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ = -0.9397$ (4) $\tan 160^\circ = -\tan 20^\circ = -0.3640$
(5) $\sin 200^\circ = -\sin 20^\circ = -0.3420$ (6) $\tan 200^\circ = \tan 20^\circ = 0.3640$
(7) $\cos 290^\circ = \sin 20^\circ = 0.3420$ (8) $\tan 290^\circ = -\dfrac{1}{\tan 20^\circ} = -2.7473$
(9) $\cos(-20^\circ) = \cos 20^\circ = 0.9397$ (10) $\tan(-20^\circ) = -\tan 20^\circ = -0.3640$

9 (1) $\sin 105^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 105^\circ = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\tan 105^\circ = -(2+\sqrt{3})$.
(2) $\sin 165^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 165^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\tan 165^\circ = -2+\sqrt{3}$.
(3) $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$.

10 (1) $\cos\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (2) $\sin\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

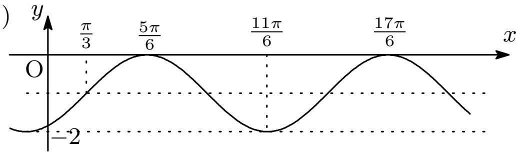
11 (1) $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{2}{5}$ (2) $\sin\theta+\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\sin^3\theta+\cos^3\theta = \pm\dfrac{3\sqrt{3}+1}{8}$ 【(2) 2重根号を開く.】

12 証明略.【$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$, $\tan^2\theta+1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を用いる.】

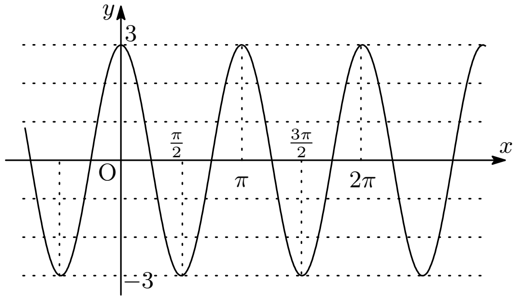
13 証明略.【2倍角の公式を用いる.】

14 10 秒後の面積は $\dfrac{10}{9}\pi$. 扇形 $APO = 6$ となるのは, $\dfrac{\pi}{9}t = 6$ より, $t = \dfrac{54}{\pi}$ 秒後である.

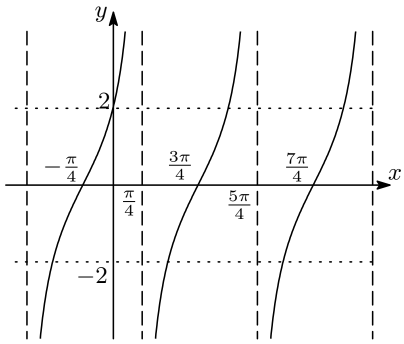
15 (1)



(2)



(3)



16 $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = -\dfrac{5}{13}$ を用いる. $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{16}{65}$, $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{63}{65}$, $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{16}{63}$.

17 $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ を用いる. $\sin 2\alpha = -\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{9}$, $\tan 2\alpha = -4\sqrt{5}$.

18 (1) 与式 $= \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (2) 与式 $= 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$
(3) 与式 $= 2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ (4) 与式 $= \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$

19 $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\tan\dfrac{\alpha}{2} = -3$.

20 (1) $2\sin 4x\cos x$　(2) $2\cos 7x\cos 2x$　(3) $-2\sin\dfrac{17}{24}\pi\sin\dfrac{\pi}{24}$　(4) $-2\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{18}$

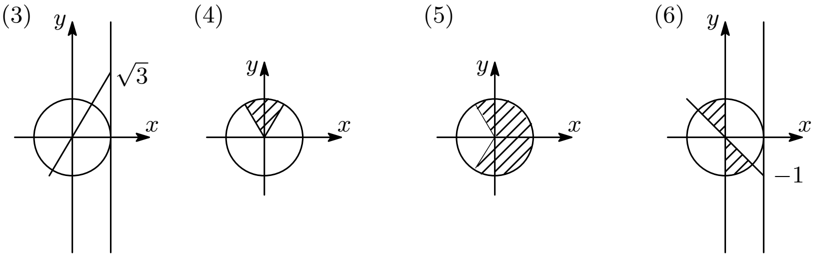
21 (1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(4) $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

22 (3)〜(6) は下図参照.

(1) $x = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}$　(2) $x = \dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{7\pi}{6}$　(3) $x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$

(4) $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2\pi}{3}$　(5) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3} \leqq x < 2\pi$　(6) $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{7\pi}{4}$

(3)　(4)　(5)　(6)



23 (1) $A = 45^\circ$, 面積 $S = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.　(2) $c = 2\sqrt{6}$, $S = 3(3+\sqrt{3})$.

(3) $c = 2$ のとき $A = 120^\circ$, $C = 30^\circ$, $c = 4$ のとき $A = 60^\circ$, $C = 90^\circ$. $R = 2$.

24 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,\ \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.$

25 (1) $x = \dfrac{4\pi}{4} = \pi$, または $x = \dfrac{3\pi}{2}$.　(2) $x = \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$　(3) $x = \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$.

(4) $x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$　(5) $\dfrac{\pi}{8} < x < \dfrac{3\pi}{8},\ \dfrac{9\pi}{8} < x < \dfrac{11\pi}{8}$.

(6) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < x < 2\pi$.

26 (1) 最大値 $2\sqrt{3}$（$\theta = \frac{5}{3}\pi$ のとき）, 最小値 $-2\sqrt{3}$（$\theta = \frac{2}{3}\pi$ のとき）.

(2) 最大値 1（$x = \frac{5}{6}\pi$ のとき）, 最小値 -1（$x = \frac{11}{6}\pi$ のとき）.

(3) 最大値 5（$x \fallingdotseq 37^\circ$ のとき）, 最小値 -5（$x \fallingdotseq 217^\circ$ のとき）.

(4) 最大値 $\frac{3}{2}$（$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ のとき）, 最小値 -3（$\theta = \pi$ のとき）.

(5) 最大値 $\frac{1}{4}$（$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ のとき）, 最小値 $-\frac{3}{3}$（$x = 0, \pi$ のとき）.

(6) 最大値 $\sqrt{a^2+b^2}$（$\omega t = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Cos}^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ のとき）, 最小値 $-\sqrt{a^2+b^2}$（$\omega t = \frac{3\pi}{2} - \mathrm{Cos}^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$）.

27 (1) $y = \sin 2x - 2(\sin x - \cos x) = 1 - t^2 - 2t = -(t+1)^2 + 2$.

(2) 最大値 2 $\left(x = 0,\ \dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$, 最小値 $-1-2\sqrt{2}$ $\left(x = \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

28 (1) 余弦定理より $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ であるので, 与式に代入して $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$. これより $b^2 = c^2$ を得る. $b,\ c > 0$ であるので, $b = c$ の二等辺三角形.

(2) $b = c$ の二等辺三角形または $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形. (3) $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形.

29 $AC = \sqrt{31}$, $\cos B = -\dfrac{1}{4}$, $\sin B = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. 面積 $S = 4\sqrt{15}$. 【$\triangle ABC$ および ΔCDA に余弦定理を適用する. 四角形 ABCD は円に内接しているので $B + D = \pi$ に注意.】

30 略.

31 空欄に順に次が入る. $AB\cos\alpha,\ AB\sin\alpha,\ AD\cos\beta,\ AD\sin\beta,\ \dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\alpha\cos\beta,$

$\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cos\alpha\sin\beta,\ \dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\alpha\cos\beta + \dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cos\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$

32 (1) (底辺)$= \cos\theta$, (高さ)$= \sin\theta$

(2) $L^2 = (\cos\theta + \sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = 1 + \sin 2\theta$

(3) $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{2}{\sin 2\theta}$

(4) $L = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$. ここで $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ により $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ で L は最大値 $\sqrt{2}$ をとる.

(5) (a) $\sin 2\theta = L^2 - 1 = \dfrac{2}{3}$. (b) $0° < \theta < 90°$ により, $0° < 2\theta < 180°$. 三角関数表により $\sin 42° = 0.6691$ なので 2θ は約 $42°$ または約 $138°$. よって, θ は約 $21°$ または約 $69°$. (c) $\tan\theta + \tan(90° - \theta) = \tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{2}{\sin 2\theta} = 3$.

(6) $\tan\theta + \tan(90° - \theta) = \dfrac{2}{\sin 2\theta}$ を整数 n とすると, $\sin 2\theta = \dfrac{2}{n}$ (n は整数) と表せる. また $20° \leqq 2\theta \leqq 90°$ を用いると三角関数表により $0.3420 \leqq \sin 2\theta \leqq 1.000$. よって $n = 2, 3, 4, 5$ のいずれかである. すなわち $\tan\theta + \tan(90° - \theta) = \dfrac{2}{\sin 2\theta} = \dfrac{2}{L^2 - 1} = 2, 3, 4,$ または 5. $L > 0$ なので $L = \sqrt{2}, \sqrt{\dfrac{5}{3}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}},$ または $\sqrt{\dfrac{7}{5}}$.

33 略.

34 (1) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ など

(2) 求める関数の周期を l とすると, $\dfrac{\pi}{3} + l \geqq 2\pi$ かつ $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{l}{2} < 2\pi$ であれば良い. これを解くと, $\dfrac{5}{3}\pi \leqq l < \dfrac{10}{3}\pi$. $l = \dfrac{2}{a}\pi$ により $\dfrac{3}{5} < a \leqq \dfrac{6}{5}$.

35 (1) 0 (2) 0 (3) $2\sin\left(\alpha + \frac{5}{6}\pi\right)$ など (4) $\dfrac{1}{8}$

36 $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\sqrt{21} + \sqrt{6}}{10}$

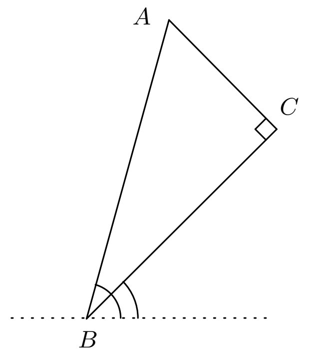
37 $\sqrt{5}$

38 (1) 2 (2) 8

39 $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

40 $54\pi + \dfrac{5\sqrt{95}}{4}$

41 不可能である. 例えば図のように 3 点が格子点上にあるとしよう.



B を通る x 軸と平行な線を引き AB とのなす角を α, BC とのなす角を β とする. すると $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{6}$ となる. $\tan\alpha$ は AB の傾きである. A,B ともに格子点上にあるので $\tan\alpha$ は有理数となる. 同様にして $\tan\beta$ も有理数となる. 一方 $\tan\dfrac{\pi}{6} = \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$ より $\tan\dfrac{\pi}{6}$ も有理数となる. しかし $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ は無理数であるので矛盾する. また 3 角形がいかなる位置にあっても同様に証明できるので, 3 つの頂点を格子点に置くことは不可能である.

平面上の図形の問題　答.

1 (1) $\left(\frac{3}{4}, \frac{15}{4}\right)$ (2) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (3) $C\left(-\frac{11}{2}, \frac{15}{2}\right)$

(4) PR の中点が Q より R は PQ を $2:1$ に外分する点となる. よって求める点は, $R(7, 0)$.

2 (1) $y = \frac{1}{2}x + 6$ (2) $y = \frac{1}{3}x + 2$ (3) $y = -1$.

(4) 平行: $2x + 3y - 8 = 0$ 垂直: $3x - 2y + 14$ (5) 平行: $x = 1$ 垂直: $y = 3$ (6) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

3 (1) $\angle B = 90^\circ$ の直角二等辺三角形 (2) $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形 (3) 正三角形

4 (1) $P(3,\ 0),\ Q(0,\ -6)$ (2) $y = 2x - 6$

5 (1) $y = 2x - 1$ (2) $Q(2, 3)$ (3) $PQ = \sqrt{5}$ (4) $R(1, 1)$

【(4)「点 R が点 P の直線 ℓ に関する対称点 $\Longleftrightarrow$ 点 Q は 線分 PR の中点」が成り立つ. 】

6 (1) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ (2) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 20$ より中心 $(-2, -4)$, 半径 $2\sqrt{5}$. グラフ略.

(3) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 26$ (4) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 40$

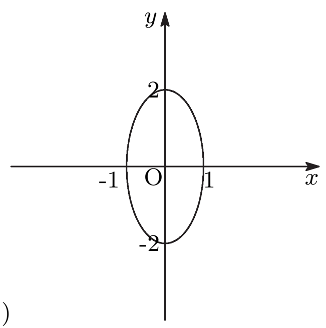
(5) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ (6) $x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$ (7) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 20$

(8) $3x^2 + 3y^2 - 4x - 2 = 0$ 【(6) 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおく. (7) 求める円は $(x+3)^2 + (y-2)^2 = r^2$ とおけるので, これと直線の方程式を連立させて判別式を用いよ.】

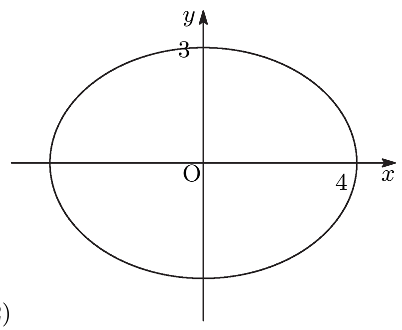
7 (1) $y^2 = 8x$ (2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ (4) $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ (5) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

(6) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 【(5) 求める楕円の方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{7-a^2} = 1$ とおける.】

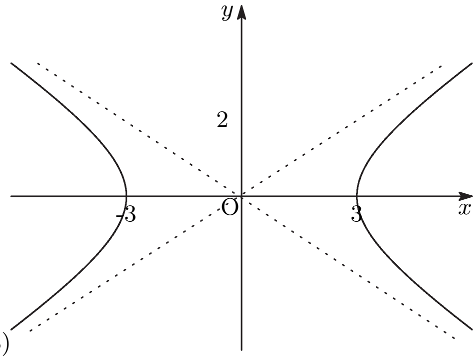
8 グラフは以下の通り.



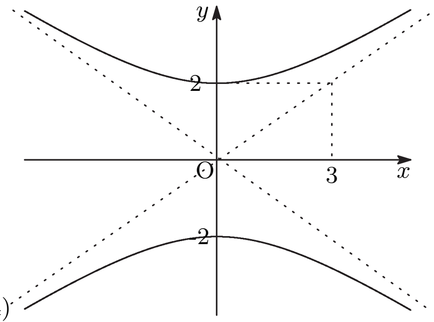
(1)



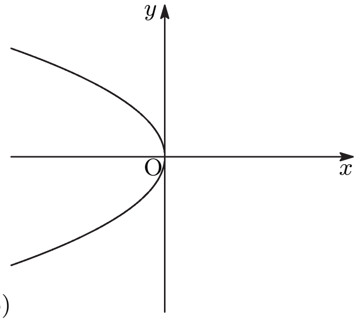
(2)



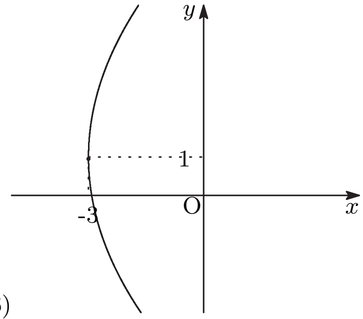
(3)



(4)



(5)

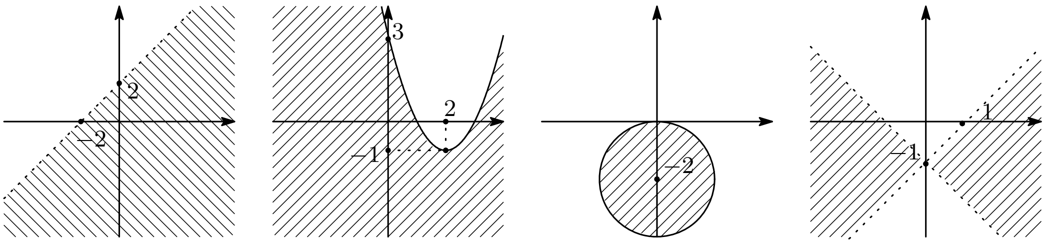


(6)

9 (1) $-5 \leqq k \leqq 5$　(2) $m < -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2} < m$

10

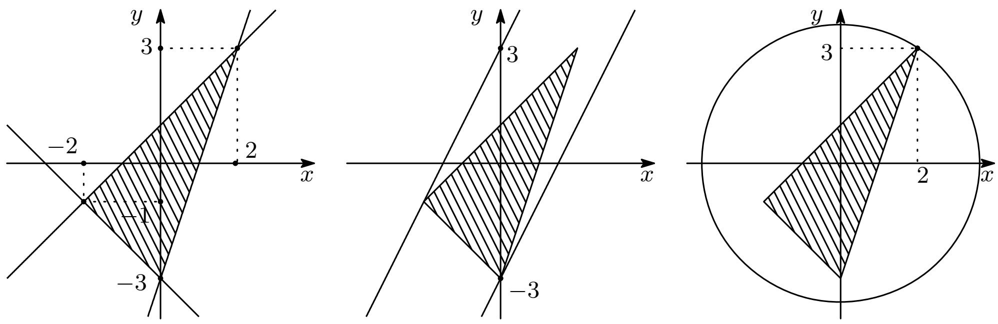
(1)　(2)　(3)　(4)



11 (1) 求める領域 U は下図左の斜線部分（領域も含む）.

(2) $-2x+y=k$ とおく. $-2x+y=k \Longleftrightarrow y=2x+k$ より $y=2x+k$ が領域 U の点を通るときの, その y 切片 k の最大・最小を調べればよい. グラフより, 点 $(-2,-1)$ を通るとき最大, $(0,-3)$ を通るとき最小となる. よって最大値 3 ($x=-2$, $y=-1$ のとき), 最小値 -3 ($x=0$, $y=-3$ のとき).

(3) $x^2+y^2=r^2$ とおく. この円 C が領域 U の点を通るときの, その半径 (の平方) の最大を調べればよい. グラフより, 点 $(2,3)$ を通るとき最大となる. よって最大値 13 ($x=2$, $y=3$ のとき).



12 (1) $b=0$ のとき, ℓ は $x=-\dfrac{c}{a}$ となり P を通るから求める直線は $x=x_1$. 一方, $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ に $b=0$ を代入すると, $a(x-x_1)=0$ より $x=x_1$. よって $b=0$ のときは成り立つ. $b \neq 0$ のとき, ℓ は $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ となるから, 求める直線の傾きは $-\dfrac{a}{b}$. これが点 P を通るから, $y-y_1=-\dfrac{a}{b}(x-x_1)$. つまり $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$. 以上より, 点 P を通り ℓ に平行な直線は $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ と表せる.

(2) 略.

13 (1) $\dfrac{5}{\sqrt{17}}$　(2) $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$　(3) $\dfrac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

【点 (x_1,y_1) と $ax+by+c=0$ の距離 d は $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で与えられることを用いよ.】

答

14 (1) $\left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3-3\sqrt{3}}{2}\right)$ (2) $(3,\ -1)$

15 (1) $a=-6$ (2) 必ず定点 $(2,\ 4)$ を通る.【証明のヒント：直線の方程式を a について降べきの順に整理してみよ.】

16 (1) $x+\sqrt{3}y=4$ (2) $y=0,\ y=\dfrac{3}{4}x$（接点の座標は順に $(3,\ 0),\ (\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5})$） (3) $y=\sqrt{3x}+4,\ y=-\sqrt{3}x+4$（接点の座標は順に $(-\sqrt{3},\ 1),\ (\sqrt{3},\ -1)$） (4) $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3},\ y=\dfrac{4}{3}x-15$

17 (a) 定まらない（無数に存在する）. (b) 一意に定まり $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
(c) 2 つ存在して $x^2+y^2=10$ と $(x-1)^2+(y-2)^2=10$ (d) 一意に定まり $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
(e) 一意に定まり $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ (f) 存在しない.

18 $(x-7)^2+(y-1)^2=25$

19 (1) ℓ の方程式は $x+2y-7=0$. 円の中心（原点）と直線との距離が $\dfrac{|0+0-7|}{\sqrt{1+2^2}}=\dfrac{7}{5}\sqrt{5}>\sqrt{5}$ なので, 円と直線は交わらない.
(2) $y=mx\pm\sqrt{5(m^2+1)}$
(3) 接線は $y=-\dfrac{1}{2}x\pm\dfrac{5}{2}$, 接点は $P_1(1,2)$ と $P_2(-1,-2)$.
(4) $(x,y)=(-1,-2)$ のとき最大値 6, $(x,y)=(1,2)$ のとき最小値 1 をとる.

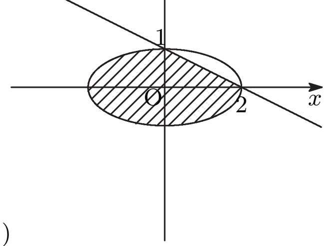
20 略.

21 (1) （アポロニウスの）円 $(x-5)^2+y^2=9$ (2) 楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ (3) 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$
(4) 点 $S(x,y)$ とおくと, $AS=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}$, $BS=\sqrt{(x-3)^2+(y+6)^2}$. $AS:BS=2:3 \iff 9AS^2=4BS^2 \iff 9\left((x+2)^2+(y-4)^2\right)=4\left((x-3)^2+(y+6)^2\right) \iff 9(x^2+y^2+4x-8y+20)=4(x^2+y^2-6x+12y+45) \iff 5x^2+5y^2+60x-120y=0 \iff (x^2+12x+36-36)+(y^2-24y+144-144)=0 \iff (x+6)^2+(y-12)^2=(6\sqrt{5})^2$. よって求める軌跡は中心 $(-6,12)$, 半径 $6\sqrt{5}$ の（アポロニウスの）円になる. (5) 円 $x^2+y^2=\dfrac{l^2}{4}$ ＊グラフは略.

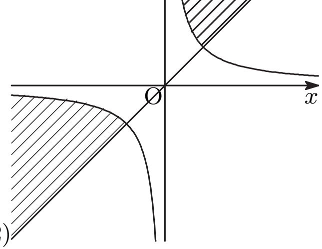
22 略.

23 (1) $2x-y-2=0$ (2) $x^2+y^2-12x+7y=0$

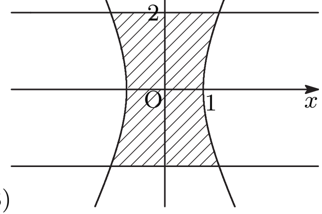
24 (1) 境界は含まない. (2) 境界を含む. (3) 境界を含む.



(1)



(2)



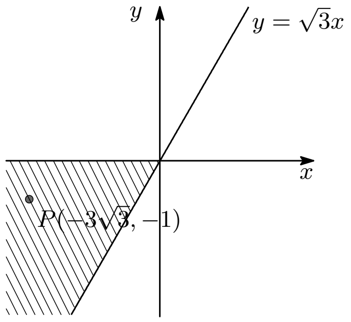
(3)

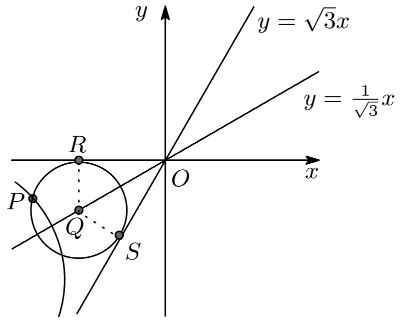
25 (1) 残りの 2 頂点は $y=-2x+8$ 上にある．$a=\dfrac{7}{2}$ で残りの点は $\left(\dfrac{5}{2},3\right)$.

(2) 残りの 2 点は $(2,4)$, $(4,0)$ または $(-1,5)$, $(3,7)$ または $(3,-3)$, $(7,-1)$.

26 (1) $y=\sqrt{3}x$ の左辺, 右辺にそれぞれ $x=-3\sqrt{3}$, $y=-1$ を当てはめてみると, $-1>-9$ より, 点 P は直線 $y=\sqrt{3}x$ の上側にある．同様にして x 軸の下側にあることもわかるので, 求める領域は下図の通り．

(2) 求める円の中心を Q とする．また Q から $y=0$, $y=\sqrt{3}x$ に下ろした垂線の足をそれぞれ, R, S とする．$QR=QS$ かつ $\angle OQR=\angle OQS$ より, Q は $y=\sqrt{3}x$ と $y=0$ のなす角の二等分線上にある．$\angle ROS=60^\circ$ より, $\angle ROQ=30^\circ$ だから, 二等分線の方程式は $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$. (1) より, 円は左下の領域にあるので, 中心 Q は半径 r を用いて $(-\sqrt{3}r,-r)$ で表せる．$PQ^2=r^2$ より $(-3\sqrt{3}+\sqrt{3}r)^2+(-1+r)^2=r^2$ $\iff 3(r^2-6r+9)+(r^2-2r+1)=r^2 \iff 3r^2-20r+28=0 \iff (3r-14)(r-2)=0.\quad \therefore\quad r=2,\ \dfrac{14}{3}$





27 略.

28 略.

個数の処理の問題　答.

1 (1) $4! = 24$ (2) ${}_7\mathrm{P}_3 = 210$ (3) ${}_7\mathrm{C}_5 = 21$ (4) ${}_{10}\mathrm{C}_7 = 120$ (5) ${}_4\Pi_3 = 64$

2 (1) 9000 (2) 4536 (3) ${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$ (4) $3^6 = 729$ (5) 一の位が 0 の数は $9 \times 8 \times 7 = 504$, 一の位が 5 の数は $8 \times 8 \times 7 = 448$. よって $504 + 448 = 952$.

3 (1) ${}_8\mathrm{P}_5 = 6720$ 通り (2) ${}_8\mathrm{C}_5 = 56$ 通り

4 (1) ${}_9\mathrm{C}_3 = 84$ 通り (2) ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通り (3) $84 - {}_4\mathrm{C}_3 = 80$ 通り

5 (1) 5 本 (2) ${}_{10}\mathrm{C}_2 - 10 = 35$ 本 (3) ${}_{10}\mathrm{C}_3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ 個

6 (1) $(8-1)! = 5040$ 通り (2) ${}_8\mathrm{C}_5 \times (5-1)! = 1344$ 通り (3) $\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{2} \times ((4-1)!)^2 = 1260$ 通り

7 (1) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ (2) $a^9 - 9a^8 + 36a^7 - 84a^6 + 126a^5 - 126a^4 + 84a^3 - 36a^2 + 9a - 1$
(3) $x^{12} + 12x^9 + 60x^6 + 160x^3 + 240 + \dfrac{192}{x^3} + \dfrac{64}{x^6}$

8 (1) ${}_n\mathrm{C}_{n-r} = \dfrac{n!}{\{n-(n-r)\}!(n-r)!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_r$. (別解: n 個の対象から r 個を選ぶ選び方の総数は, n 個の対象から $n-r$ 個を選ばない選び方の総数に一致する.)
(2) 略.

9 (1) ${}_4\Pi_5 = 1024$ 通り (2) $4 \times \dfrac{5!}{2} = 240$ 通り (3) 600 通り

10 (1) $(9-1)! = 40320$ 通り (2) $(7-1)! \times 3! = 4320$ 通り
(3) $(3-1)! \times 6! = 1440$ 通り (4) $40320 - 4320 = 36000$ 通り

11 (1) 45 個　(2) 21 個　(3) 34 通り

12 (1) ${}_8\mathrm{C}_5 = 56$ 通り (2) ${}_{11}\mathrm{C}_6 - {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_3 = 357$ 通り (3) 303 通り

13 (1) ${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$ 通り (2) ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通り (3) ${}_6\mathrm{C}_0 + {}_6\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_2 = 1 + 6 + 15 = 22$ 通り

14 (1) 60 通り (2) $\dfrac{5!}{3!2!} + \dfrac{5!}{3!} + \dfrac{5!}{2!2!} = 60$ 通り (3) $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$ 通り (4) 6 通り

15 (1) ${}_7\mathrm{C}_2 = 21$ 通り (2) $3 \times {}_7\mathrm{C}_1 = 21$ 通り (3) $21 + 21 + 3 = 45$ 通り

16 (1) 展開式の第 3 項は ${}_5\mathrm{C}_3(2x)^3(-1)^2 = 80x^3$. よって係数は 80. (2) 945 (3) 20
(4) ${}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_3 = 210$.

17 (1) $0 \leqq r \leqq 5$　(2) $a_6 = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7 = 2449440$

18 (1) -480　(2) 21　(3) -1

19 略.【例えば, 2 項定理の 2 つの変数に特殊な値を代入してみよ.】

20 (1) $f(3)=3, f(4)=6, f(5)=10$ (2) $g(3)=1, g(4)=4, g(5)=10$

(3) $f(n)={}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$, $g(n)={}_n\mathrm{C}_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

21 $k=-\dfrac{1}{6}$. このとき, $\left(x+y-\dfrac{1}{6}z\right)^6$ の展開式の yz^5 の係数は $-\dfrac{1}{1296}$.

22 正四面体: $(3-1)!=2$ 通り, 立方体: 30 通り.

23 1 歩で 1 段あがることを 8 回, 2 段あがることを 2 回で階段を昇りきる方法を $[8,2]$ と表すことにする.

(1) 階段を昇る方法は $[12,0]$, $[10,1]$, $[8,2]$, $[6,3]$, $[4,4]$, $[2,5]$, $[0,6]$ の 7 通り.

(2) $[12,0]$ で昇る方法は 1 通り, $[10,1]$ で昇る方法は $\dfrac{11!}{10!}=11$ 通り, $[8,2]$ で昇る方法は $\dfrac{10!}{8!2!}=45$ 通り, $[6,3]$ で昇る方法は $\dfrac{9!}{6!3!}=84$ 通り, $[4,4]$ で昇る方法は $\dfrac{8!}{4!4!}=70$ 通り, $[2,5]$ で昇る方法は $\dfrac{7!}{2!5!}=21$ 通り, $[0,6]$ で昇る方法は $\dfrac{6!}{6!}=1$ 通り, これらをすべて足し合わせて $1+11+45+84+70+21+1=233$ 通り.

24 (1) 5 通り (2) 41 通り (3) 21 通り (4) $3^5=243$ 通り

執筆者

伊藤　清　　鈴鹿工業高等専門学校
大貫　洋介　鈴鹿工業高等専門学校
川本　正治　鈴鹿工業高等専門学校
篠原　雅史　鈴鹿工業高等専門学校
西川　雅堂　鳥羽商船高等専門学校
堀江　太郎　鈴鹿工業高等専門学校
安富　真一　鈴鹿工業高等専門学校

執筆協力者

岡田　章三　岐阜工業高等専門学校
勝谷　浩明　豊田工業高等専門学校
久綱　正和　岐阜工業高等専門学校（名誉教授）
中島　泉　　岐阜工業高等専門学校
西垣　誠一　沼津工業高等専門学校
松澤　寛　　沼津工業高等専門学校
酒井　道宏　久留米工業高等専門学校

基礎数学問題集

東海地区高専数学担当教員協議会
鈴鹿工業高等専門学校数学教室編

2011 年 3 月初版発行
2012 年 3 月第 2 版発行

鈴鹿工業高等専門学校
〒 510-0294 三重県鈴鹿市白子町
Tel　059-386-1031
URL http://www.suzuka-ct.ac.jp